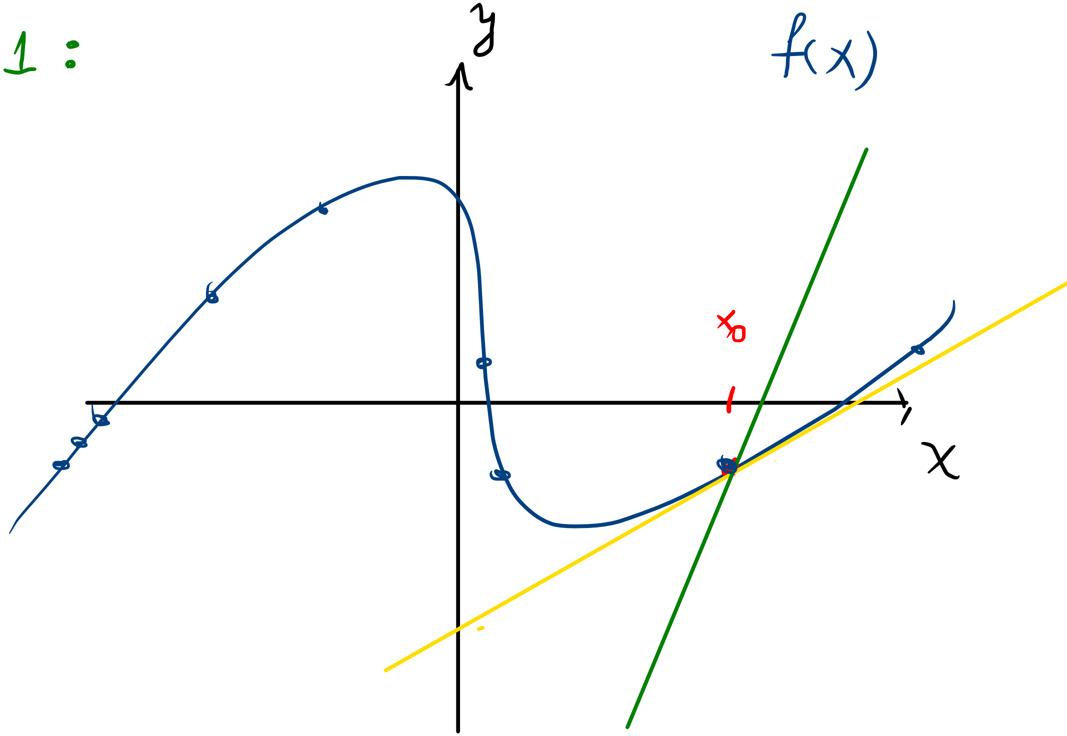
Monitoria - 05/07

Capítulo 16 - Polinômio de Taylor

Objetivo: Aproximar funções complicadas por polinômios.

- Achar a melhor aproximação possível por um polinômio de ordem até $k > 0$.

Ordem 1 :



$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0 \qquad \left(T'(x_0) = f'(x_0) \right)$$

Qual é o erro cometido na aproximação?

$$E(x) = f(x) - T(x)$$

$$E(x) = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right) =$$

$$= \left(f(x) - f(x_0) \right) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de x_0.

$$\boxed{P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Como estimar o erro?

Teorema. Seja f derivável até a 2.ª ordem no intervalo I e sejam x, $x_0 \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2}_{E(x)}.$$

$$E(x) = f(x) - P_1(x)$$

Exercícios (16.1)

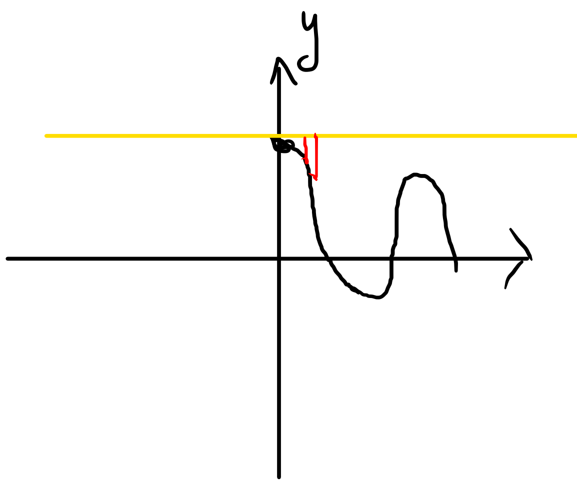
1. Calcule o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta de x_0 dado.

e) $f(x) = \cos 3x, x_0 = 0$

$$\underbrace{\quad}_{f(0)} \qquad \underbrace{\quad}_{f'(0)}$$

$$P_1(x) = \cos(0) - 3\,\text{sen}(0) \cdot (x - 0)$$

$$P_1(x) = 1$$



2. Calcule um valor aproximado e avalie o erro.

c) sen 0,02

$f(x) = \text{sen}(x)$, $f'(x) = \cos(x)$

$\cos(x)$

0,02 está próximo de 0.

- $P_1(x) = \text{sen}(0) + \cos(0) \cdot (x - 0) = x$

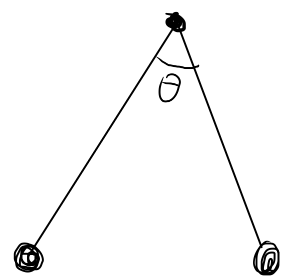
- $P_1(0{,}02) = 0{,}02$

Teor: Dado $x = 0{,}02$, existe $\bar{x}$ entre 0 e 0,02 tq

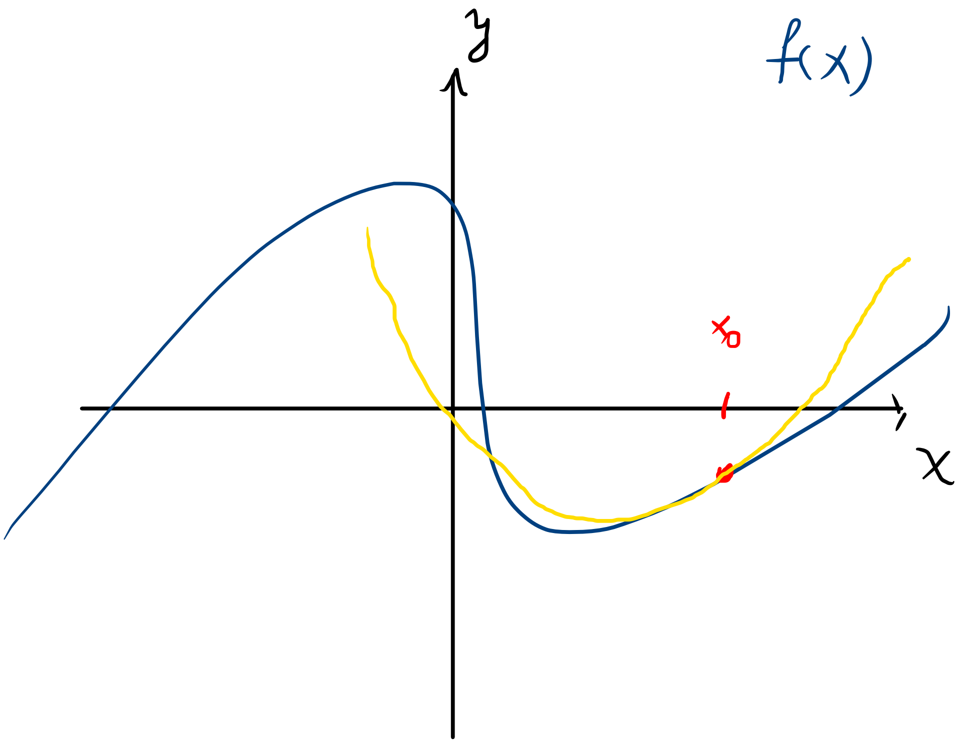
$$E(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2} (x - x_0)^2$$

$$E(\underset{\substack{\wr \\ 0{,}02}}{x}) = -\frac{\operatorname{sen}(\bar{x})}{2}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^2$$

$$\left|E(\underset{\substack{\wr \\ 0{,}02}}{x})\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}(\bar{x})}{2}\cdot\frac{4}{10^4}\right| \leq \left|\frac{2}{10^4}\right| = \frac{1}{5000}$$



Ordem 2: A aproximação melhora quando podemos aproximar também por parábolas.



O polinômio de Taylor de ordem 2 tem as duas primeiras derivadas iguais às de f

$$\boxed{P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}$$

$P_2'(x_0) = f'(x_0)$

$P_2''(x_0) = f''(x_0)$

$E(x) = f(x) - P_2(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

Como estimar o erro?

Teorema. Seja f derivável até a 3.ª ordem no intervalo I e sejam x_0, x em I. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ entre x e x_0 tal que

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}}_{P_2(x)}(x - x_0)^2 + \underbrace{\frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3}_{E_2(x)}$$

Exercícios (16.2)

1. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 2, de f em volta de x_0 dado.

$a)\ f(x) = \ln(1+x)$ e $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$P_2(x) = 0 + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$$

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

2. Utilizando polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

$$\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

b) $\sqrt{4{,}1}$

$$f(x) = \sqrt{x}\ , \quad x_0 = 4\ ; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ ; \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$P_2(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2$$

$$\boxed{P_2(x) = 2 + 2(x-4) - \frac{1}{4\cdot 8\cdot 2}(x-4)^2}$$

$$E(x) = \frac{f'''(\bar{x}) \cdot (x - x_0)^3}{3!}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

$$E(4{,}1) = \frac{f'''(\bar{x})}{10^3 \cdot 6} \cdot$$

$$\bar{x} \in [4 , 4{,}1]$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{4{,}1^5}} < f'''(\bar{x}) < \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^5}}$$

$$E(4,1) \leq \frac{1}{6 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{32} \leq \frac{1}{192000}$$

Polinômio de Taylor de Ordem n (16.3)

Seja f derivável até a ordem n no intervalo I e seja $x_0 \in I$. O polinômio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

denomina-se *polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de* x_0.

$P(x)$ tem as "n" primeiras derivadas iguais a f em x_0.

Teorema. (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.) Seja f derivável até a ordem $n+1$ no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{E(x)}$$

onde

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$\vdots$

$P_n(x)$

EXEMPLO 6. Mostre que $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ em que $a > 0$ é um real fixo.

Tome $\underline{N > 0}$ tq $\frac{a}{N} < \frac{1}{2}$.

$\frac{a}{N+1} < \frac{1}{2}$ $\dots$ $\frac{a}{N+p} < \frac{1}{2}$

$\frac{a}{N+2} < \frac{1}{2}$ $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{a^p}{(N+1)\dots(N+p)} < \left(\frac{1}{2}\right)^p$$ (Multiplicar as inequações)

Agora, multiplico tudo por $\frac{a^N}{N!}$:

$$\frac{a^{N+p}}{(N+p)!} < \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \frac{a^N}{N!}$$

Fazemos a mudança $n = N+p$

$$\frac{a^n}{n!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \cdot \frac{a^N}{N!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \frac{a^N}{N!}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\overset{0}{n-N}} = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

$a \cdot a \cdot a \cdots a$

$n \cdots 3 \cdot 2 \cdot \underline{1}$

Exercicios (16.3)

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em volta de x_0 dado.

$a)\ f(x) = \text{sen}\, x$ e $x_0 = 0$

$$f'(x) = \overset{1}{\cos(x)}, \quad f''(x) = \overset{0}{-\text{sen}(x)}, \quad f'''(x) = \overset{-1}{-\cos(x)}$$

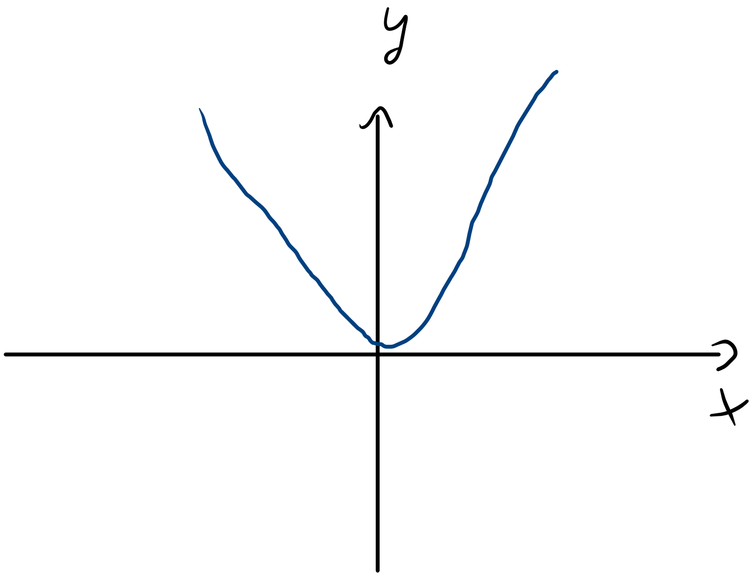
$$f^{(4)}(x) = \overset{0}{\text{sen}(x)}, \quad f^{(5)}(x) = \overset{1}{\cos(x)}$$

$$P_5(x) = \cancel{\overset{0}{f(0)}} + f'(0).(x-0) + \cancel{\frac{\overset{0}{f''(0)}}{2!}(x-0)^2} +$$

$$+ \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \cancel{\frac{f^{(4)}(0)}{4!}\overset{0}{(x-0)^4}} + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5$$

$$\boxed{P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}$$

$$P_6(x) = P_5(x)$$



2. Sejam n um natural ímpar e $f(x) = \text{sen}\, x$. Mostre que, para todo x,

$$\left| \text{sen}\, x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$$

$$n = 1 \leadsto \frac{(n-1)}{2} = 0$$

$$n = 3 \leadsto \frac{(n-1)}{2} = 1$$

$$n = 5 \leadsto \frac{(n-1)}{2} = 2$$

$$n = 7 \leadsto \frac{(n-1)}{2} = 3$$

$$\vdots$$

Exercício: Encontre k tal que $\text{sen}(1)$ pode ser aproximado com erro menor que 10^{-15}.

3. Avalie sen 1 com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}. (*Sugestão*: utilize o Exercício 2.) (Usando apenas as operações básicas)

4. Mostre que, para todo x,

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n \to +\infty} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

ou

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$