Sugestões e soluções

1. 1ª definição: *Diz-se que duas frações m/n e m'/n' são iguais se existem números primos entre si p e q, e números inteiros positivos a e b, tais que*

$$m = ap,\ n = aq \quad \text{e} \quad m' = bp,\ n' = bq.$$

2ª definição: *Diz-se que duas frações m/n e m'/n' são iguais se $mn' = m'n$.*

2. A demonstração de que a primeira definição implica a segunda é a mais fácil e fica a cargo do leitor. Para demonstrar a recíproca, suponha que $mn' = m'n$. Sendo a o m.d.c. de m e n, teremos: $m = ap$ e $n = aq$, onde p e q são primos entre si. Destas duas últimas relações segue-se que $mn' = apn'$ e $m'n = aqm'$; e destas obtemos $pn' = qm'$. Daqui se conclui que p divide o produto $m'q$; como é primo com q, divide m'. Portanto, existe b tal que $m' = bp$. Finalmente, para provar que $n' = bq$, basta substituir $m' = bp$ em $pn' = qm'$.

3. Multiplique $AB = m\sigma$ por n e $CD = n\sigma$ por m, donde $nAB = mCD$; em seguida, substitua aqui $AB = m'\sigma'$ e $CD = n'\sigma'$ para chegar a $nm' = mn'$, donde m/n=m'/n'.

4. Não pode simplesmente escrever $A/B = m/n$ e multiplicar cruzado; afinal, é precisamente isto que se pede para provar; e A e B são grandezas, não números! A implicação $A : B = m/n \Rightarrow nA = mB$ segue como no exercício anterior. Para provar a recíproca, divida A em m partes iguais a uma certa grandeza-unidade σ: $A = m\sigma$. Daqui e de $nA = mB$ segue-se que $nm\sigma = mB$, donde $B = n\sigma$.

5. O que se deseja provar é que se r é um número racional positivo tal que $r^2 < 2$, existe outro número racional $s > r$ tal que $s^2 < 2$. Isto se consegue aumentando r de uma quantidade bem pequena, digamos, $1/n$, com n um inteiro bem grande. Mas quão grande? Vejamos: tomando $s = r + 1/n$, queremos que $s^2 = (r + 1/n)^2$ seja menor do que 2; ou seja, $r^2 + 2r/n + 1/n^2 < 2$; ou ainda,

$$\left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} < 2 - r^2.$$

Temos de resolver esta inequação para determinar possíveis valores de n. Podemos evitar isso, resolvendo uma inequação bem mais simples. Para isso adotamos um procedimento que é freqüente em Análise: como $n \geq 1$, temos que $1/n \leq 1$, portanto,

$$\left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \leq (2r + 1)\frac{1}{n}$$

Agora basta resolver a inequação

$$(2r + 1)\frac{1}{n} < 2 - r^2,$$

que resulta em $n > (2r+1)/(2-r^2)$. É claro que com qualquer n nessas condições teremos também $(r + 1/n)^2 < 2$, que é o resultado desejado.

6. Imite a demonstração anterior, começando com $r^2 > 2$ e procurando determinar $s = r - 1/n$ tal que $s^2 > 2$. Veja:

$$s^2 = \left(r - \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 - \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} > r^2 - \frac{2r}{n}.$$

Faça esta última expressão maior do que 2 e resolva a inequação resultante para n.

3.3 Dedekind e os números reais

Vários matemáticos do século XIX cuidaram da construção dos números reais, dentre eles Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor. Mas as teorias dos números reais que permaneceram foram a de Dedekind e a de Cantor. Exporemos, nesta seção, a construção de Dedekind, e no capítulo seguinte a de Cantor. Não faremos uma exposição tecnicamente detalhada, antes vamos nos concentrar nas idéias de Dedekind, procurando dar uma boa compreensão de todo o seu trabalho, principalmente da propriedade de completude dos números reais, expressa nos Teoremas 3.4 e 3.6 adiante.

Richard Dedekind estudou em Göttingen, onde foi aluno de Gauss e Dirichlet. Em 1858 tornou-se professor em Zurique, transferindo-se em 1862 para Braunschweig (ou Brunswick), sua terra natal, onde permaneceu pelo resto de sua vida.

Ele conta que no início de sua carreira em 1858, quando teve de ensinar Cálculo Diferencial, percebeu a falta de uma fundamentação adequada para os números reais, principalmente quando teve de provar que uma função crescente e limitada tem limite (Teorema 6.14, p. 152). E é também ele mesmo quem conta que foi buscar inspiração para sua construção dos números reais na antiga e engenhosa teoria das proporções de Eudoxo. Assim, em 1887, ele escreve: "...e se interpretamos número como razão de duas grandezas, há de se convir que tal interpretação já aparece de maneira bem clara na célebre definição dada por Euclides sobre igualdade de razões. Aí reside a origem de minha teoria (...) e muitas outras tentativas de construir os fundamentos dos números reais".

Cortes de Dedekind

Observe que a definição de Eudoxo associa, a cada par de grandezas, digamos (A, B), dois conjuntos de pares (m, n) de números naturais: o conjunto E ("E" de esquerda) dos pares para os quais $mB < nA$ (que fariam $m/n < A/B$ se A/B tivesse significado numérico) e o conjunto D ("D" de direita) dos pares para os quais $mB > nA$ (que fariam $A/B < m/n$ se A/B tivesse significado numérico).

Inspirando-se na definição de Eudoxo, Dedekind notou que o procedimento do sábio grego leva a uma separação dos números racionais em dois conjuntos. Assim, qualquer número racional r efetua um "corte" ou separação de todos os demais números racionais no conjunto E dos números menores do que r e no conjunto D dos números maiores do que r; o próprio número r pode ser incluído como o maior elemento de E ou o menor elemento de D.

Mas, além desses "cortes", há outros, como exemplifica o clássico caso de $\sqrt{2}$. O processo de encontrar a raiz quadrada de 2 conduz à separação dos números racionais em dois conjuntos: o conjunto E das raízes quadradas aproximadas por falta (aí incluídos o zero e os racionais negativos), e o conjunto D das raízes aproximadas por excesso. Só que agora esse corte não tem elemento de separação; de fato, já vimos (Exercícios 5 e 6 atrás) que o conjunto das raízes por falta não tem elemento máximo e o conjunto das raízes por excesso não tem elemento mínimo. No modo de ver de Dedekind, o número irracional $\sqrt{2}$ deve ser criado como elemento de separação entre os conjuntos desse corte.

Dedekind generaliza esse procedimento, primeiro definindo *corte* de maneira geral, no conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais.

3.2. Definição. *Corte de Dedekind, ou, simplesmente, corte, é todo par* (E, D) *de conjuntos não vazios de números racionais, cuja união seja* $\mathbf{Q}$, *e tais que todo elemento de* E *seja menor que todo elemento de* D.

(Essa definição permite provar (Exercício 1 adiante) que o conjunto E é uma semi-reta para $-\infty$ e o conjunto D uma semi-reta para $+\infty$.) Em seguida Dedekind postula que todo corte possui elemento de separação, que tanto pode ser incorporado a E como o seu maior elemento, ou a D como o seu menor elemento. Suporemos que o elemento de separação seja sempre incorporado a D. Assim, em todo corte, o conjunto D terá mínimo (após a introdução da relação de ordem). E os cortes que não são determinados por números racionais darão origem aos números irracionais. É este o caso de $\sqrt{2}$, número este que conhecemos pelas raízes (números racionais) aproximadas por falta e por excesso, dois conjuntos numéricos E e D que constituem o corte (E, D) que define o número irracional $\sqrt{2}$.

Dedekind observa que a existência de cortes sem elementos de separação no conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais é a expressão aritmética da descontinuidade de $\mathbf{Q}$, ao passo que, com a adjunção dos novos elementos — os números irracionais — obtemos o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais, que, ao contrário de $\mathbf{Q}$, é agora um "contínuo numérico", pois os irracionais vêm preencher as "lacunas" de descontinuidade então existentes em $\mathbf{Q}$.

A relação de ordem

Mas não basta apenas juntar a $\mathbf{Q}$ os novos elementos para obter $\mathbf{R}$. Este conjunto precisa ter a estrutura que dele se espera; daí termos de definir nele as operações usuais de adição, multiplicação, etc., e a relação de ordem. E devemos fazer isso de maneira a podermos provar as propriedades usuais desses números, que já conhecemos e usamos desde o ensino fundamental. Mais ainda, de maneira que essas definições não conflitem, mas preservem, as mesmas noções já existentes no conjunto $\mathbf{Q}$.

No que diz respeito à relação de ordem, por exemplo, devemos introduzi-la em $\mathbf{R}$ de forma a preservar a ordem já existente entre os racionais. Para isto, sejam α e β dois números reais quaisquer, caracterizados pelos cortes que determinam no conjunto $\mathbf{Q}$. Assim, $\alpha = (E_1, D_1)$ e $\beta = (E_2, D_2)$. Dizemos que $\alpha = \beta$ se $E_1 = E_2$ e $\alpha < \beta$ se E_1 é um subconjunto próprio de E_2.

Essa ordem, de fato, preserva a ordem já existente em $\mathbf{Q}$, pois se α e β forem ambos racionais, a definição que acabamos de dar de que $\alpha < \beta$ significa que todo valor aproximado por falta de α também o é de β, mas este tem valores aproximados por falta superiores a todos os de α, que é exatamente como deve ser para preservar a ordem pré-existente em $\mathbf{Q}$.

Operações com números reais

Além da relação de ordem, é necessário definir a adição e a multiplicação de números reais, os inversos aditivo e multiplicativo, e demonstrar todas as propriedades já conhecidas para os números racionais, bem como demonstrar que tudo o que já valia no conjunto $\mathbf{Q}$ permanece válido dentro da nova estrutura de $\mathbf{R}$.

Não é nosso objetivo desenvolver aqui todo esse programa. Daremos uma idéia de como isso é feito no caso da adição, indicando ao leitor o capítulo 1 de [8], o capítulo 28 de [9], ou o Apêndice de [5], para um tratamento completo desses tópicos.[1] Notamos que, para simplificar, nessas referências o conceito de corte é identificado com apenas o conjunto E das aproximações por falta do número que ele define. De fato, isto é suficiente, como no caso de $\sqrt{2}$, cuja caracterização é completa com apenas as raízes aproximadas por falta, que determinam também as raízes por excesso.

A maneira natural de definir a soma de dois números reais $\alpha = (E_1, D_1)$ e $\beta = (E_2, D_2)$ consiste em construir o par $(E, D) = \alpha + \beta$, onde E é o conjunto das somas de elementos de E_1 com elementos de E_2, e D o conjunto das somas

[1] Os professores J. B. Ripoll, C. C. Ripoll e J. F. P. da Silveira, da UFRGS, estão para lançar um livro intitulado *Números racionais, reais e complexos*, especialmente direcionado a alunos de licenciatura.

de elementos de D_1 com elementos de D_2. Todavia, para facilitar as demonstrações, é mais conveniente adotar a definição dada a seguir.

3.3. Definição. *Dados os números reais* $\alpha = (E_1, D_1)$ *e* $\beta = (E_2, D_2)$, *definimos sua soma* $\alpha + \beta$ *como sendo o corte* (E, D), *onde*

$$E = \{x + y \colon x \in E_1, \ y \in E_2\}$$

e D *é o conjunto dos demais números racionais.*

A primeira coisa que temos a fazer após uma definição como esta é provar que o par (E, D) é de fato um corte, isto é, que E e D não são vazios, e que se $x \in E$ e $y \in D$, então $x < y$.

Ora, que $E \neq \phi$ segue do fato de que $E_1 \neq \phi$ e $E_2 \neq \phi$, de forma que existe algum $x + y \in E$. Para provar que $D \neq \phi$ notamos que, tomando $x \in D_1$ e $y \in D_2$, a soma $x + y \in D$, pois $x + y$ é maior que todo elemento de E.

Finalmente temos de provar que todo elemento de E é menor que todo elemento de D. Para isto, sejam $x \in E$ e $y \in D$. Suponhamos, por absurdo, que $x > y$. Então, $x = y + a$, com $a > 0$; e, como $x \in E$, existem $m \in E_1$ e $n \in E_2$ tais que $x = m + n$. Em conseqüência, $y = x - a = (m - a) + n$; e, como $m - a \in E_1$ e $n \in E_2$, concluímos que $y \in E$, que é absurdo. Assim, somos forçados a aceitar que $x < y$, como queríamos provar.

O conjunto Q como subconjunto de R

Seja φ a aplicação que leva cada $r \in \mathbf{Q}$ na classe (E, D) cujo elemento de separação é r. Pode-se provar que

$$\varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s); \qquad \varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s);$$

$$r < s \Leftrightarrow \varphi(r) < \varphi(s); \qquad \varphi(r) = 0 \Rightarrow r = 0.$$

Isso mostra que φ é um *isomorfismo* do corpo $\mathbf{Q}$ no conjunto dos cortes determinados por números racionais. Assim, quando somamos ou multiplicamos dois elementos r e s em $\mathbf{Q}$, suas imagens $\varphi(r)$ e $\varphi(s)$ se somam ou se multiplicam, respectivamente; além do mais, φ preserva a ordem e é uma aplicação sobrejetiva de $\mathbf{Q}$ no conjunto dos cortes determinados por números racionais. Portanto, do ponto de vista das operações de adição e multiplicação, bem como da relação de ordem, não há por que distinguir $\mathbf{Q}$ desse conjunto de cortes determinados por racionais; daí identificarmos esses dois conjuntos. Não há mesmo razão para distinguir entre um número como 3 e o corte (E, D) que ele determina, já que os dois têm o mesmo comportamento do ponto de vista das operações algébricas e da relação de ordem.

A completude dos números reais

A identificação de $\mathbf{Q}$ com $\varphi(\mathbf{Q})$ completa a construção dos números reais segundo Dedekind. Mas falta verificar um detalhe importante. Vimos no começo de toda essa história que desejávamos que todos os cortes tivessem um elemento de separação; e conseguimos isso postulando a existência desse elemento separador quando o corte não fosse determinado por um número racional. Pois bem, uma vez provado que o conjunto de todos os cortes de números racionais é um corpo ordenado como o dos racionais, será que não podemos repetir a mesma construção anterior? Em outras palavras, não seria o caso de considerar agora o conjunto de todos os cortes de *números reais* e repetir a postulação de que todo corte deve ter elemento separador, ampliando assim, ainda mais, o corpo dos números reais? A resposta é negativa. De fato, o próprio Dedekind provou que todos esses cortes (de números reais) já têm elemento separador; ou seja, não vai mais acontecer o que acontecia antes com os cortes de números racionais, muitos dos quais não tinham elemento separador e davam origem aos números irracionais. Dizemos, pois, que o conjunto dos números reais é um corpo *completo*, justamente porque agora vale o teorema demonstrado pelo próprio Dedekind e que aqui nos limitamos apenas em enunciar.

3.4. Teorema (de Dedekind). *Todo corte de números reais possui um número real como elemento separador.*

Unicidade do corpo dos números reais

Outro teorema importante que se demonstra é que *qualquer corpo ordenado completo é necessariamente isomorfo ao corpo dos números reais.* Isto significa que, a menos de isomorfismo, só existe um corpo ordenado completo. A constatação desse fato é, de certo modo, uma decepção; parece que todo o trabalho de construir o corpo dos números reais a partir dos racionais é inútil. Não seria o caso então de tomarmos como ponto de partida a definição de corpo dos números reais como sendo um corpo ordenado completo, já que este é único (a menos de isomorfirmo)? É exatamente isso que fazem alguns autores, postulando, logo de início, a existência de um corpo ordenado completo, o chamado *corpo dos números reais.*

Mas é claro que a construção dos números reais a partir dos racionais é importante para provar que, de fato, *existe* um corpo ordenado completo. A partir daí não importa mais — pelo menos do ponto de vista teórico — se um número real é um corte ou o supremo (este conceito é introduzido logo a seguir) de um conjunto, do mesmo modo que não importa que símbolo se use para representar um número; o que importa é como ele se comporta como elemento de um corpo ordenado completo, e só.

Supremo e ínfimo de um conjunto

Diz-se que um conjunto C de números reais *é limitado à direita* ou *limitado superiormente* se existe um número K tal que $c \leq K$ para todo $c \in C$. Do mesmo modo, C *é limitado à esquerda* ou *limitado inferiormente* se existe um número k tal que $k \leq c$ para todo $c \in C$. Os números K e k são chamados *cotas* do conjunto C, *superior* e *inferior*, respectivamente. Por exemplo, o conjunto dos números naturais é limitado inferiormente, mas não superiormente, enquanto que o conjunto dos números racionais menores do que 8 é limitado superiormente, mas não inferiormente. O conjunto dos números reais x tais que $x^2 \leq 10$ é limitado, tanto à direita como à esquerda; tal conjunto é o mesmo que o intervalo fechado $[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$, isto é,

$$[-\sqrt{10},\ \sqrt{10}] = \{x \in R\colon\ x^2 \leq 10\} = \{x \in R\colon\ -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}\}.$$

Um conjunto como este último, que é limitado à direita e à esquerda ao mesmo tempo, é dito, simplesmente, *conjunto limitado.* É também limitado qualquer intervalo de extremos finitos a e b.

Quando um conjunto é limitado superiormente, ele pode ter um elemento que seja o maior de todos, o qual é chamado o *máximo* do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números racionais x tais que $x \leq 10$ tem 10 como seu máximo. Já o conjunto

$$A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\} \tag{3.6}$$

não tem máximo, embora seja limitado superiormente. Os elementos desse conjunto, como vemos, são frações dispostas de maneira crescente:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots < \frac{n}{n+1} < \ldots$$

e nenhuma dessas frações é maior do que todas as outras. Pelo contrário, qualquer delas é superada pela que vem logo a seguir, isto é,

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}.$$

Não obstante isso, qualquer elemento do conjunto é menor que o número 1, o qual é, portanto, uma de suas cotas superiores, na verdade, a menor delas. (Veja o Exercício 8 adiante.)

Este último exemplo ilustra uma situação interessante: o conjunto é limitado superiormente, não tem máximo, mas tem cota superior mínima. Isto sugere a definição de *supremo* de um conjunto, mediante uma das seguintes proposições (que são equivalentes, como veremos logo a seguir):

3.5. Definição. *Chama-se supremo de um conjunto C à menor de suas cotas superiores.*

Chama-se supremo de um conjunto C ao número S que satisfaz as duas condições seguintes: a) $c \leq S$ para todo $c \in C$; b) dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ à direita de $S - \varepsilon$, isto é, tal que $S - \varepsilon < c$.

Para vermos que a segunda definição é equivalente à primeira, basta notar que seu item a) nos diz que S é cota superior de C, e o ítem b) está afirmando que não há outra cota menor do que essa; logo, ela é a menor de todas.

Uma pergunta natural que se põe é a de saber se todo conjunto limitado superiormente tem supremo. A resposta, dada no teorema seguinte, expressando a assim chamada *propriedade do supremo*, é afirmativa.

3.6. Teorema. *Todo conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente, possui supremo.*

Demonstração. Seja C o conjunto em questão. Seja E o conjunto de todos os números reais que sejam menores que algum elemento de C, e seja D o conjunto dos números reais restantes.

Da própria definição de E e D, vê-se que (E, D) é um corte em **R**. Pelo Teorema 3.4, esse corte possui elemento de separação, que denotamos por α. Ele é o maior elemento de E ou o menor elemento de D. Mas α não pode pertencer a E, senão ele seria menor do que um elemento $c \in C$, o mesmo sendo verdade de todos os elementos β entre α e c, donde $\beta \in E$; e α não seria o elemento de separação de (E, D) (faça uma representação gráfica, para auxiliar seu raciocínio). Assim, concluímos que α é o menor elemento de D, ou seja, a menor cota superior de C, como queríamos provar.

Nessa demonstração não há como saber se o supremo é ou não o máximo do conjunto C. É claro que se o conjunto possui máximo, este é também o seu supremo. Mas o conjunto pode não ter máximo, como no exemplo dado em (3.6). Outro exemplo de conjunto cujo supremo não é máximo é qualquer intervalo aberto à direita, como

$$[-5,\ 12) = \{x \in R\colon\ -5 \leq x < 12\},$$

que não tem máximo, mas tem 12 como seu supremo.

A parte b) da segunda definição de supremo nos diz que qualquer número à esquerda de S, isto é, $S - \varepsilon$, terá algum elemento c de C à sua direita. Tal elemento c pode ser o próprio S, quando este for o máximo do conjunto. Por exemplo, o conjunto

$$\{2,\ 3,\ 9/2,\ 5,\ 6,\ 13/2,\ 7\}$$

tem supremo 7, que é também seu máximo. Dado $\varepsilon = 1/2$, $S - \varepsilon$ será $13/2$; e o único elemento do conjunto à direita de $13/2$ é o próprio 7.

A noção de *ínfimo* é introduzida de maneira análoga à de supremo.

3.7. Definição. *Chama-se ínfimo de um conjunto C à maior de suas cotas inferiores*; ou ainda

Chama-se ínfimo de um conjunto C ao número s que satisfaz as duas condições seguintes; a) $s \leq c$ para todo $c \in C$; b) dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ à esquerda de $s + \varepsilon$, isto é, tal que $c < s + \varepsilon$.

Com a propriedade do supremo prova-se que *todo conjunto não-vazio de números reais, que seja limitado inferiormente, possui ínfimo.* (Veja o Exercício 10 adiante.)

Conjuntos não limitados à direita certamente não possuem supremos finitos. Convenciona-se considerar $+\infty$ como o supremo desses conjuntos. Analogamente, $-\infty$ é considerado o ínfimo dos conjuntos não limitados inferiormente.

Observe que se nos ativermos ao conjunto dos números racionais, então não será verdade que todo conjunto limitado superiormente tenha supremo ou que todo conjunto limitado inferiormente tenha ínfimo. Já vimos isso com o exemplo clássico de $\sqrt{2}$ nos Exercícios 5 e 6 da p. 55.

Observe também que agora, com a propriedade do supremo, podemos demonstrar que o número 2 possui raiz quadrada (Exercício 13 adiante). Lembre-se do que foi dito na p. 26: a demonstração que lá fizemos foi apenas uma demonstração de que não existe número racional cujo quadrado seja 2. Mais do que isso, podemos agora provar que qualquer número positivo possui raiz n-ésima (Exercício 14 adiante).

Exercícios

1. Dado um corte $(E,\ D)$, prove que se $e \in E$ e $x < e$, então $x \in E$; e que se $d \in D$ e $y > d$, então $y \in D$. Isso significa que E é uma semi-reta que se estende para $-\infty$ e que D uma semi-reta estendendo-se para $+\infty$.
2. Seja r um número racional. Prove que o conjunto E dos números racionais menores do que r não tem máximo; e que o conjunto D dos números racionais maiores do que r não tem mínimo.

3. Dados dois números reais quaisquer, α e β, prove a chamada *lei da tricotomia*, que diz: ou $\alpha < \beta$, ou $\alpha = \beta$ ou $\alpha > \beta$.
4. Prove que entre dois números reais distintos há uma infinidade de números racionais.
5. Prove que entre dois números reais distintos há uma infinidade de números irracionais.
6. Dados três números reais α, β e γ, prove que $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.
7. Dado um número real $\alpha = (E,\ D)$, defina o oposto $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.
8. Prove que o número 1 é efetivamente o supremo do conjunto definido em (3.6).
9. Considere o conjunto $\{1/m - 1/n :\ m,\ n \in \mathbb{N}\}$. Prove que -1 e 1 são o ínfimo e o supremo desse conjunto, respectivamente, e que eles não pertencem ao conjunto.
10. Prove que todo conjunto não-vazio de números reais, limitado inferiormente, tem ínfimo.
11. Prove que $a > 1 \Rightarrow a^n > a$ para todo inteiro $n > 1$.
12. Prove que $0 < a < 1 \Rightarrow a^n < a$ para todo inteiro $n > 1$.
13. Use a propriedade do supremo para provar que 2 possui raiz quadrada positiva.
14. Generalize o exercício anterior, isto é, use a propriedade do supremo para provar a existência da raiz n-ésima positiva de qualquer número $a > 0$, $a \neq 1$.
15. Sejam A e B conjuntos numéricos não vazios. Prove que
$$A \subset B \Rightarrow \inf A \geq \inf B \quad \text{e} \quad \sup A \leq \sup B.$$
16. Sejam A e B dois conjuntos numéricos não vazios, tais que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Prove que $\sup A \leq \inf B$. Com a mesma hipótese, prove ainda que $\sup A = \inf B \Leftrightarrow$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \varepsilon$.
17. Sejam A e B dois conjuntos numéricos não vazios, limitados inferiormente, e r um número tal que $r \leq a+b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Prove que $r \leq \inf A + \inf B$. Enuncie e demonstre resultado análogo para os supremos.
18. Dados dois conjuntos numéricos limitados A e B, definimos o conjunto $A + B = \{a + b\colon\ a \in A,\ b \in B\}$. Prove que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
19. Dado um conjunto numérico limitado A, e um número real qualquer α, definimos o conjunto $\alpha A = \{\alpha a\colon\ a \in A\}$. Mostre então que $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$, $\inf(\alpha A) = \alpha \inf A$ se $\alpha \geq 0$; e $\sup(\alpha A) = \alpha \inf A$ se $\alpha < 0$. Em particular, $\sup(-A) = -\inf A$, ou ainda, $\sup A = -\inf(-A)$.