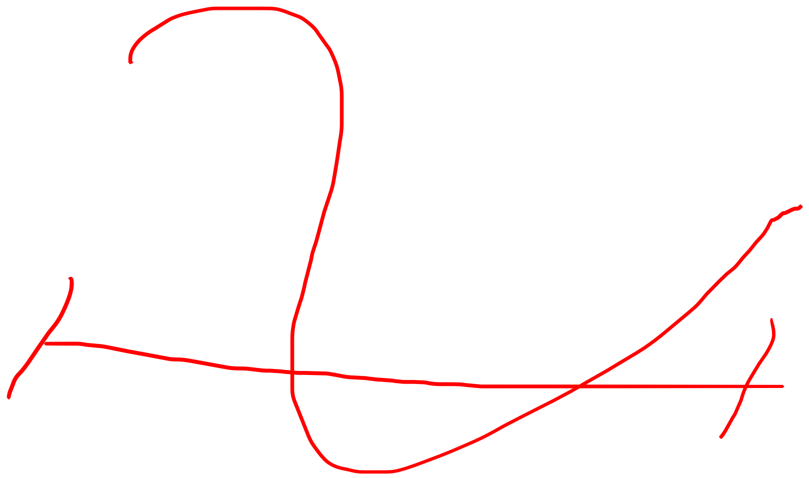
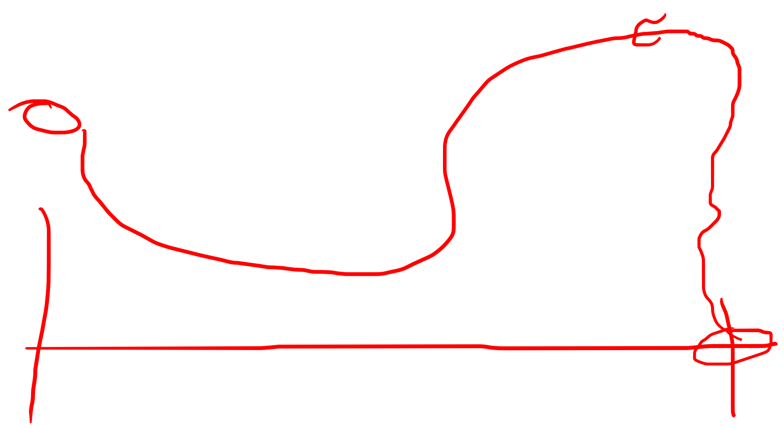
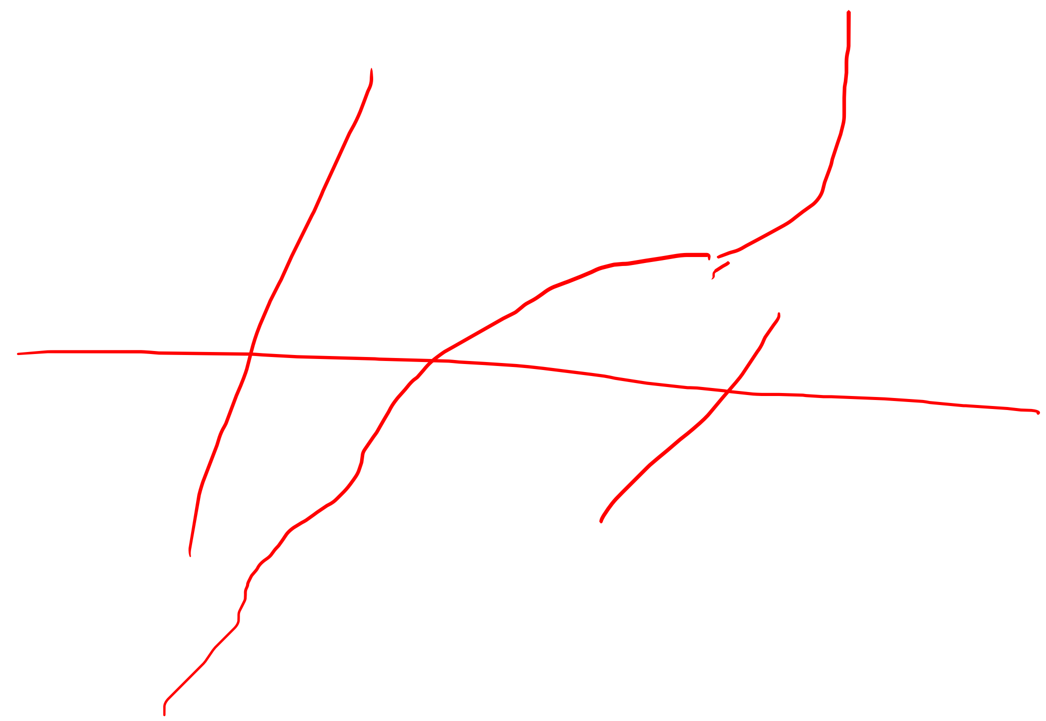
Teorema de Weierstrass



[a, b]

∃ máximo e mínimo





Qual o retângulo de perímetro P de maior/menor área?

$$\text{área} = x \cdot y$$

$$P = 2x + 2y$$

$$y = \frac{P - 2x}{2}$$

$$y > 0$$

$$P - 2x > 0$$

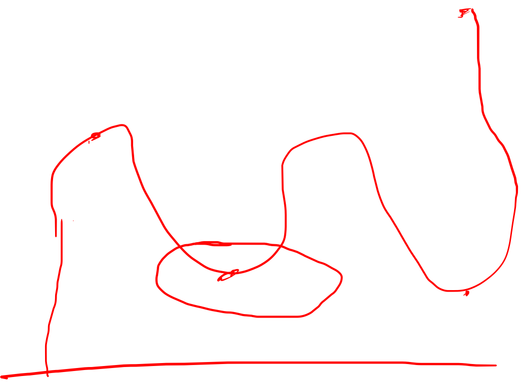
$$P > 2x$$

$$x < \frac{P}{2}$$

$$\text{área} = x\left(\frac{P - 2x}{2}\right) \qquad x > 0$$

$$0 < x < \frac{P}{2}$$

$$f(x) = x\left(\frac{P}{2} - x\right), \quad 0 < x < \frac{P}{2}$$



$$f(x) = x\left(\frac{p}{2} - x\right), \quad 0 \leq x \leq \frac{p}{2}$$

f possui máximo e mínimo em $\left[0, \frac{p}{2}\right]$.

Candidatos a máximo/mínimo são $x \in \left]0, \frac{p}{2}\right[$ tal que $f'(x) = 0$ e $\left\{0, \frac{p}{2}\right\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{p}{2}x - x^2\right)' = \frac{p}{2} - 2x = 0 \iff \boxed{x = \frac{p}{4}}$$

$$\frac{p}{4}\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{4}\right) = \frac{p}{4} \cdot \frac{p}{4}$$

Candidatos: $x \in \left\{\frac{p}{4}, 0, \frac{p}{2}\right\}$

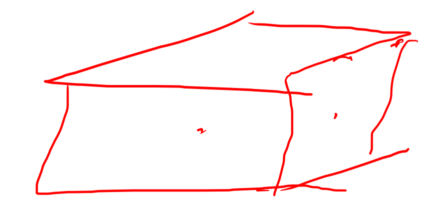
$$f\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p}{4} \cdot \frac{p}{4} = \frac{p^2}{16}$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{p}{2}\right) = 0$$

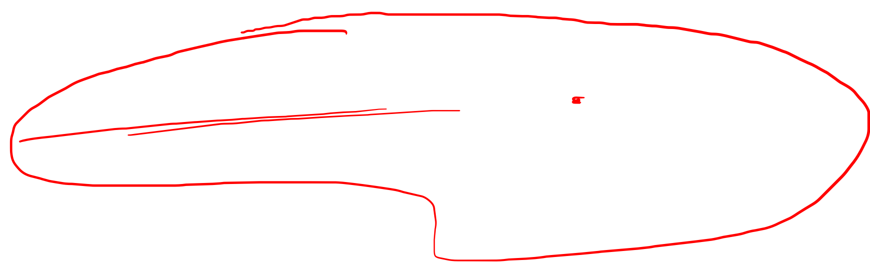
f tem máximo em $x = \frac{P}{4}$

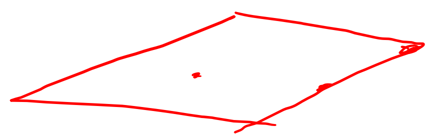
e f não possui mínimo em $]0, \frac{P}{2}[$.



O retângulo de área máxima é o quadrado ($x = \frac{P}{4}$ e $y = \frac{P}{4}$).

Otimização -





$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3$ em $[-2, 1]$

Encontre os pontos de máximo e mínimo.

- $[-2, 1]$ é compacto (~~fechado~~ e limitado) de $\mathbb{R}$ ← porque é subconjunto

f é contínua em $[-2, 1]$ ∴ f possui máximo e mínimo

- Pontos críticos em $]-2, 1[$

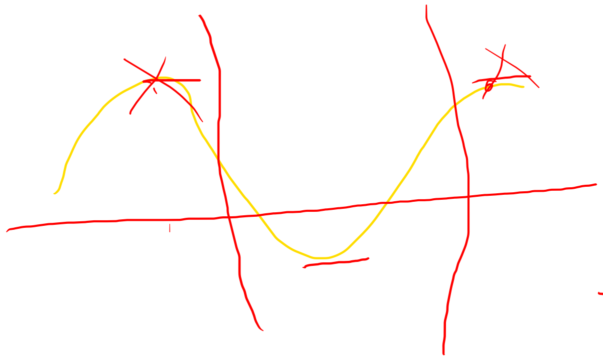
$f'(x) = 6x^2 + 8x = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

Candidatos a extremante: $x \in \{0, -\frac{4}{3}, -2, 1\}$

Ponto de máximo: 1

Ponto de mínimo: 0 e -2.

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 12 \\ \hline 32 \\ 16\ \ \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 192 \\ -128 \\ \hline 064 \end{array}$$



$f(0) = -3$ valor mínimo

$f(-\frac{4}{3})$ ← não usa

$= 2\frac{(-64)}{27} + 4 \cdot \frac{16}{9} - 3$

$= \frac{-128 + 192}{27} - 3 = \boxed{\frac{64}{27} - 3} > -3$

$f(-2) = -16 + 16 - 3 = -3$ valor mínimo

$f(1) = 2 + 4 - 3 = 3$ valor máximo

$f(x) = x^4 + 3x^3 - 5$ em $[-1, 3]$

- $[-1,3]$ é compacto e f é contínua

$\therefore$ f possui máximo e mínimo.

- Pontos críticos em $]-1,3[$

$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 = 0 \iff x^2(4x+9) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = -\frac{9}{4} \notin]-1,3[$

$0 \in]-1,3[$

Candidatos a extremante

$\{0, -1, 3\}$

$f(0) = -5$

$f(-1) = 1 - 3 - 5 = -7$ valor mínimo

$f(3) = \underbrace{81 + 81 - 5 > 0}_{\text{valor máximo}}$

Ponto de máximo: 3

" " mínimo: -1

15~~7~~

-1

$]1,3[$

Def: x é máximo de f em $I \subseteq \mathbb{R}$

se $x \in I$ tal que $f(x) \geq f(y)$ $\forall y \in I$.

Def x é mínimo de f em $I \subseteq \mathbb{R}$

se $x \in I$ tal que $f(x) \leq f(y)$ $\forall y \in I$.

Def: x é máximo local de f em $I \subseteq \mathbb{R}$

se $\exists \delta > 0$ tal que $x \in]x-\delta, x+\delta[\cap I$

e x é máximo em $]x-\delta, x+\delta[\cap I$.

Def: x é mínimo local de f em $I \subseteq \mathbb{R}$

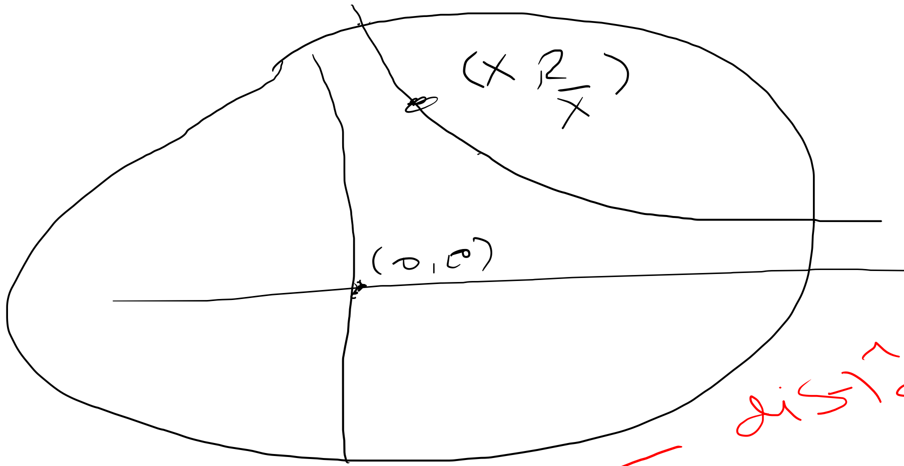
se $\exists \delta > 0$ tal que $x \in]x-\delta, x+\delta[\cap I$

e x é mínimo de f em $]x-\delta, x+\delta[\cap I$


3

276 14.

Encontre o ponto da curva $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$ que está mais próximo da origem.



$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Como existe mínimo e um dos pontos críticos é ponto de mínimo. Se o ponto crítico é único ele é o ponto de mínimo

distância ao quadrado entre $(x, \frac{2}{x})$ e (0,0)

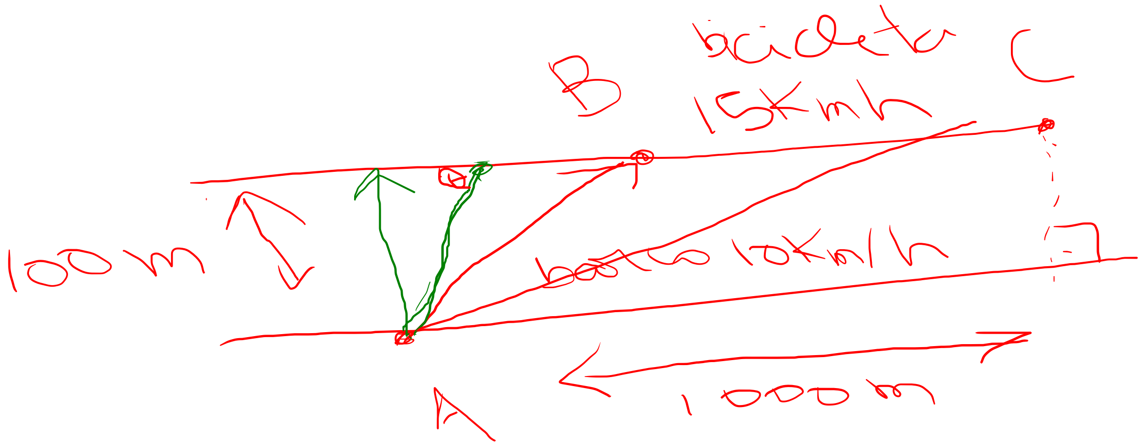
único ponto crítico

$$f(x) = (x-0)^2 + \left(\frac{2}{x} - 0\right)^2$$ minimizar f.

$$= x^2 + \frac{4}{x^2} \quad \Rightarrow \text{O mínimo existe.}$$

$x > 0$ $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{8}{x^3} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x^4 = 4 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{2}$

12.



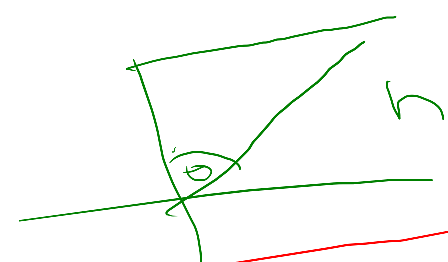
$\frac{\pi}{2} \to \theta = \operatorname{arctg}\frac{100}{1000}$

Determine θ que minimiza o tempo gasto.

$$t(\theta) = \frac{100}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1}{10} + \left(1000 - \frac{100}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{15}$$

$$t'(\theta) = \frac{10(-\cos\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{1}{15}\left(100\cdot\frac{(-1)}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) = \frac{-10\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{100}{15}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = 0$$

$$= \frac{-10\cos\theta + \frac{100}{15}}{\operatorname{sen}^2\theta}$$



$\operatorname{sen}\theta \cdot h = 100$

$h = \frac{1000}{\operatorname{sen}\theta}$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{10}{15}}$$

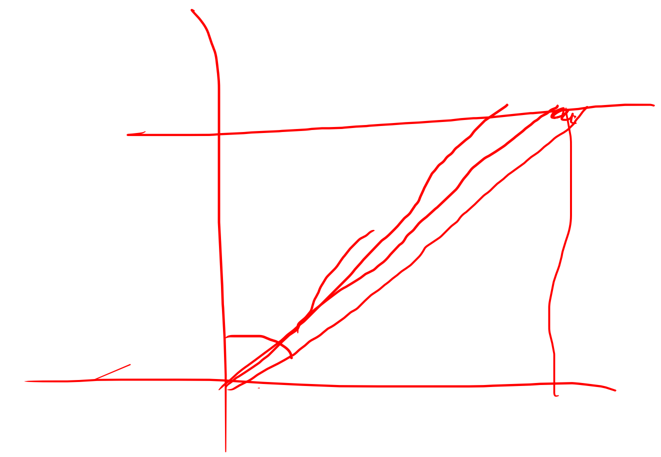
$\theta_0 = \arccos\theta_0 = \frac{10}{15}$

	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$
		−	0	+	
		↘	mínimo	↗	

$$t(\theta_0) = \frac{10}{\sqrt{1-\left(\frac{10}{15}\right)^2}} + \left(1000 - \frac{100}{\sqrt{1-\left(\frac{10}{15}\right)^2}} \cdot \frac{10}{15}\right) \cdot \frac{1}{15}$$

$$t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{100}{10} + \frac{1000}{15}$$

calcula directo



$$t\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{10}\right) = \frac{\sqrt{100^2 + 1000^2}}{10} = \frac{100\sqrt{1+100}}{10} = 10\sqrt{101}$$

$=$