



# PQI - 5783 – ANÁLISE DE PROCESSOS DA INDÚSTRIA QUÍMICA

---

Aula III – Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

# Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- **Introdução**
- EDO simples
- Sistemas de EDOs
  - Exemplo
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas diagonalizáveis de qualquer dimensão

# Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução
- **EDO simples**
- Sistemas de EDOs
  - Exemplo
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas diagonalizáveis de qualquer dimensão


$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

com

$$x(t_0) = x_0$$

Solução:  $x(t)$

Analítica: rara

Numérica

$$\frac{dx}{dt} = k x$$

com

$$x(t_0) = x_0$$

Solução:  $x(t) = x_0 \exp(k(t - t_0))$

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

com

$$x(t_0) = x_0$$

Solução:  $x(t) = \int_{t_0}^t f(u) du + x_0$

Integração nem sempre  
Tem solução analítica



Unicidade da solução:

- condição de Lipschitz
- derivada parcial finita

Consequência:

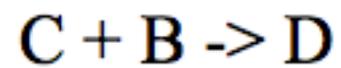
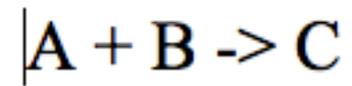
Uma única trajetória por um único ponto:

- Ou as trajetórias não se tocam
- Ou as trajetórias são a mesma

# Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução
- EDO simples
- Sistemas de EDOs
  - **Exemplo**
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas de dimensão 2
  - Sistemas diagonalizáveis de qualquer dimensão

Reator batelada



$$r_{R1} = k_1 C_A C_B$$

$$r_{R2} = k_2 C_C C_B$$

Com:  $C_A(t_0) = C_{A0}$

$$C_B(t_0) = C_{B0}$$

$$C_C(t_0) = C_{C0}$$

$$C_D(t_0) = C_{D0}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}$$

$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y_n(a) = \alpha_n.$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

com

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Solução:

$$\mathbf{x}(t)$$

Trajetória no espaço  $\mathbb{R}^n$   
Visualização difícil

Analítica: raríssima

# Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução
- EDO simples
- Sistemas de EDOs
  - Exemplo
- Sistemas de EDOs Lineares
  - Sistemas diagonalizáveis de qualquer dimensão

# Equações Diferenciais Ordinárias - PVI

- Introdução
- EDO simples
- Sistemas de EDOs
  - Exemplo
- Sistemas de EDOs Lineares
  - **Sistemas diagonalizáveis de qualquer dimensão**

Solução geral de um sistema linear não homogêneo diagonalizável:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \text{com} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$\mathbf{A}$  é diagonalizável: existem  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{D}$  tais que:  $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$

com

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Duas transformações:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

Ou seja:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}$$

Ou:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{D} \mathbf{z}$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}_0$$

$$z_i(t) = z_{i0} \exp(\lambda_i(t - t_0))$$