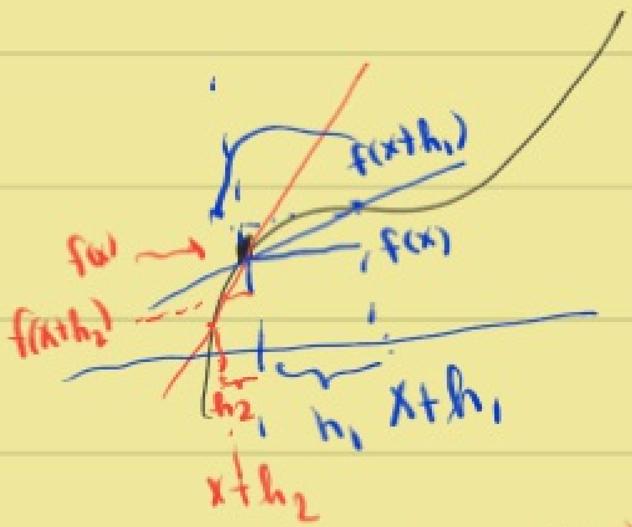
Def: f é derivável em x

se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

existe. Neste caso dizemos que $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$



$$\frac{f(x+h_1)-f(x)}{x+h_1-x} = \frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}$$

$$\frac{f(x)-f(x+h_2)}{x-(x+h_2)} = \frac{f(x)-f(x+h_2)}{-h_2}$$

$$= \frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}$$

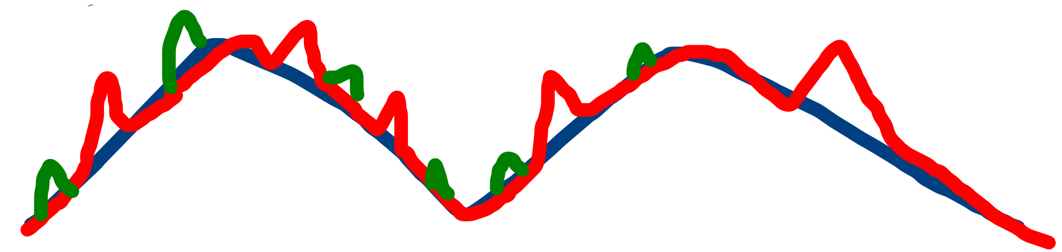
Inclinação da reta

Quando $h \to 0$ a reta se aproxima da tangente.

Teor: Se f é derivável em x então f é contínua em x.

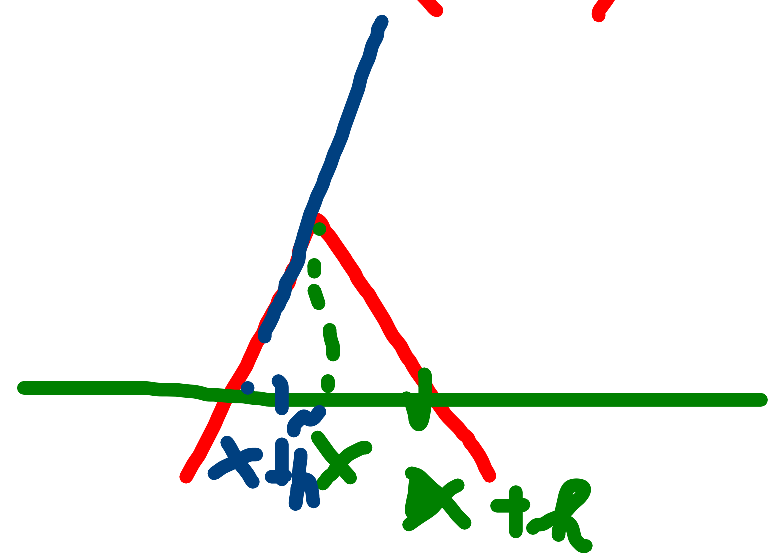
Dem:

f é contínua em x $\Longleftrightarrow$



$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0.$$



$$\lim_{h\to 0} \left(f(x+h)-f(x)\right)\cdot \frac{h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} = 0$$

∴ p/ "⇐"

f é contínua em x.

∃ f contínua em ℝ

f não é derivável em nenhum ponto

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

f contínua em x $\not\Rightarrow$ f derivável

Propriedades:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

$$\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$ [redacted]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{(f(x+h) - f(x))}{h}}_{f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{g(x)\ \text{(g é contínua em x)}} + \underbrace{\frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}}_{g'(x)}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

"derivada do produto é igual à derivada do primeiro vezes o 2º + o primeiro vezes a derivada do 2º".

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}} \quad \text{si } g(x) \neq 0.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}}{\frac{h}{1}}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c} = \frac{a}{c}\cdot\frac{1}{b}$$

$$= \lim_{h\to 0} - \underbrace{\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}}_{g'(x)} \cdot \frac{1}{\underbrace{g(x+h)}_{\substack{g(x) \\ \text{(continuidade)}}}\cdot g(x)}$$

$$= -g'(x)\cdot\frac{1}{g^2(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x).\frac{1}{g(x)} + f(x).\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x).\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

" derivada de $\frac{f}{g}$ é

derivada da função de cima vezes a função debaixo menos a função de cima vezes a derivada da função de cima, tudo dividido pela função debaixo ao quadrado "

Ex

$$(\operatorname{sen} x + x^3)' =$$

$$= (\operatorname{sen} x)' + (x^3)' =$$

$$= \cos x + 3x^2$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$[(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{f}) \underbrace{x^2}_{g}]'$$

$$= \underbrace{\cos x}_{f'} \cdot \underbrace{x^2}_{g} + \underbrace{\operatorname{sen} x}_{f} \cdot \underbrace{2x}_{g'}$$

$$(f(x) \cdot g(x))'$$

$$= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

obs

$$\underline{f g' + f' g}$$

$$(tg(x))' = \left(\frac{sen\,x}{\cos x}\right)'$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$= \frac{(sen\,x)'\cos x - sen\,x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - sen\,x\,(-sen\,x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

$$= sec^2 x$$

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

$$\frac{0 \cdot g - 1 g'}{g^2}$$

$$= -\frac{(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \sec x$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$(\operatorname{cossec} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= -\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x$$

$$\left(\frac{x^2+2x}{x^3-4}\right)' = \frac{(2x+2)\cdot(x^3-4)-(x^2+2x)\cdot 3x^2}{(x^3-4)^2}$$

Próxima aula

$$(f\circ g)'(x)$$

regra da cadeia