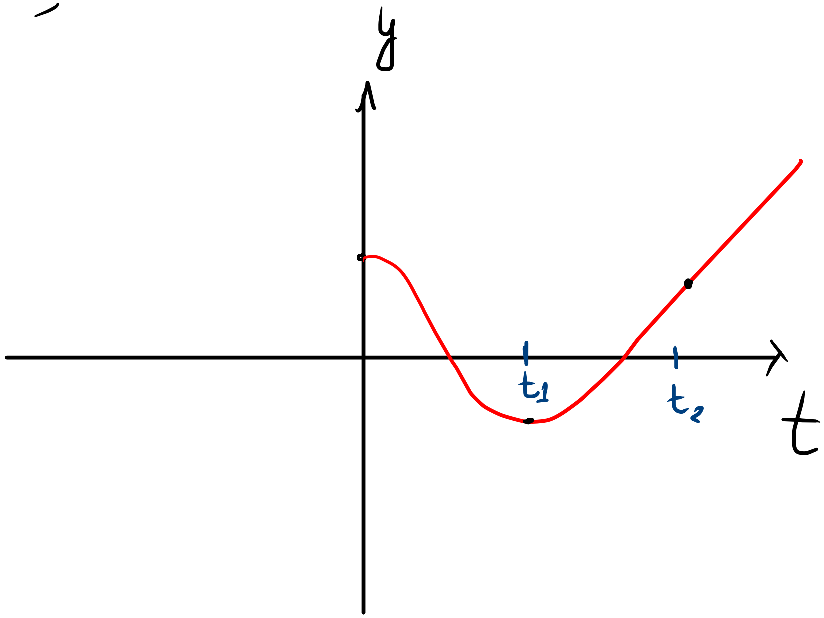
Monitoria 21/06

- Provinha 1: 21 de junho - 26 de junho
  - Até 6 pessoas.
  - Formato pdf

Seção 7.15 - Velocidade e aceleração. Taxa de variação.

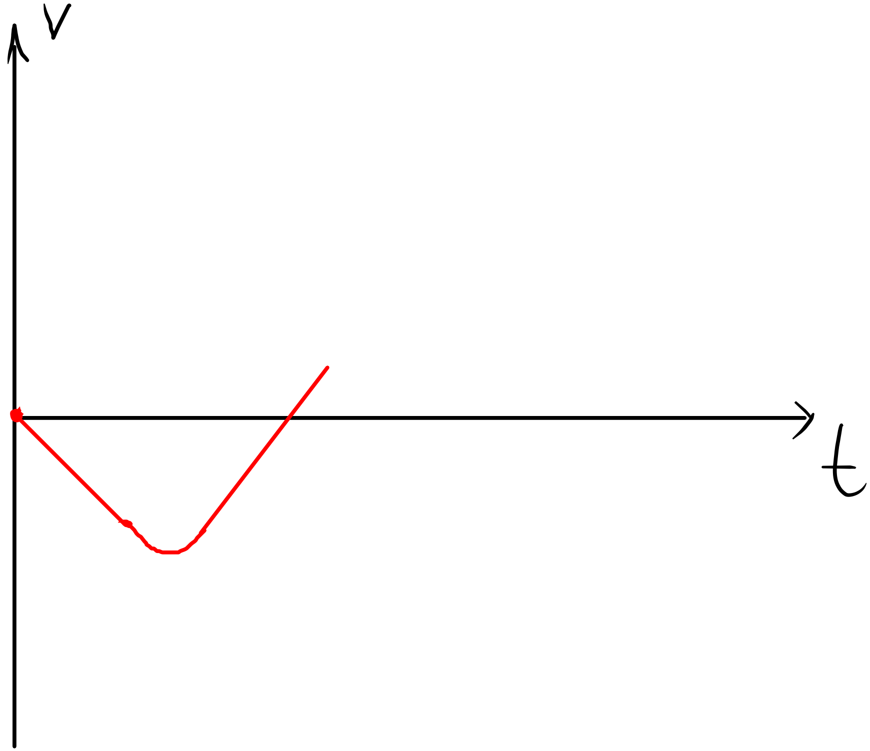
Suponha que uma partícula se mova ao longo de uma reta com função de posição $y = f(t)$, $t \geq 0$.



$$v(t) = \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

↳ Velocidade instantânea.



$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

↳ aceleração instantânea

Dada uma função $y=f(x)$, a razão $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ é a taxa média de variação de f entre x e $(x+\Delta x)$.

A derivada $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ é a taxa de variação de f em x (a taxa de variação de y com relação a x).

Seção 7.15 - exercícios

1. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com função de posição $x = 3 + 2t - t^2$, $t \geq 0$.

   a) Qual a velocidade no instante t?

   b) Qual a aceleração no instante t?

   c) Estude a variação do sinal de $v(t)$.

   d) Esboce o gráfico da função de posição.

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$\dfrac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}$

a) $\dfrac{dx}{dt} = 2 - 2t = v(t)$

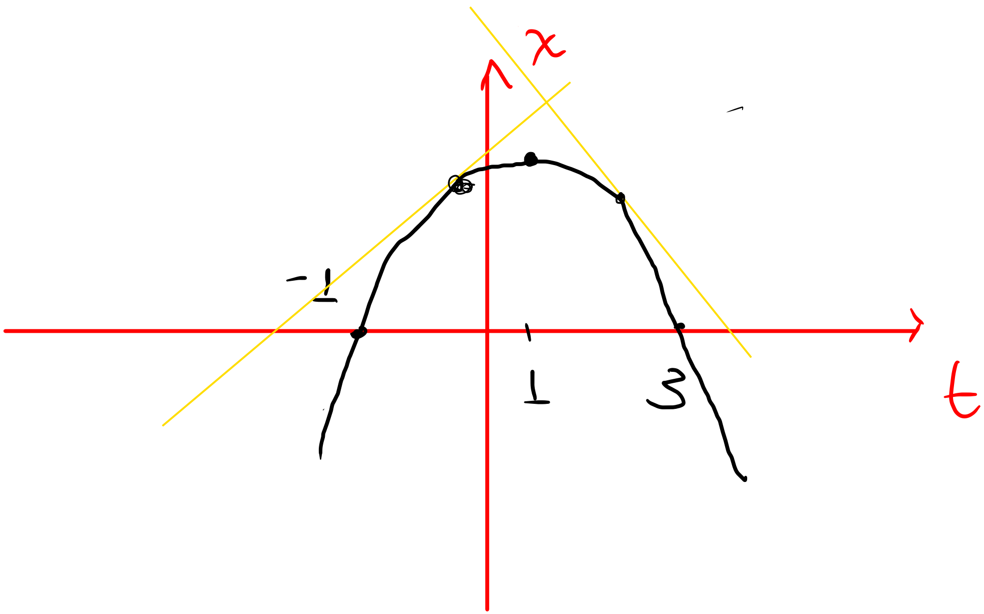
b) $\dfrac{dv}{dt} = -2 = a(t)$

c) $v(t) = 2 - 2t$

$v(t) \geq 0$ se $t \leq 1$

$v(t) < 0$ se $t > 1$

d)



10. A equação do movimento de uma partícula que se desloca ao longo do eixo x é $x = e^{-t}\,\text{sen}\, t$, $t \geq 0$.

a) Determine a velocidade e a aceleração no instante t.

b) Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t}\,\text{sen}\, t$.

c) Esboce o gráfico da função.

d) Interprete tal movimento.

$$x = e^{-t}\,\text{sen}(t)$$

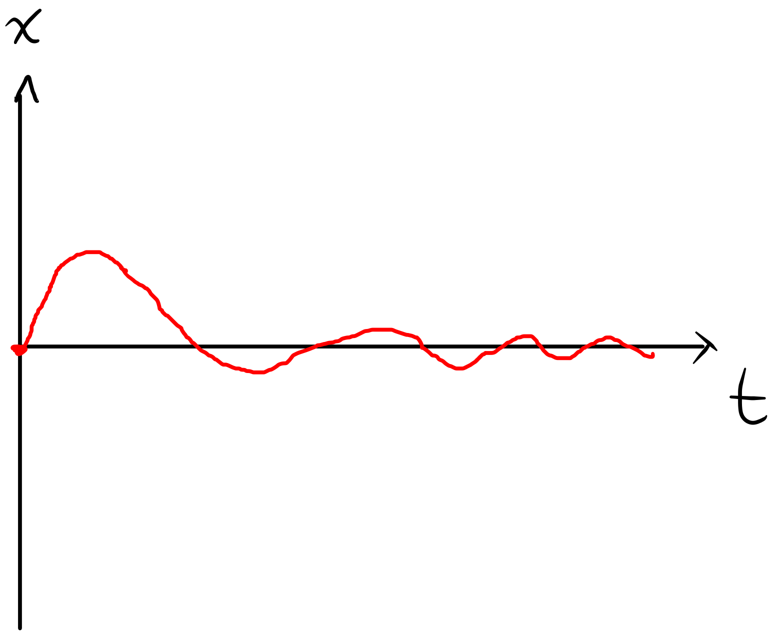
a) $$v(t) = \frac{dx}{dt} = -e^{-t}\,\text{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = e^{-t}\,\cancel{\text{sen}}(t) - e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\,\cancel{\text{sen}}(t) = -2e^{-t}\cos(t)$$

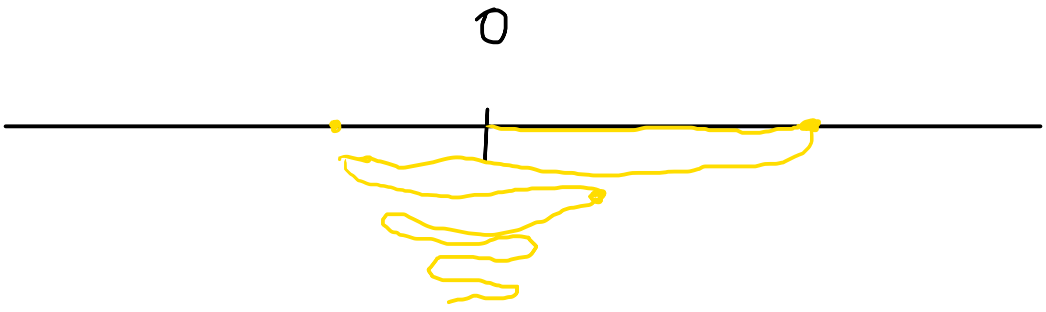
b) $\lim\limits_{t \to +\infty} \underbrace{e^{-t}}_{\to 0} \, \underbrace{\text{sen}(t)}_{\text{limitada}} = 0$

$x(t) = e^{-t}\,\text{sen}(t)$

c)

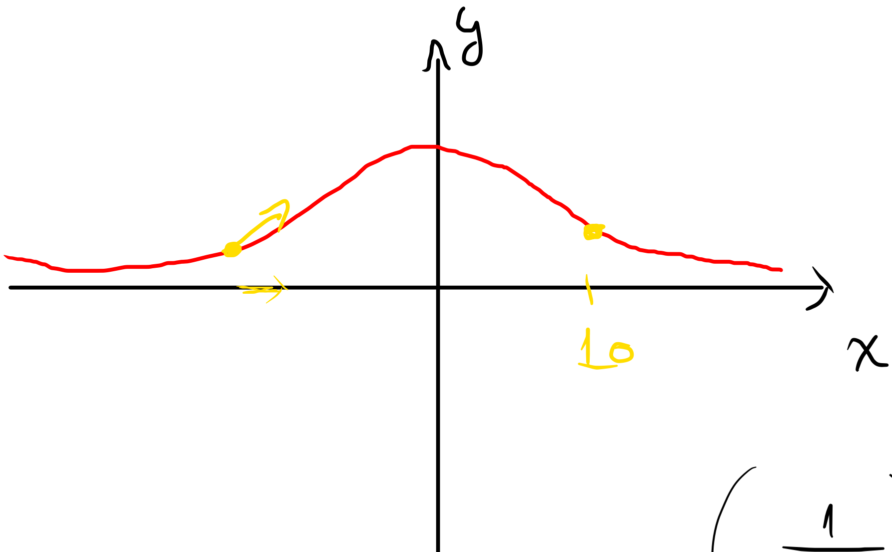


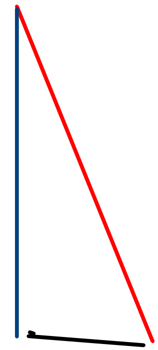
d)



Movimento de mola com atrito.

12. Um ponto P move-se ao longo do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ de tal modo que a sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 5 (m/s). Qual a velocidade de y no instante em que $x = 10$ m?





$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{x^2(t)+1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right) \cdot \frac{dx}{dt} \quad (*)$$

Vamos supor que em t_0, $x(t_0) = 10$.

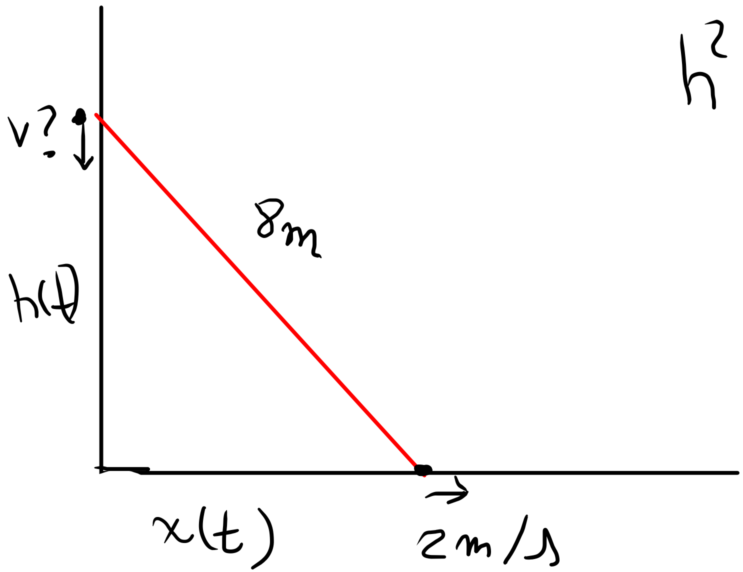
Queremos $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}$.

$(*)$ em $t = t_0$:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = \left(\frac{-2x(t_0)}{(x^2(t_0)+1)^2}\right) \cdot \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = \left(\frac{-20}{(101)^2}\right)\cdot 5 = -\frac{100}{(101)^2} \quad m/s}$$

16. Uma escada de 8 m está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 (m/s), com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 m da parede?



$$h^2(t) + x^2(t) = 64$$

$$h(t) = \sqrt{64 - x^2(t)}$$

Se t_0 for tal que $x(t_0) = 3$,

queremos $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{t=t_0}$

$$h(t) = \sqrt{64 - x^2(t)}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{64 - x^2(t)}} \cdot \left(-2x(t)\right) \cdot \frac{dx}{dt}$$

Em $t = t_0$:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{1}{2\sqrt{55}} \cdot (-6) \cdot \left.\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{2}\right|_{t=t_0}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0} = -\frac{6}{\sqrt{55}} \ m/s$$

20. Um ponto P move-se sobre a parábola $y^2 = x$, $x > 0$ e $y > 0$. A abscissa x está variando com uma aceleração que, em cada instante, é o dobro do quadrado da velocidade da ordenada y. Mostre que a ordenada está variando com aceleração nula.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad (*)$$

derivar
x duas vezes
(a(t))

$$y^2 = x \Rightarrow 2y\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

Derivando novamente:

$$\underbrace{2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}}_{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} + 2y\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$(*) = \frac{d^2x}{dt^2} + 2y\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore\ 2y\underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{\text{aceleração de } y} = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \forall t}$$

Exercícios 7.16

15. Sabe-se que r é uma reta tangente aos gráficos de $f(x) = -x^2$ e de $g(x) = \frac{1}{2} + x^2$. Determine r.

12. Determine todos os pontos (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tais que por (a, b) passem duas retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$.

10 - Sabe-se que r é uma reta que passa pelo ponto (0, 2) e que é tangente ao
~~[illegible]0.~~ gráfico de $f(x) = x^3$. Determine r.