Monitoria - 26/05

Cap 7 - Derivadas

Definição. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

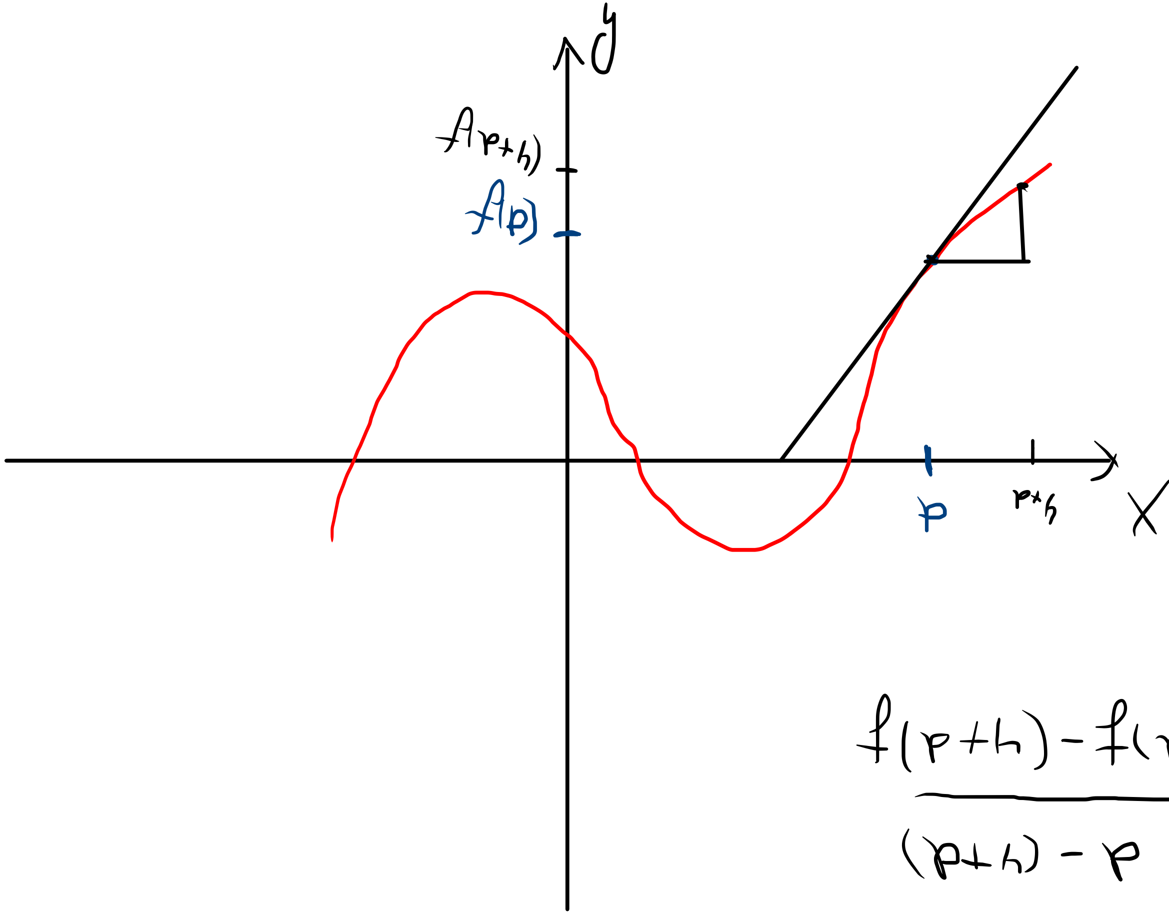
quando existe e é finito, denomina-se *derivada* de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é *derivável* ou *diferenciável* em p.

Obs: Também podemos escrever que

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$



$$\frac{f(p+h)-f(p)}{(p+h)-p}$$

(3.3)

6.

Prove que existe $\delta > 0$ tq

$$1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow 2-\frac{1}{3} < x^2 + x < 2+\frac{1}{3} \quad (*)$$

Solução:

$\lim_{x \to p} f(x) = L$ se $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$

$$\overset{1}{p} - \delta < x < \overset{1}{p} + \delta \Rightarrow \underset{2}{L} - \underset{1/3}{\epsilon} < f(x) < \underset{2}{L} + \underset{1/3}{\epsilon}$$

$(x \neq p)$

$0 < |x-p| < \delta$

Precisamos mostrar que

$$\lim_{x\to 1} (x^2+x) \overset{?}{=} 2 \quad ✓$$

ou seja, se $\epsilon = \frac{1}{3}$, existe $\delta > 0$

tq vale $(\ast)$

Pergunta:

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) \Rightarrow f \text{ é contínua em } p?$$

Não é verdade.

função contínua em p:

- $p \in dom(f)$ (i.e., $f(p)$ existe)
- $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0 \neq f(0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

Dada $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; $x - 1$ $x - 2$

$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$. f é contínua em 1?

Sol: f não está definida em 1. Logo, não é contínua

$$f(x) = \begin{cases} \quad , & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$$

Ex 6.3

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2} = e$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2} = \overset{\nearrow e}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} \cdot \overset{1}{\left(1+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}}\right)^{2}}$$

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{(x+1)}} = \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{(x^2-x+1)}{1}} = \sqrt[3]{3}$$

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x-3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3^2}$$

$$(x-3) = \left(\sqrt[3]{x-3}\right)^3$$

$$(x-3) = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}\right)\left(x^{2/3} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{3} + 3^{2/3}\right)$$

$$u(x) = x^3 \longrightarrow \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0} = 3x_0^2$$

$$x(t) = 2t^2 + 1 \longrightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 4t_0$$

$$x(1) = 3$$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1}$$

$$u_0(x(t)) = (2t^2+1)^3 = u(t)$$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x(t_0)=x_0} \cdot \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}$$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{3} \cdot \left.\frac{dx}{dt}\right|_{1} = 27 \cdot 4 = 108$$

$$e = \boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}}$$

Exercícios (7.2)

2. Seja $f(x) = 2x$. Pensando geometricamente, qual o valor que você espera para $f'(p)$? Calcule $f'(p)$.

4. Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo dados

$a) \, f(x) = x^2 + x \text{ e } p = 1$

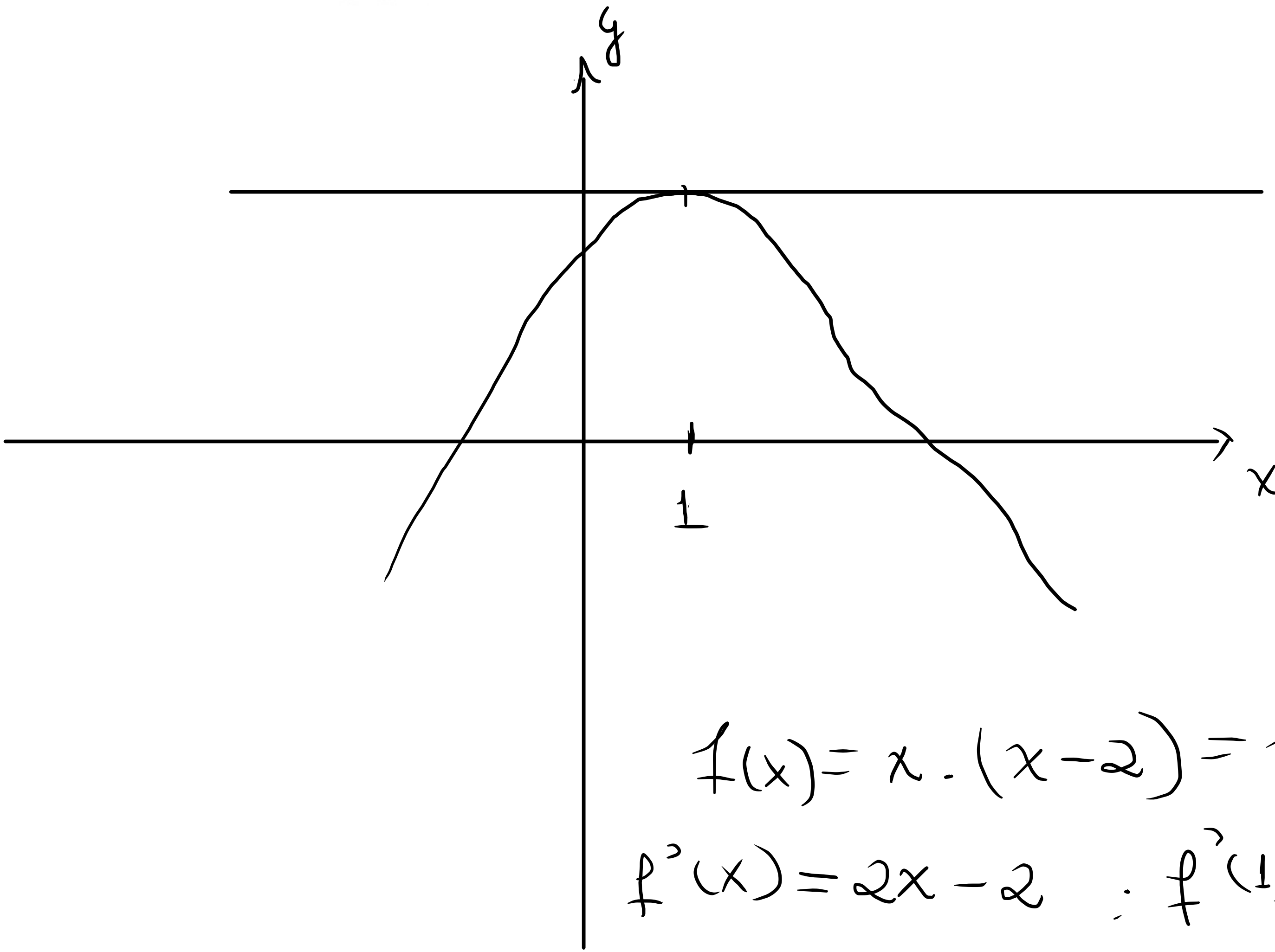
e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 3$

6. Calcule $f'(x)$, pela definição.

f) $f(x) = 10$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

7. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1) = 0$.



$f(x) = x \cdot (x-2) = x^2 - 2x$

$f'(x) = 2x - 2 \quad \therefore f'(1) = 0$

14. Mostre que a função

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x < 1 \\ -x+4 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de g.

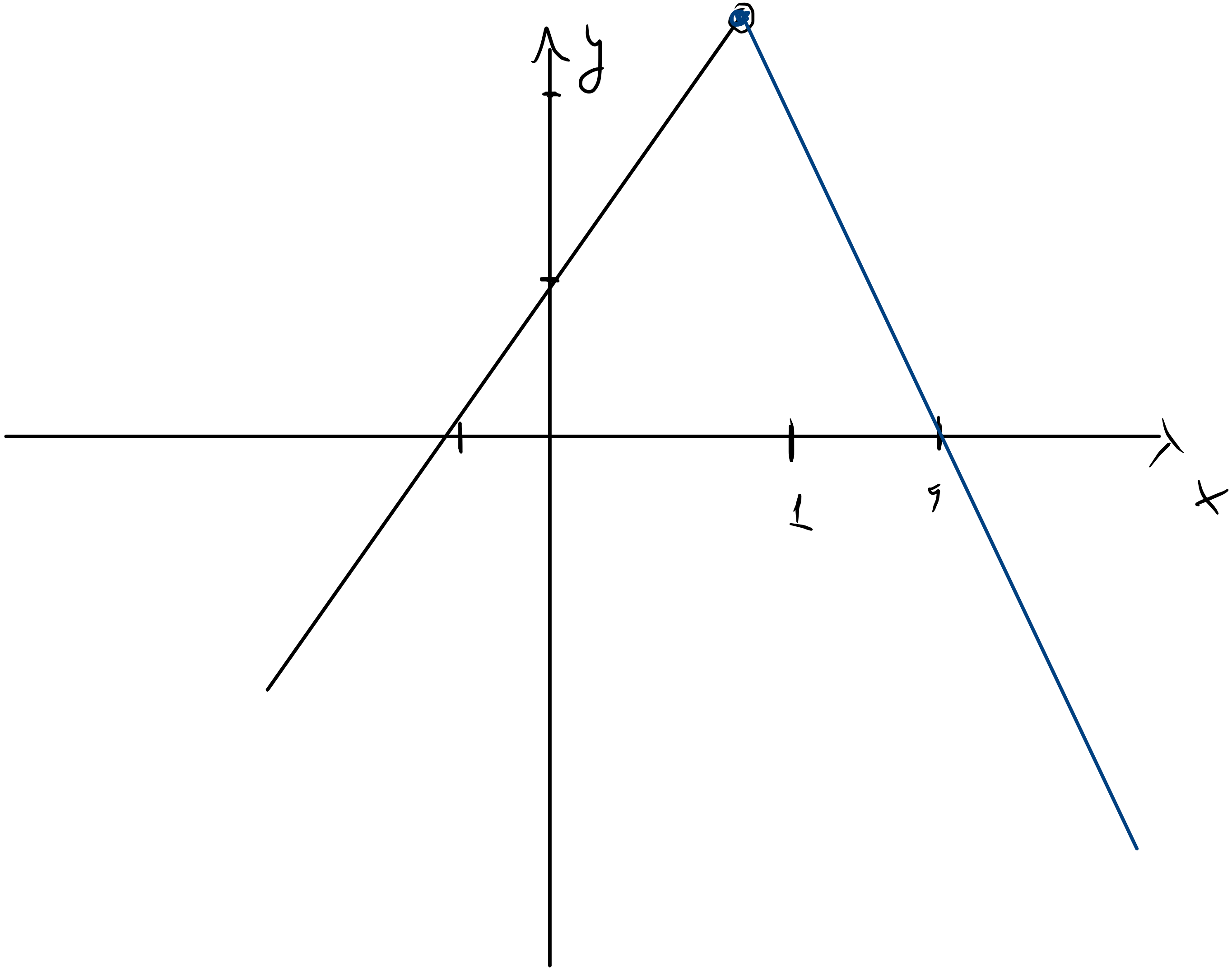
$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - 3}{x - 1}$$

Não existe

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{(2x+1)-3}^{2(x-1)}}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} 2 = 2$$

$$\neq$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{(-x+4)-3}^{-x+1}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} (-1) = -1$$


y
x
1
5

16. Seja $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de f.

b) f é derivável em $p = 0$? Em caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

7.3. DERIVADAS DE x^n e $\sqrt[n]{x}$

Teorema. Seja $n \neq 0$ um natural. São válidas as fórmulas de derivação:

a) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.
b) $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$, $x \neq 0$.
c) $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, em que $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar ($n \geq 2$).

7.4. DERIVADAS DE e^x e ln x

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação

a) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$.
b) $g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

7.5. DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação.

a) $\text{sen}'x = \cos x$.
b) $\cos'x = -\text{sen}\, x$.
c) $\text{tg}'x = \sec^2 x$.
d) $\sec'x = \sec x \,\text{tg}\, x$.
e) $\text{cotg}'x = -\text{cosec}^2 x$.
f) $\text{cosec}'x = -\text{cosec}\, x \,\text{cotg}\, x$.

3. Seja $f(x) = a^x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{(x \ln(a))}$$

$$h(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2+1}$$

$$f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

$h'(x)$?

Regra do Quociente: $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2}$$

$$h'(x) = \frac{(3x^2-2)\cdot(x^2+1) - 2x(x^3-2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

5. Seja $g(x) = \log_a x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é constante. Mostre que $g'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

3. Seja $f(x) = a^x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{(x \ln(a))}$$