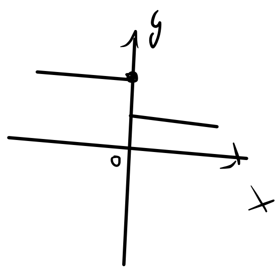
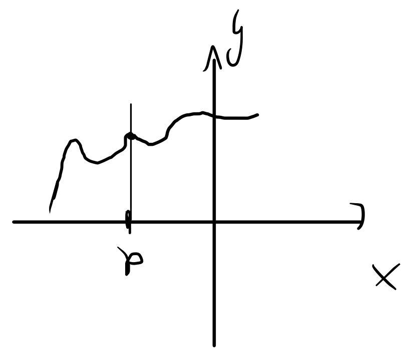
Monitoria - 05/05

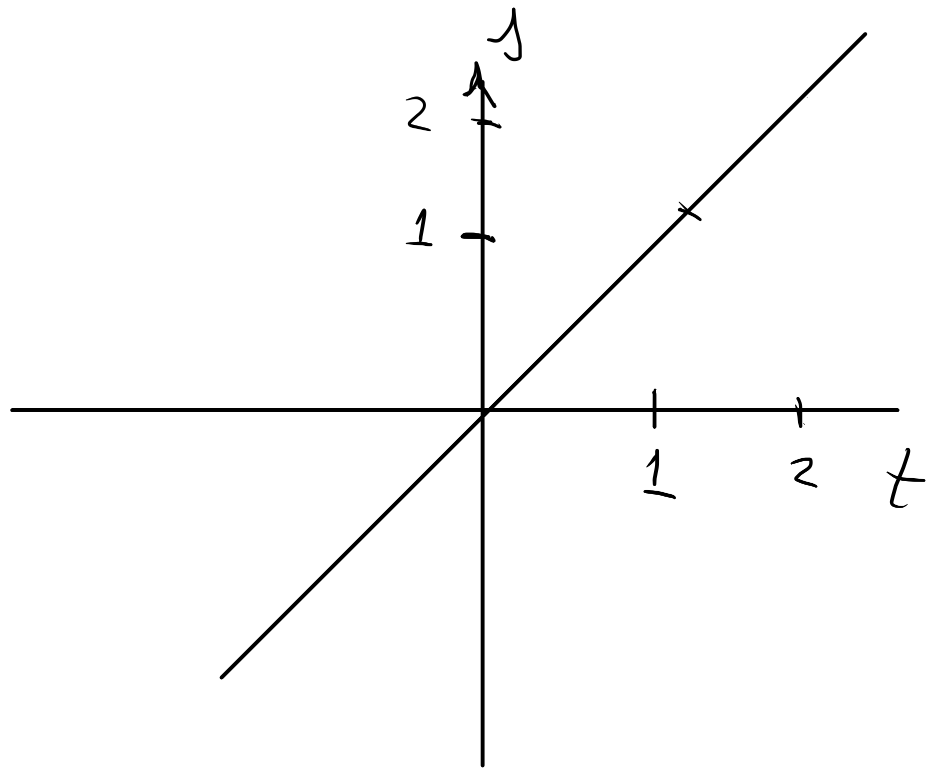
Seção 3.1 - Guidorizzi

Limite: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$

Intuitivamente, dizemos que f é contínua em p se o gráfico de f não tem "saltos" em p.

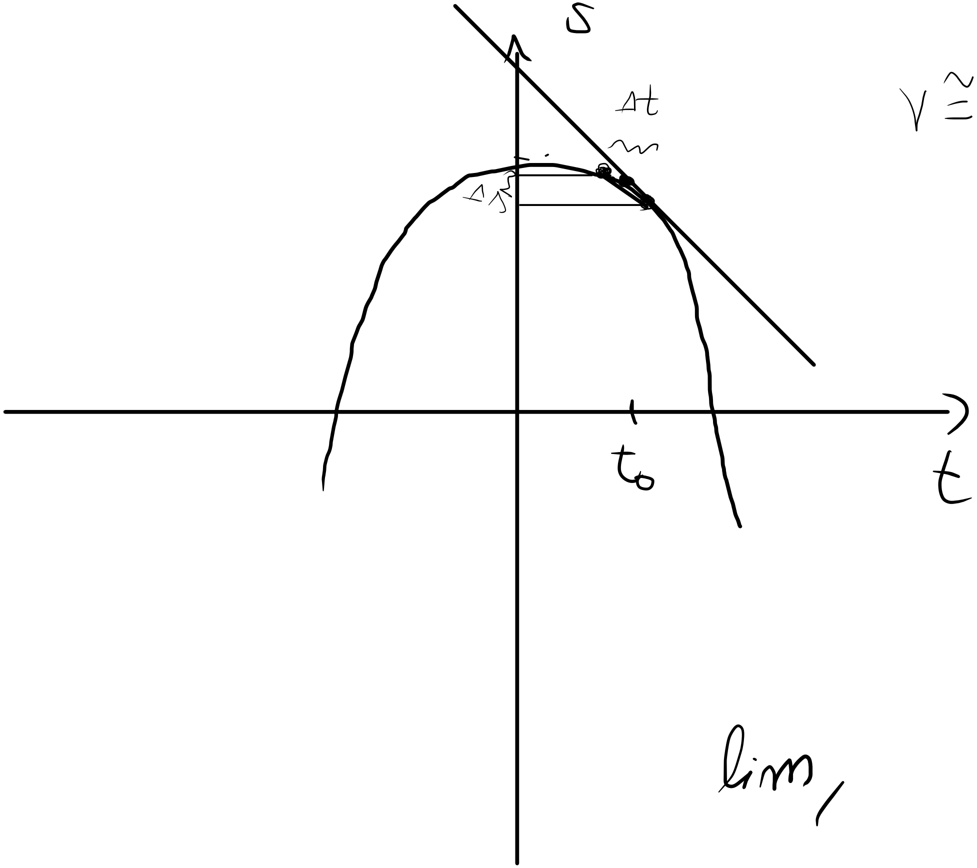






$s(t) = t$

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = cte$



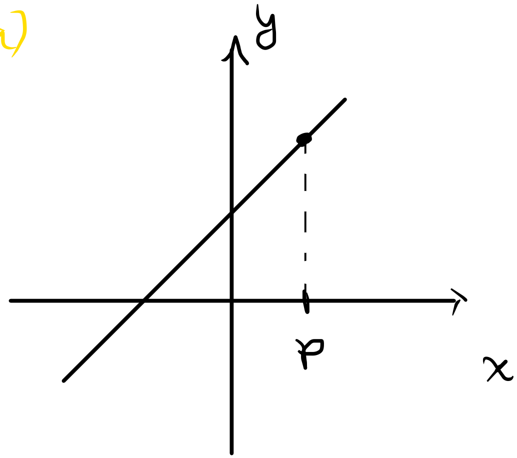
$$v \cong \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

lim

$v(t) = ?$

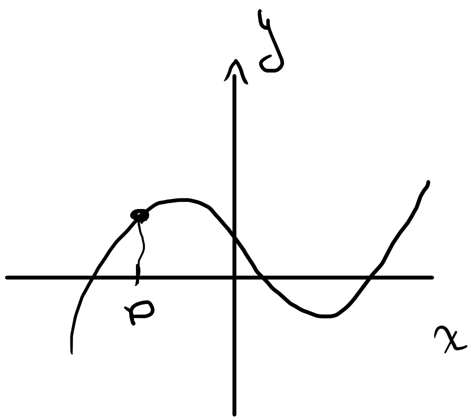
$v(t) = s_0 + at$

Exemplos: (a)



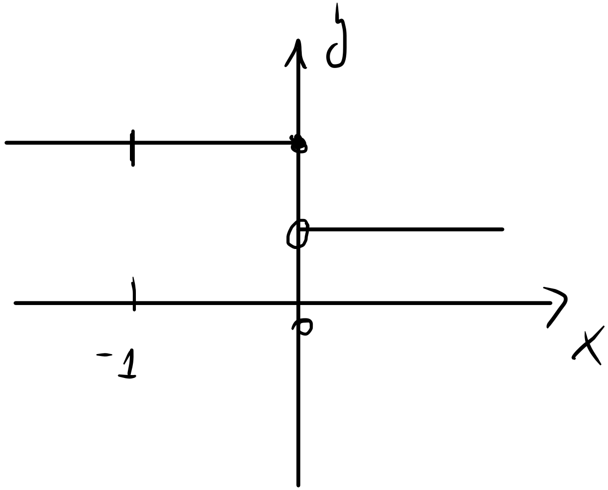
f contínua em p.

(b)



f contínua em p

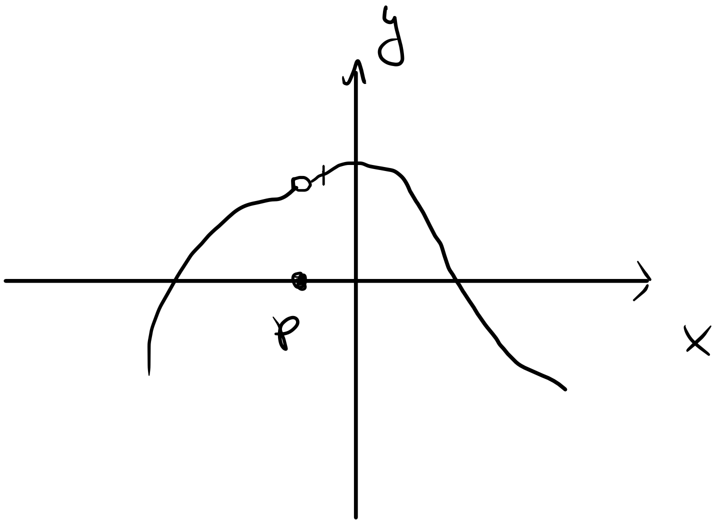
(c)



f não é contínua em "0".

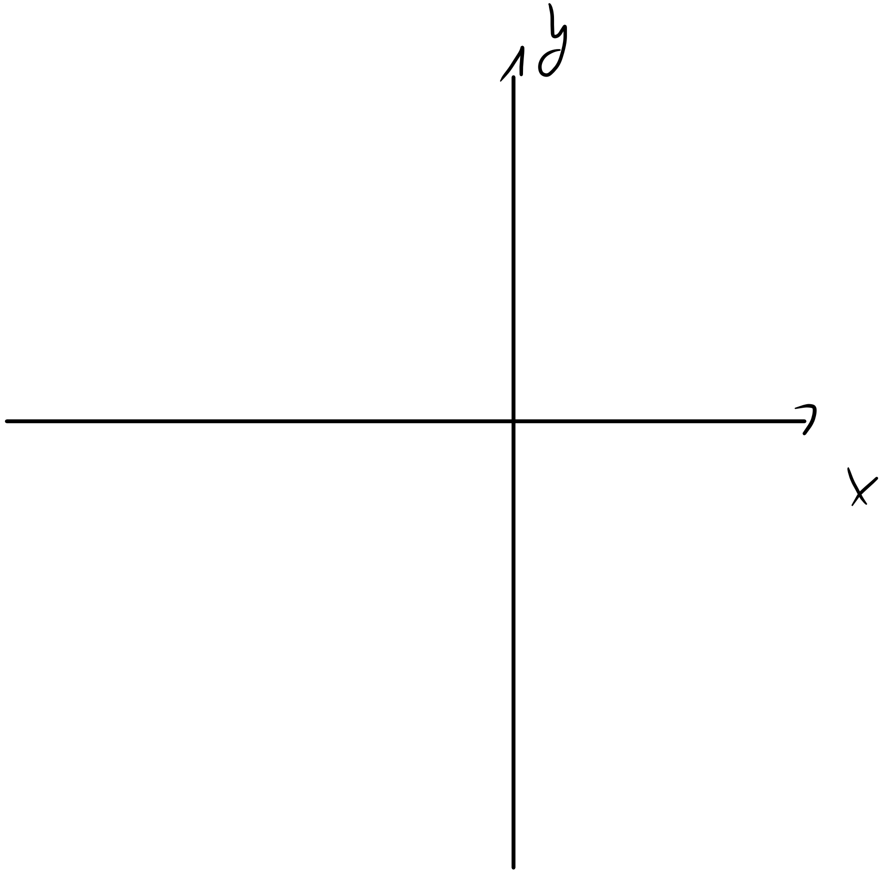
f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d)



f não é contínua em p.

É contínua em $\mathbb{R} \setminus \{p\}$.

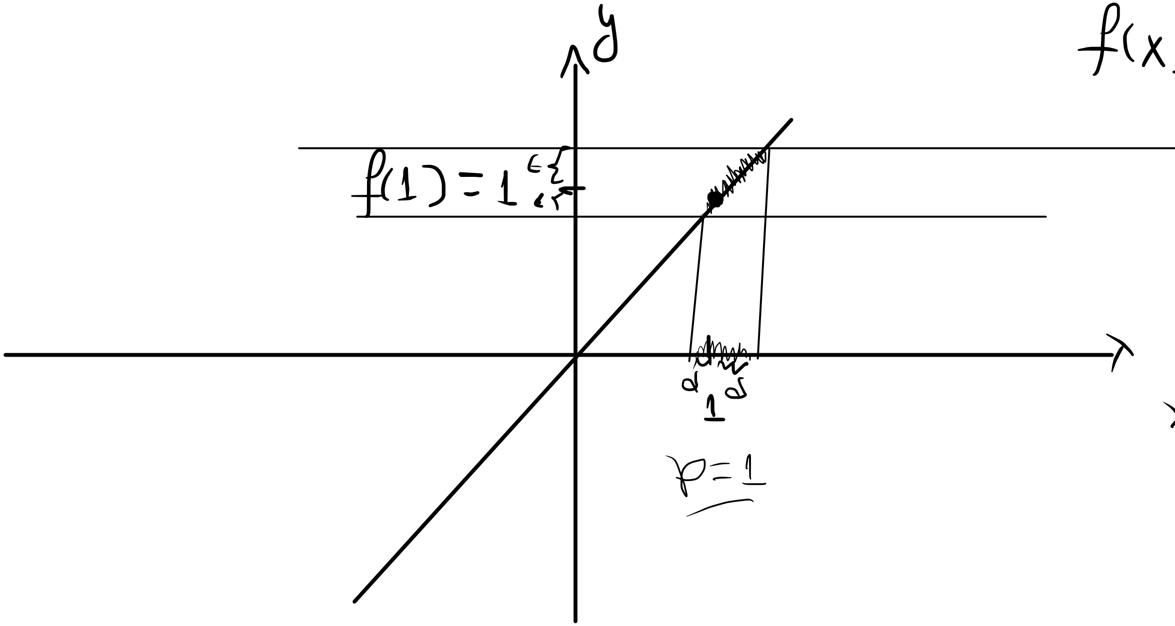

y
x

O conceito de continuidade

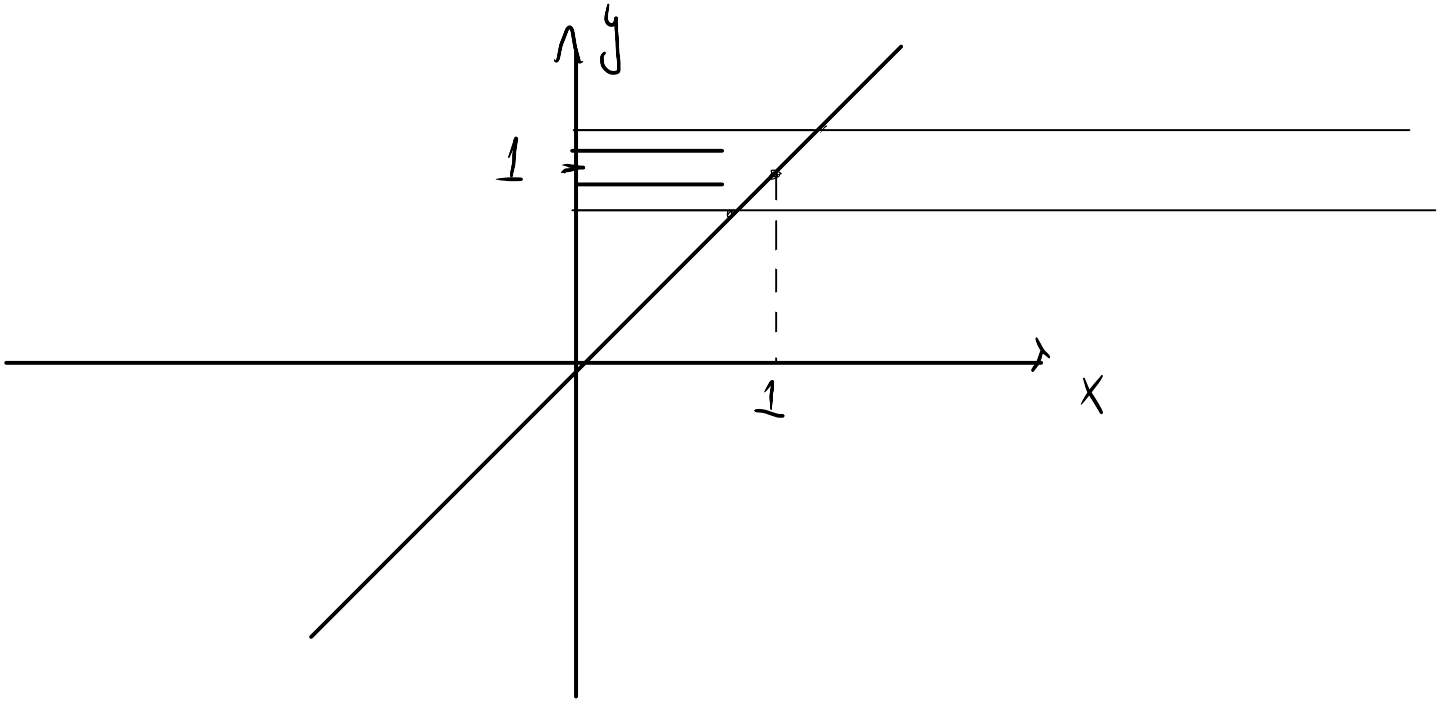
Como formalizar a ideia dos "saltos"?

Quero: Um conceito que traduza a ideia que, quando x se aproxima de p, f(x) se aproxima de f(p). Ou seja, quando x "tende" a p, f(x) "tende" a f(p).

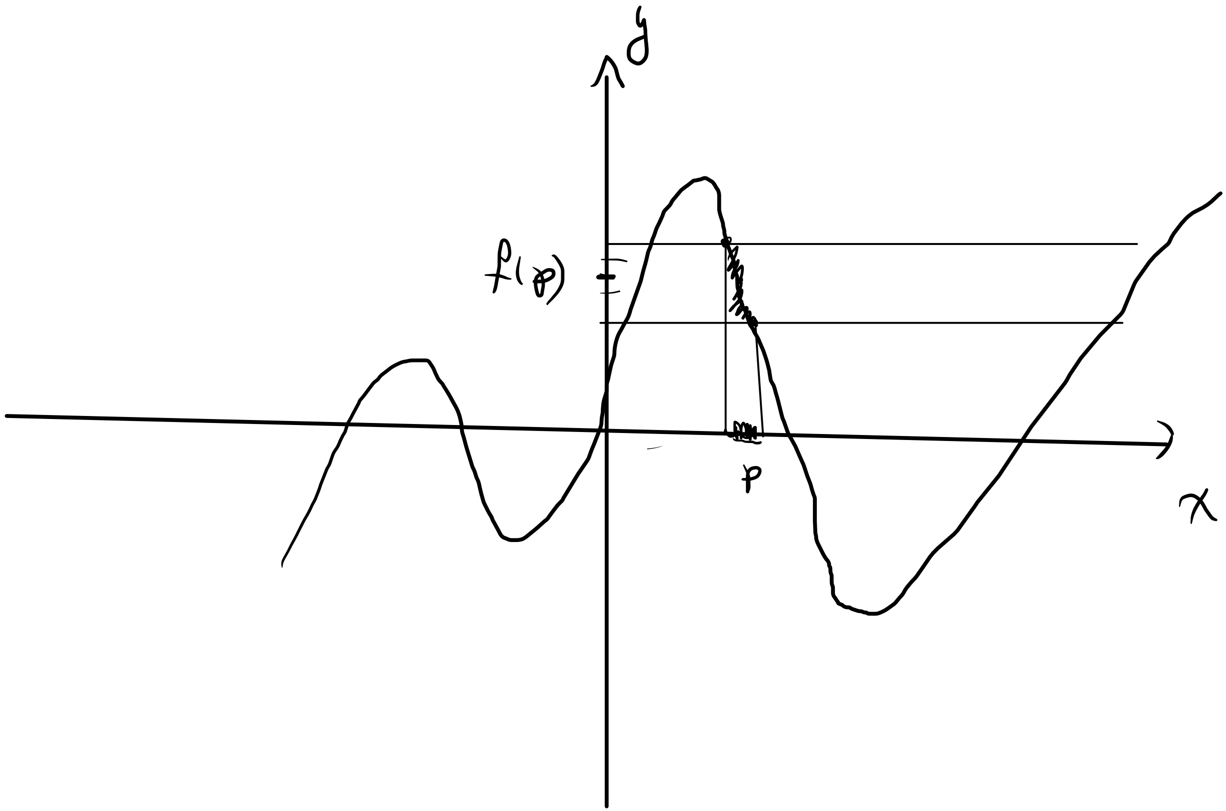
$f(x) = x$



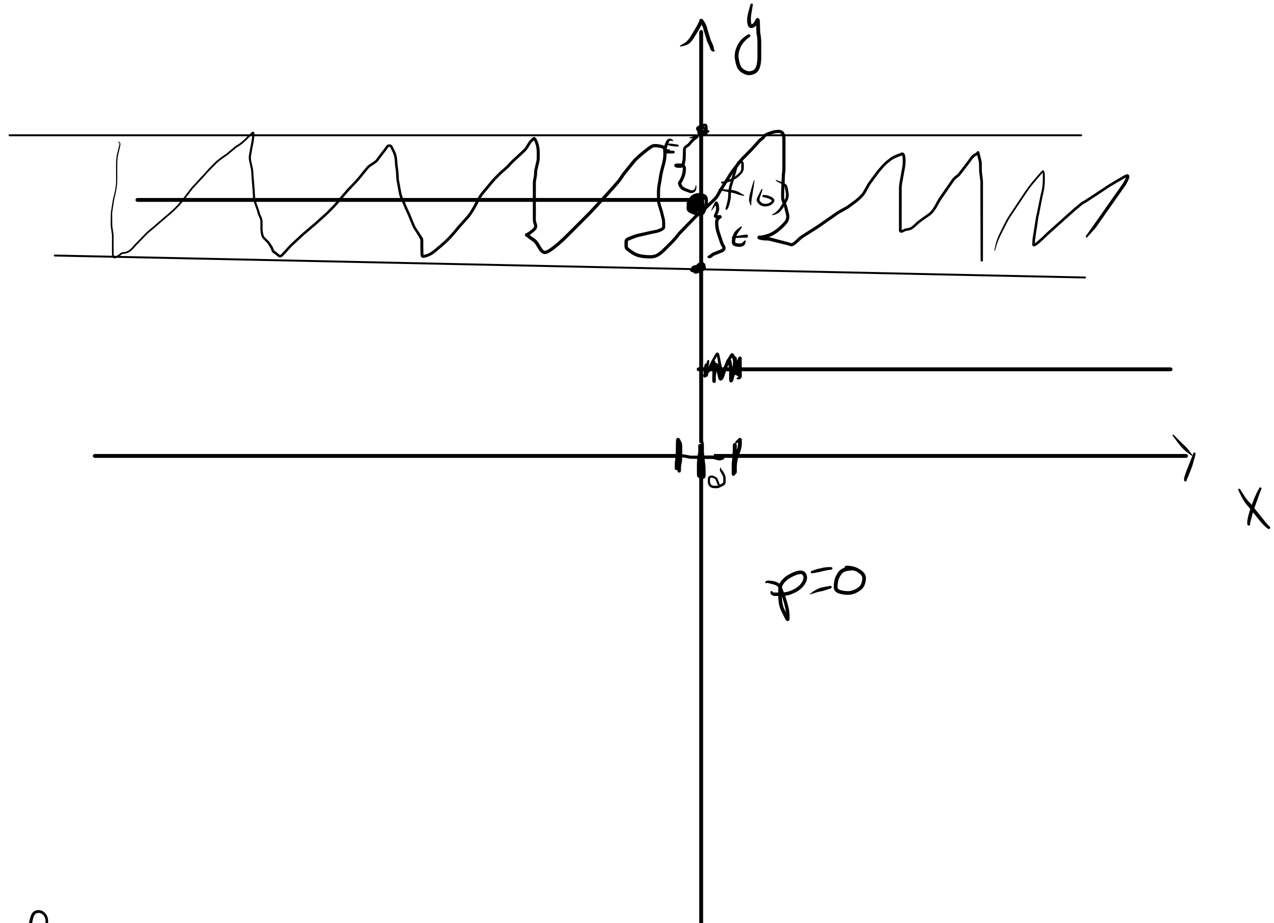
Nas proximidades de $f(1)$, x fica nas proximidades de 1.



Preciso achar um intervalo em torno de 1 que faça a função ficar dentro do "tubo".



y
f(p)
p
x

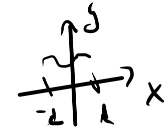


f não é contínua em 0

O "tubo" é um intervalo em torno de $f(p)$, $]f(p)-\epsilon, f(p)+\epsilon[$. $\epsilon > 0$

Quero intervalo em torno de p, $]p-\delta, p+\delta[$ $\delta > 0$ que faça f permanecer em $]f(p)-\epsilon, f(p)+\epsilon[$.

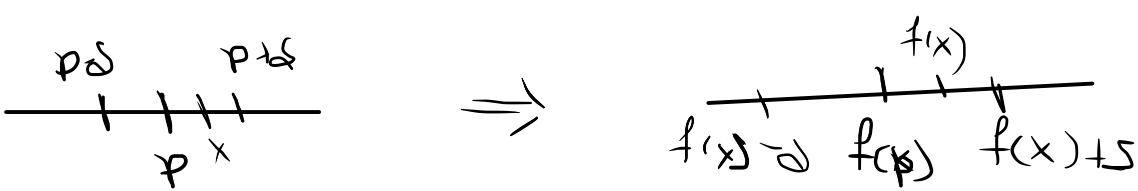
Formalmente, $f: D_f \to \mathbb{R}$



Def: Seja f uma função e p um ponto do seu domínio. Dizemos que f é contínua em p se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$p-\delta < x < p+\delta \Rightarrow f(p)-\epsilon < f(x) < f(p)+\epsilon$$

(i.e., $|x-p| < \delta$) (i.e., $|f(x)-f(p)| < \epsilon$)



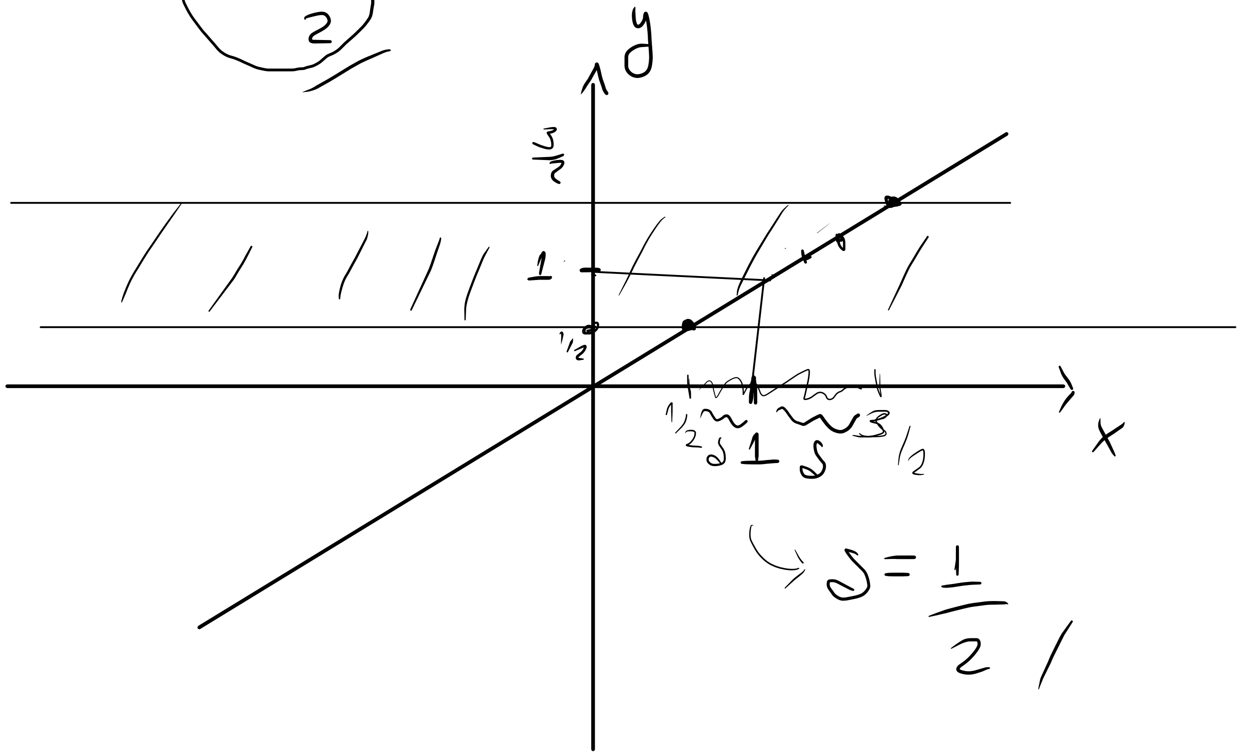
Dizemos que f é contínua em $A \subseteq D_f$ se for contínua em todo ponto de A.

Provar que uma função é contínua significa encontrar δ para cada $\epsilon > 0$ dado.

Exemplo

$f(x) = x$, $p = 1$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, escolho qual δ? $f(1) = 1$



$\delta = \frac{1}{2}$

O gráfico nos sugere tentar $\delta = \frac{1}{2}$.

Esse δ funciona?

Se $|x-1| < \underset{(\delta)}{\frac{1}{2}}$, então $|f(x) - f(1)| < \overset{(\epsilon)}{\frac{1}{2}}$ ✓

Encontrei δ para um ϵ. Existe para todos?

Demonstração que f é contínua em $p=1$:

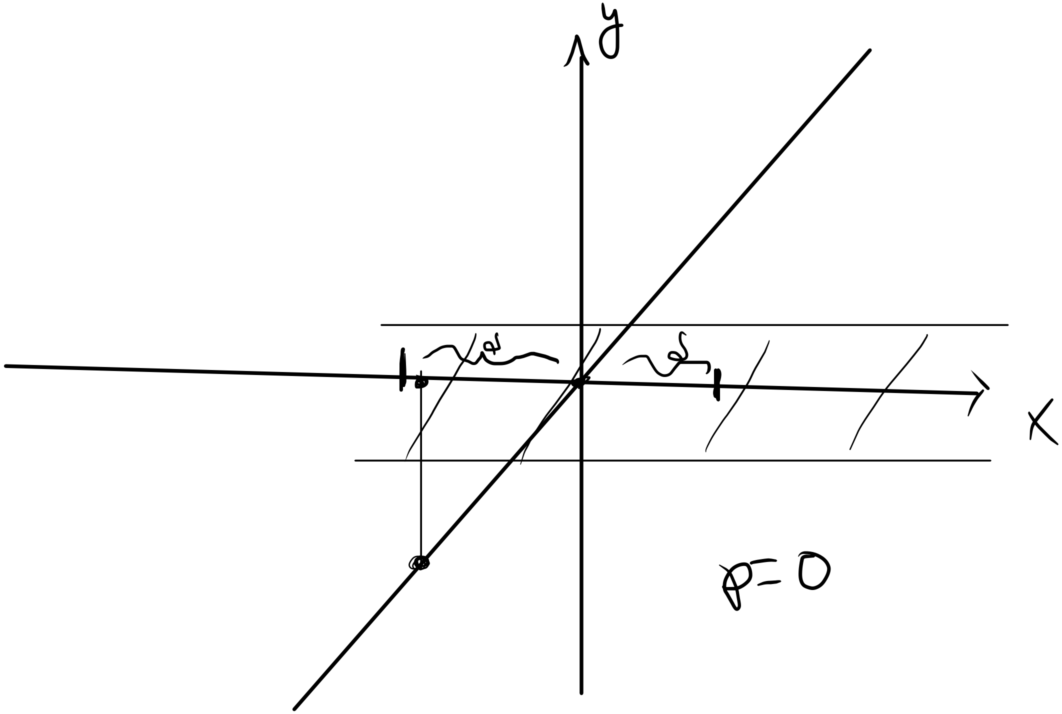
Seja $\epsilon > 0$ dado. Tome $\delta = \epsilon$. Então:

$f(x) = x \qquad p = 1 \qquad \epsilon = \frac{1}{2} \qquad \delta = \frac{1}{2}$

Quero: $\forall x$ $|x - 1| < \underset{1/2}{\overset{\shortparallel}{\delta}} \Rightarrow |f(x) - 1| < \frac{1}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } |\underset{f(x_0)}{\underset{\shortparallel}{x_0}} - \underset{f(1)}{\underset{\shortparallel}{1}}| < \frac{1}{2} \\ \Rightarrow |f(x_0) - f(1)| < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Esse δ funciona.



$\epsilon = 1$

$\delta = 2$

$f(x) = x$

✓ ? X

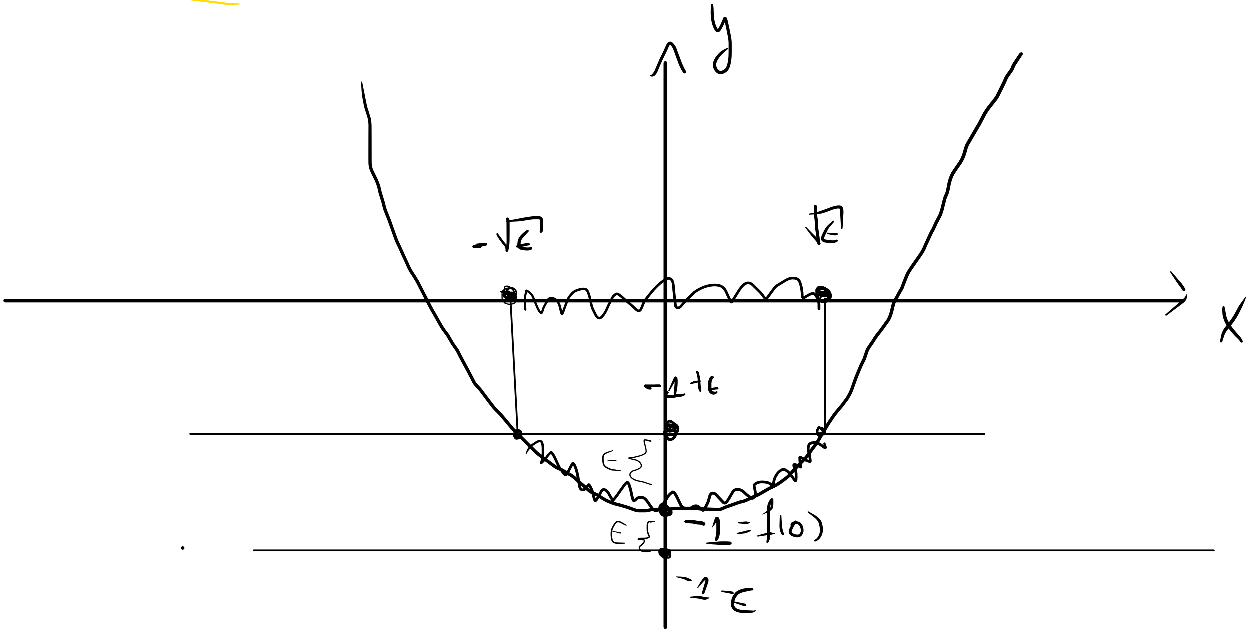
$|x-0|<2 \Rightarrow |f(x)-f(0)| < 1$

$x = \frac{3}{2}$: $\left|\frac{3}{2}\right|<2$, mas $\left|f\left(\frac{3}{2}\right) - f(0)\right| = \frac{3}{2} > 1$

$p = 1$

Se $|x - 1| < \underset{\epsilon}{\underset{\shortparallel}{\delta}}$, então $|\underset{x}{\underset{\shortparallel}{f(x)}} - \underset{f(1)}{\underset{\shortparallel}{1}}| < \underset{\delta}{\underset{\shortparallel}{\epsilon}}$. ✓

Exemplo 2: $f(x) = x^2 - 1$, $p = 0$



$$-1+\epsilon = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \epsilon \Rightarrow x = \pm\sqrt{\epsilon}$$

$\delta = \sqrt{\epsilon}$, pelo gráfico

Demonstração: ($\delta = \sqrt{\epsilon}$ funciona?)

Quero: $|x-0| < \sqrt{\epsilon} \Longrightarrow \underbrace{|f(x)-f(0)|}_{=\,|f(x)+1|} < \epsilon \qquad \epsilon > 0$ //

$$0 \leq |x_0| < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow x_0^2 < \epsilon$$

$$x_0^2 = (\underbrace{x_0^2 - 1}_{}) + 1 < \epsilon$$

$$|f(x_0) + 1| < \epsilon \; /$$