Monitoria - 02/06

4. Considere a função $y = xt^3$, na qual $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2}$ sabendo que $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 3$ e que $x(2) = 1$ (isto é, $x = 1$ para $t = 2$).

$$y = x \cdot t^3$$

$$\frac{dy}{dt}^{(t)} = \frac{dx}{dt}^{(t)} \cdot t^3 + x^{(t)} \cdot (3t^2)$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2} = \underbrace{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2}}_{3} \cdot (2)^3 + x(2) \cdot (3 \cdot 4)$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2} = 24 + 12 = 36.$$

7. Seja $y = \dfrac{-2}{x^2 + k}$, k constante. Verifique que $\dfrac{dy}{dx} - xy^2 = 0$. ✓

$f'(x)$

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{0 - 2x \cdot (-2)}{(x^2+k)^2} = \frac{+4x}{(x^2+k)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} - x\,y^2 = \frac{4x}{(x^2+k)^2} - x \cdot \left(\frac{-2}{x^2+k}\right)^2 = 0 \ \checkmark$$

7.10 (Regra da Cadeia)

Sejam $y=f(x)$ e $x=g(t)$ deriváveis com $Im(g) \subseteq D_f$. A composta $h(t)=f(g(t))$, $t \in D_g$, é derivável e vale $h'(t)=f'(g(t)) \cdot g'(t)$, $\forall t \in D_g$.

Notação Leibniz:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=g(t_0)} \cdot \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$$

7.11: Aplicações da Regra da Cadeia

Ex 1: Determine a derivada

e) $y = \operatorname{sen} t^3$

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) = \operatorname{sen}(x) \\ x &= g(t) = t^3 \end{aligned}\right\} \quad h(t) = f(g(t)) = \operatorname{sen}(t^3)$$

$$h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \cos(g(t)) \cdot 3t^2 =$$

$$= \cos(t^3) \cdot (3t^2)$$

$f'(x) = \cos(x)$

$g'(t) = 3t^2$

Not. Leibiniz

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(x) \cdot 3t^2 = 3t^2 \cdot \cos(t^3)$$

i) $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)^3$

$$\frac{dy}{dt} = 3(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^2 \cdot (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))$$

n) $x = \ln(t^2 + 3t + 9)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(t^2+3t+9)} \cdot (2t+3)$$

EXEMPLO 5. Suponha g derivável. Verifique que

$a)$ $[e^{g(x)}]' = e^{g(x)}\, g'(x)$.

$b)$ $[\ln g\,(x)]' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

$c)$ $[\cos g\,(x)]' = -g'(x) \operatorname{sen} g\,(x)$.

$d)$ $[\operatorname{sen} g\,(x)]' = g'(x) \cos g\,(x)$.

EXEMPLO 10. Seja g derivável e $n \neq 0$ inteiro. Verifique que

$a)$ $[(g\,(x))^n]' = n\,(g\,(x))^{n-1}\, g'(x)$.

$b)$ $[(g\,(x))^{1/n}]' = \dfrac{1}{n}\,(g\,(x))^{\frac{1}{n}-1}\, g'(x)$ $(n \geqslant 2)$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja $g(t) = f(t^2 + 1)$. Supondo $f'(2) = 5$, calcule $g'(1)$.

$$g'(t) = f'(t^2+1) \cdot 2t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{g'(1) = f'(2) \cdot 2 = 10}$$

4. Derive.

e^{x} , $x = -2t$ $\qquad$ $sen(x)$, $x = 3t$

d) $y = e^{-2t}$ sen $3t$

$$\frac{dy}{dt} = (e^{-2t})' \cdot sen(3t) + e^{-2t} \cdot (sen(3t))' =$$

$$= (e^{-2t} \cdot (-2)) \cdot sen(3t) + e^{-2t}(cos(3t) \cdot 3)$$

$$= e^{-2t}(3cos(3t) - 2 sen(3t))$$

e^{z} , $z = \sqrt{x}$

o) $y = \sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+e^{\sqrt{x}}}} \cdot (x^2 + e^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+e^{\sqrt{x}}}} \cdot \left(2x + \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot 1}{2\sqrt{x}}\right)$$

6. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja f dada por $f(x) = x\, g(x^2)$.
Verifique que

$$f'(x) = g(x^2) + 2x^2\, g'(x^2).$$

$$f'(x) = 1 \cdot g(x^2) + x \cdot (g(x^2))' =$$

$$= g(x^2) + x \cdot (g'(x^2) \cdot 2x) = g(x^2) + 2x^2 \cdot g'(x^2).$$

25. Seja $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, em que $x = x(t)$ é uma função definida e derivável em $\mathbb{R}$. Verifique que, para todo t real,

$$\frac{dy}{dt} = -2xy^2 \, \frac{dx}{dt}.$$

7.12: Derivada de $f(x)^{g(x)}$

Sejam f, g definidas em A, com $f(x)>0$ para todo $x \in A$.

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{\overbrace{g(x)\ln(f(x))}^{z}}$$

$$e^{\ln(k)} = k$$

$$\boxed{h'(x) = e^{g(x)\ln(f(x))} \cdot \left(g(x)\ln(f(x))\right)'}$$

$$e^{g(x)\ln(f(x))} \to f(x)^{g(x)}$$

Exercícios:

1. Calcule a derivada.

b) $y = 2^{x^2} + 3^{2x}$

$$y = e^{\ln(2^{x^2})} + e^{\ln(3^{2x})} = e^{x^2 \ln(2)} + e^{2x \ln(3)}$$

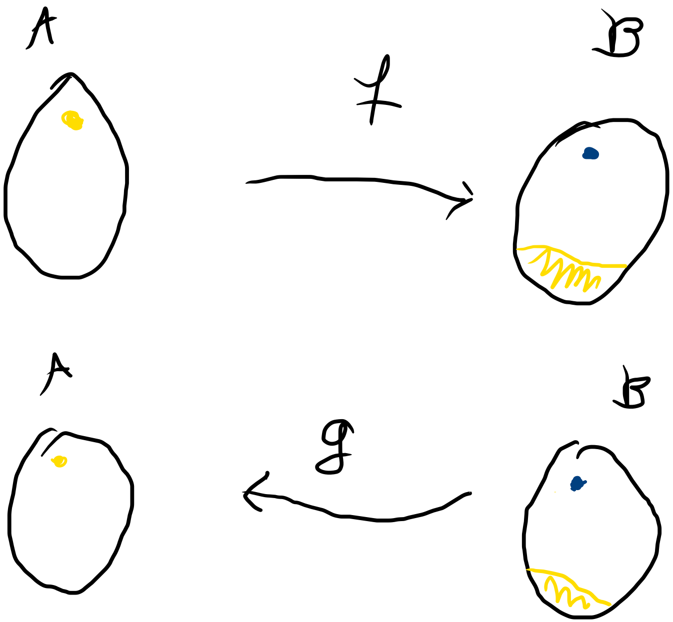
$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2 \ln(2)} \cdot 2x \ln(2) + e^{2x\ln(3)} \cdot 2 \ln(3) =$$

$$= 2^{x^2} \cdot 2x \ln(2) + 3^{2x} \cdot 2 \ln(3)$$

p) $y = x^{\pi} + \pi^{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \pi \cdot x^{\pi-1} + \left(e^{x\ln(\pi)}\right)' = \pi \cdot x^{\pi-1} + \pi^{x} \cdot \ln(\pi)$$

8.1 - Funções Inversas



f injetora e sobrejetora.

Observamos que se f for estritamente crescente ou estritamente decrescente, então f será injetora.

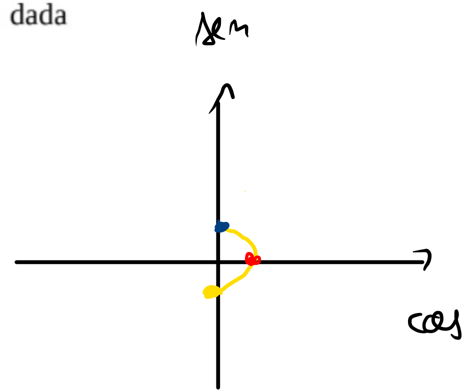
$$x \neq y \ (x < y \ \text{ou} \ y < x) \Rightarrow (f(x) < f(y) \ \text{ou} \ f(y) < f(x))$$

$f(0) = f(2\pi)$

EXEMPLO 3. (*Função arco-seno*). A função $f(x) = \text{sen}\ x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é estritamente crescente, portanto inversível, e sua imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. A inversa de f é a função $g(x) = \text{arc sen}\ x$ (leia: arco-seno x), $x \in [-1, 1]$, dada por

$$\text{arc sen}\ x = y \Leftrightarrow \text{sen}\ y = x$$

com $x \in [-1, 1]$ e $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



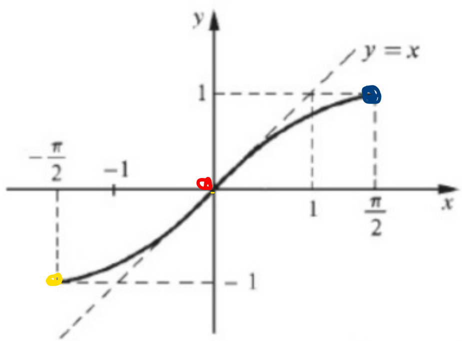
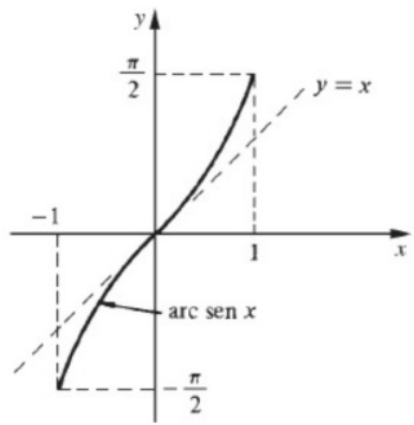


Gráfico de $f(x) = \text{sen}\ x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

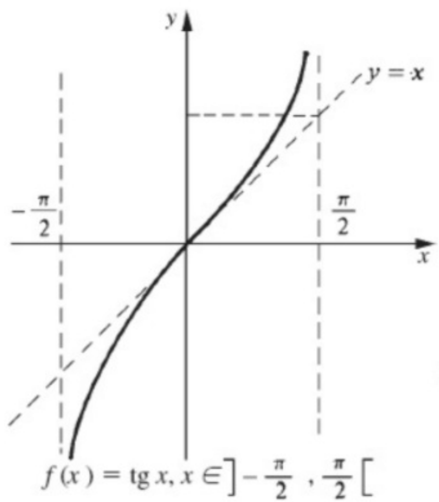


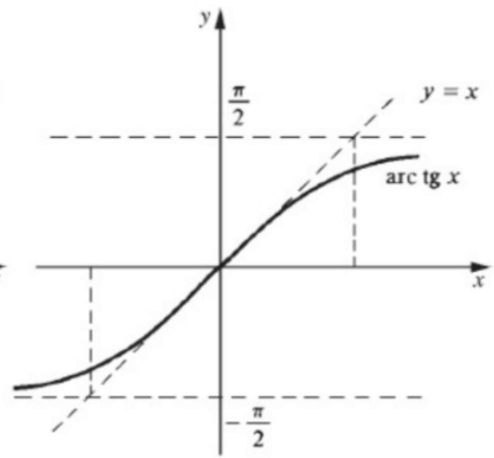
■

EXEMPLO 4. (*Função arco-tangente*). A função $f(x) = \text{tg } x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, é estritamente crescente, portanto inversível, e sua imagem é $\mathbb{R}$. Sua inversa é a função $g(x) = \text{arc tg } x$, $x \in \mathbb{R}$, dada por

$$\text{arc tg } x = y \Leftrightarrow \text{tg } y = x$$

em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.





■

Exercícios

3. Calcule

y

b) $\cos\left(\underbrace{\text{arc sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(y) \geq 0$

$$\text{sen}(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 = \text{sen}^2(y) + \cos^2(y) = \frac{3}{4} + \cos^2(y)$$

$$\cos^2(y) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos(y) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos(y) = \frac{1}{2}}$$

d) sec (arc tg 1)

g) $\text{arc sen}\left(\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$ (Cuidado!)

8.2: Derivada da função inversa

Seja f uma função inversível, com inversa g; assim,

$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \in D_g.$$

$$(f(g(x)))' = (x)'$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Exemplo: Derivada de arcsen

$g(x) = \arcsin(x)$

$y = \arcsin(x)$

$f(x) = \sin(x)$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin(x)}_{y})} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin(y) = x$

$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \Rightarrow \cos^2(y) = 1 - x^2$

$\cos(y) = \sqrt{1-x^2}$

Vejamos como fica a fórmula de derivação de função inversa na notação de Leibniz. Seja $y = g(x)$ a inversa da função dada por $x = f(y)$ (observe que sendo g a inversa de f, temos: $y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y)$). Então,

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ou

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

em que $\frac{dx}{dy}\left(\frac{dx}{dy} = f'(y)\right)$ deve ser calculado em $y = g(x)$.

Exercícios

1. Determine a derivada.

f) $y = \text{arc sen } e^x$