PQI - 5783 – ANÁLISE DE PROCESSOS DA INDÚSTRIA QUÍMICA

Aula III –Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- **Introdução**
- EDO simples
- Sistemas de EDOs
  - Exemplo
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas diagonalizáves de qualquer dimensão

Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução
- **EDO simples**
- Sistemas de EDOs
  - Exemplo
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas diagonalizáves de qualquer dimensão

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad \text{com} \quad x(t_0) = x_0$$

Solução: $x(t)$

Analítica: rara

Numérica

$$\frac{dx}{dt} = k\, x$$ com $$x(t_0) = x_0$$

Solução: $$x(t) = x_0 \exp\left(k\,(t - t_0)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$ com $$x(t_0) = x_0$$

Solução: $$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(u)\, du + x_0$$

Integração nem sempre
Tem solução analítica

Unicidade da solução:

- condição de Lipschitz
- derivada parcial finita

Consequência:

Uma única trajetória por um único ponto:

- Ou as trajetórias não se tocam
- Ou as trajetórias são a mesma

Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução
- EDO simples
- Sistemas de EDOs
  - **Exemplo**
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas de dimensão 2
  - Sistemas diagonalizáves de qualquer dimensão

Reator batelada

$$A + B \rightarrow C \qquad r_{R1} = k_1 C_A C_B$$

$$C + B \rightarrow D \qquad r_{R2} = k_2 C_C C_B$$

Com:

$$C_A(t_0) = C_{A0}$$

$$C_B(t_0) = C_{B0}$$

$$C_C(t_0) = C_{C0}$$

$$C_D(t_0) = C_{D0}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),
\end{aligned}
$$

$$
y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad \ldots, \quad y_n(a) = \alpha_n.
$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$ com $$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Solução: $\mathbf{x}(t)$

Trajetória no espaço R^n

Visualização difícil

Analítica: raríssima

Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução
- EDO simples
- Sistemas de EDOs
  - Exemplo
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas diagonalizáves de qualquer dimensão

Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução
- EDO simples
- Sistemas de EDOs
  - Exemplo
- Sistemas de EDOs Lineares
  - **Sistemas diagonalizáves de qualquer dimensão**

Solução geral de um sistema linear não homogêneo diagonalizável:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b} \qquad \text{com} \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

A é diagonalizável: existem **P** e **D** tais que: $\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{D}\,\mathbf{P}^{-1}$

com $$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Duas transformações:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

Ou seja:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{y}$$

Ou:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{D}\,\mathbf{z}$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{y}_0$$

$$z_i(t) = z_{i0}\,\exp\left(\lambda_i\left(t - t_0\right)\right)$$