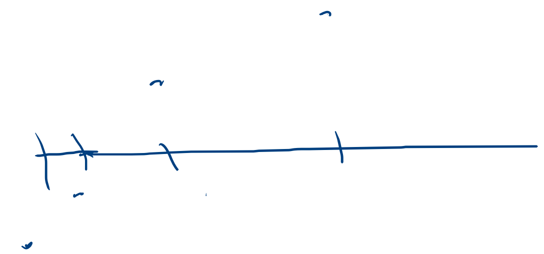
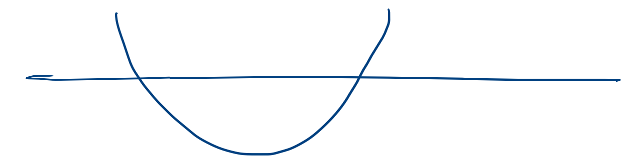
Pg 236

Prove que a equação $x^3-3x^2+6=0$ admite uma única raiz. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.



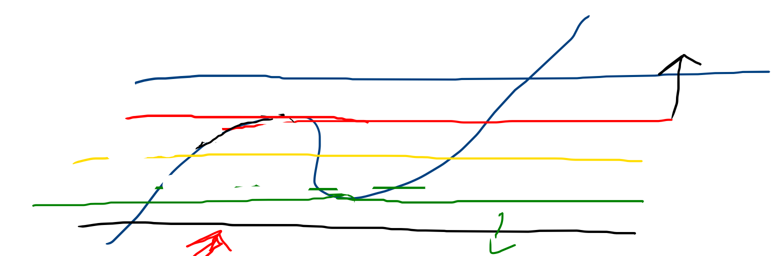
$$f(x)=x^3-3x^2+6$$

$$f'(x)=3x^2-6x$$



$$f'(x)=0 \iff 3x(x-2)=0$$

$$\iff x=0 \text{ ou } x=2$$



(polinómio do grau 2 c/ coef de maior grau >0)

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
	↗	→	↘	→	↗
f	<0	$\underset{\geq 0}{6}$	≥ 2	2	≥ 2

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

única raiz

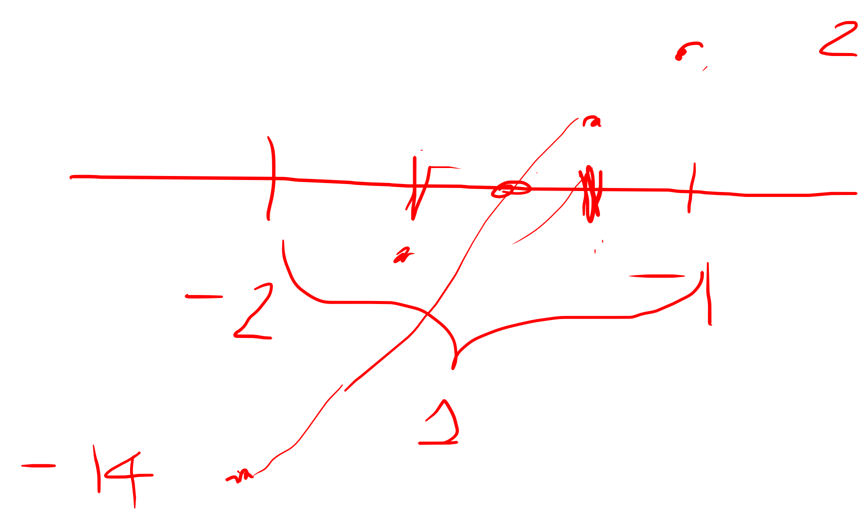
$f(0)=6$

$f(2)=8-12+6=2$

Existe uma raiz em $]-\infty, 0[$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 6 = -1 - 3 + 6 = 2 > 0$

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 6 = -8 - 12 + 6 = -14 < 0$



a única está no intervalo $]-2, -1[$

Pg 237. 7. Seja

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

a) calcule $f'(0)$ pela definição

b) Determine f'.

c) Esboce o gráfico, calculando para isto todos os limites necessários

limites laterais de 0.

a) $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim_{t\to+\infty}e^{-t^2}\cdot t=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\overset{L'H\,[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t^2}\cdot 2t}=0$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}\underset{t=\frac{1}{h}}{=}\lim_{t\to-\infty}e^{-t^2}\cdot t=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t^2}\cdot 2t}=0$$

$+\infty \quad +\infty \quad -\infty$

$f(0) = 0$

$x \neq 0$

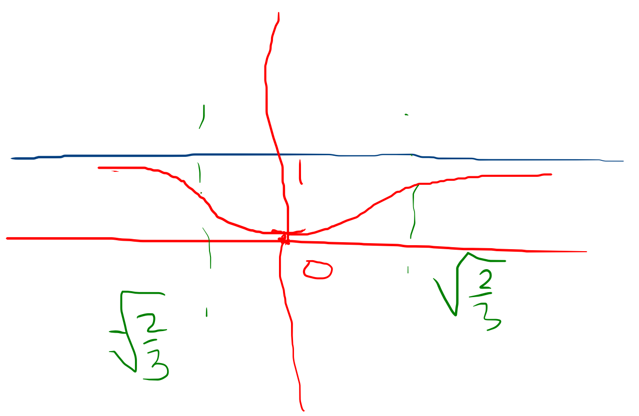
$f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$, $\forall t$ em torno x suf. próximo

$(\exists \delta > 0$ tq $f(t) = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{t^2}}}}$, $\forall t \in]x-\delta, x+\delta[$
$0 \notin$

$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)'$

$= \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{>0} \left(2 \cdot \frac{1}{x^3}\right)$ ← sinal depende de $\frac{1}{x^3}$

$x \neq 0$



x^3	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
	↘	↑	↗

item a)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{\overbrace{-\frac{1}{x^2}}^{\to 0^-}} = 1^-$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1^-$

$f'(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{2\, e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$

$x \neq 0 \qquad f''(x) = \dfrac{2\, e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{\cancel{x^3}} \cdot \cancel{x^3} - 2\, e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 3x^2}{x^6}$

$= \dfrac{4 e^{-\frac{1}{x^2}} - 6 e^{-\frac{1}{x^2}} x^2}{\underset{>0}{x^6}}$

$= \dfrac{2 e^{-\frac{1}{x^2}} (2 - 3x^2)}{x^6}$

grau 2
com
coef. negativo

	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$	
f''	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
concavidade	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	$\frown$	P.I.	$\smile$		$\smile$	P.I.	$\frown$

$2 - 3x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

238 14.

$f(x) = 2x - \sqrt{x^2+3}$

a) Verifique que f' é contínua em $\mathbb{R}$

b) Verifique que $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) Tendo em vista que $f'(0) > 0$ conclua que f é estritamente crescente.

a) $2x$ é derivável em $\mathbb{R}$

x^2+3 é derivável em $\mathbb{R}$ e $x^2+3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

e $\sqrt{x}$ é derivável em $]0,+\infty[$ $\therefore$ $\sqrt{\underbrace{x^2+3}_{>0}}$ é derivável em $\mathbb{R}$

$\therefore$ $2x - \sqrt{x^2+3}$ é derivável em $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ > 0

cont. em $\mathbb{R}$

contínua em $\mathbb{R}$ $\therefore$ f' é contínua em $\mathbb{R}$

b) $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x$

$= 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

$f'(x) = 0 \iff 2 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} \iff 2\sqrt{x^2+3} = x$

$\iff 4(x^2+3) = x^2$

$\iff 4x^2+3 = x^2$

$\iff \underline{3x^2+3} = 0 \Leftarrow$ nu are loc p/ niciun $x \in \mathbb{R}$

strict pozitiv

$\therefore \; f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f'(0) = 2 > 0$

conclua que f é estritamente crescente.

Se existisse x tal que $f'(x) < 0$, pela continuidade de f', (usando o TVI) existe c entre x e 0 tal que $f'(c) = 0$ $\lightning$ ($f'(x) < 0$ e $f'(0) > 0$)

$\therefore f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ pelo TVM a f é estritamente crescente.

$\left(\underline{a < b} \quad \exists c \quad \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a > 0} = f'(c) > 0 \right.$

$\therefore f(b) - f(a) > 0$

$\therefore f(b) > f(a) \Big)$

Pg 243

11. → f definida e derivável no intervalo]−r, r[(r > 0). Suponha que

$$\begin{cases} f'(x) = x^2 + f^2(x) & \forall x \in]-r, r[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que 0 é ponto de inflexão horizontal

b) Mostre que $f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

c) Estude f com relação à concavidade.

OBS: f é derivável em]−r, r[⇒ f é contínua em]−r, r[

∴ $x^2 + f^2(x)$ é contínua em]−r, r[.

∴ f' é contínua em]−r, r[.

além disso $x^2 + f^2(x)$ é derivável

$\therefore$ $f''(x) = 2x + 2f(x) \cdot f'(x)$

$\leftarrow f(0) = 0$

a) $f'(0) = 0^2 + f^2(0) = 0$

$f''(x) = 2x + 2f(x)(x^2 + f^2(x))$

$x > 0$ $\quad f''(x) = \underbrace{2x}_{>0} + 2\underbrace{f(x)}_{>0}\underbrace{(x^2 + f^2(x))}_{>0} > 0$

$\qquad >0$

$x < 0$ $\quad f''(x) = \underbrace{2x}_{<0} + 2\underbrace{f(x)}_{<0}\underbrace{(x^2 + f^2(x))}_{>0} < 0$

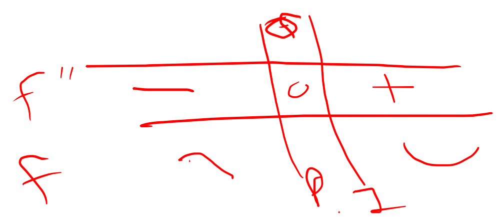
$\qquad <0$

$x \neq 0$

b) $f'(x) = x^2 + f^2(x) \geq x^2 > 0$

$\therefore$ $f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

c)



$f'(x) > 0$

$x \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \text{Pelo TVM} \\ f(x) > 0 \quad \forall x > 0 \end{array}}$$

Pelo TVM

$f(x) < 0 \quad \forall x < 0$

$x \quad c \quad 0$

$0 > f'(c) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\underbrace{f'(x)} = \underbrace{x^2 + f^2(x)}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)$$

$$= a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x$$
$$+ (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0)x^2$$
$$+ (a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0)x^3$$
$$\vdots$$