PEF 3200

Objetivos da Mecânica das Estruturas

Reações de apoio dos sistemas planos e dos sistemas espaciais

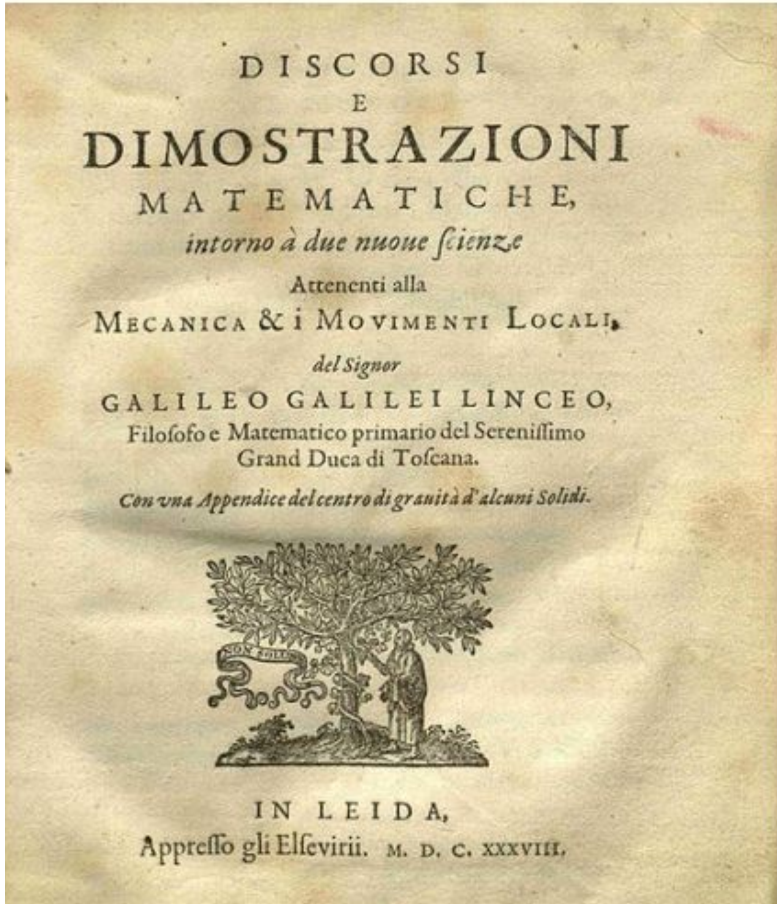
Turma 3: Valério Almeida

2023

OBJETIVO DA MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

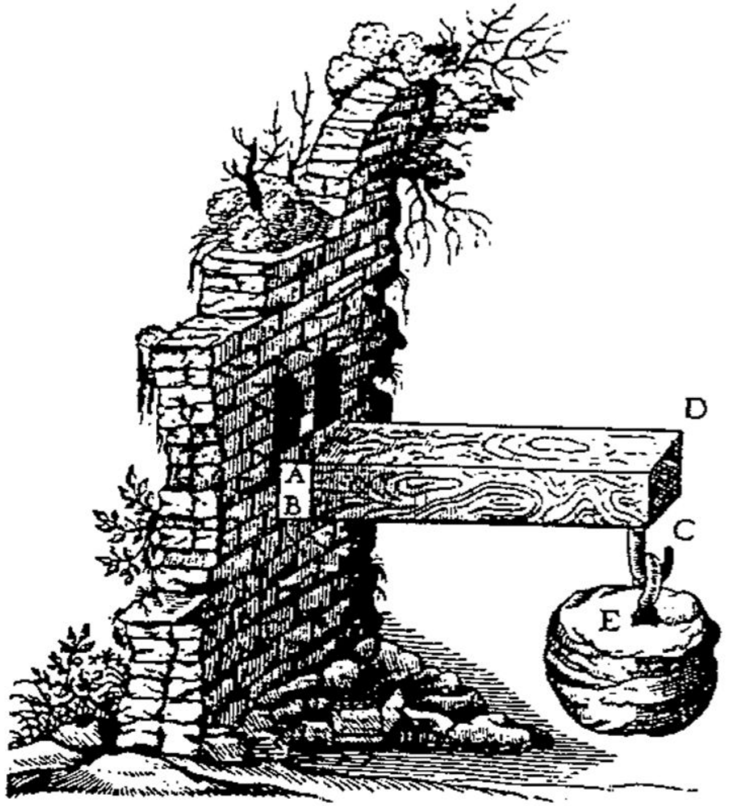
Estudar as leis e o comportamento das estruturas para levar o projeto seguro, econômico, durável e com sustentabilidade.

Introduzido por Galileu (1638) a abordagem de estruturas na ruptura: tamanho, carga



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

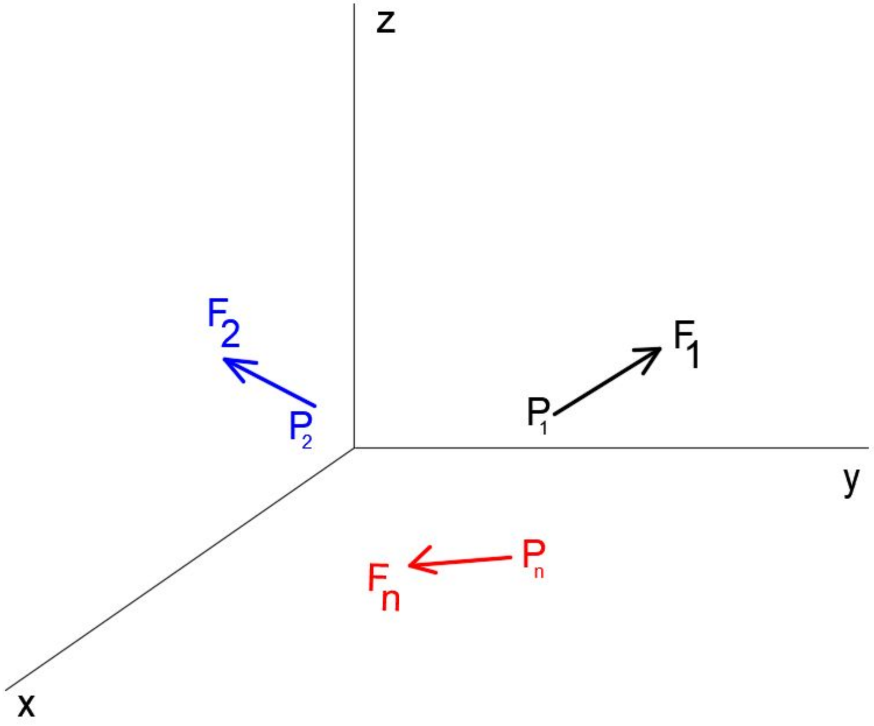
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.



Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a Due Nuove Scienze, 1638, Galileu Galilei

Recordação da estática dos sólidos rígidos

O conceito de força será introduzido por meio do 3º Princípio da Mecânica Clássica: "*Em cada instante, a ação mecânica de um corpo sobre um ponto material pode ser representada por um vetor (força interativa) aplicado no ponto*".



Dado um *sistema de forças* $S=\{(P_1,\vec{F}_1),(P_2,\vec{F}_2),\ldots,(P_n,\vec{F}_n)\}$, tem-se:

Definição 1.3

Resultante de S é a soma vetorial das forças que o compõem.

A resultante é indicada por $\vec{R}$, tendo-se então

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ .$$

$$R_x = \sum_i^n F_{xi} \qquad R_y = \sum_i^n F_{yi} \qquad R_z = \sum_i^n F_{zi}$$

Recordação da estática dos sólidos rígidos

<u>Definição 1.4</u>

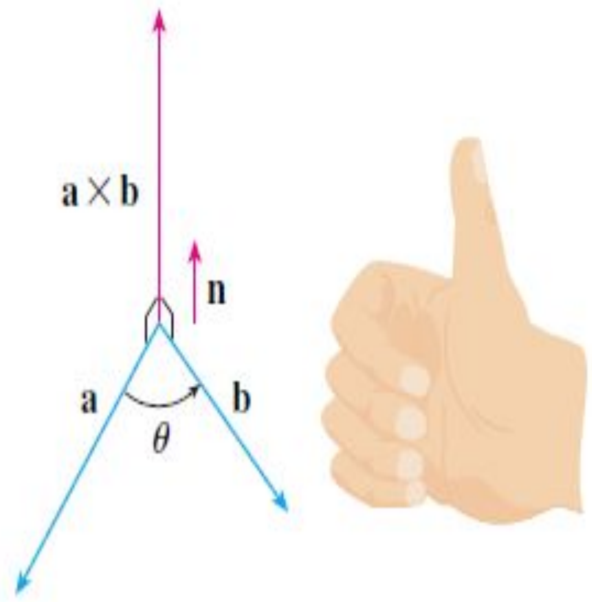
Momento de S em relação a um ponto O é a soma vetorial dos momentos de cada uma das forças do sistema em relação a esse ponto.

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}$$

Definição: Se $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ então o produto vetorial de a e b é o vetor:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \underbrace{(a_y b_z - a_z b_y)}_{\mathbf{c_x}}\mathbf{i} + \underbrace{(a_z b_x - a_x b_z)}_{\mathbf{c_y}}\mathbf{j} + \underbrace{(a_x b_y - a_y b_x)}_{\mathbf{c_z}}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



Recordação da estática dos sólidos rígidos

Regra da mão direita

Sabe-se que o momento $\vec{M}_O$ tem a direção da reta r da Figura 1.4, passando por O e perpendicular ao plano definido pela linha de ação de (P, $\vec{F}$) e pelo ponto O (plano π).

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \underbrace{(a_y b_z - a_z b_y)}_{\mathbf{c_x}}\mathbf{i} + \underbrace{(a_z b_x - a_x b_z)}_{\mathbf{c_y}}\mathbf{j} + \underbrace{(a_x b_y - a_y b_x)}_{\mathbf{c_z}}\mathbf{k}$$

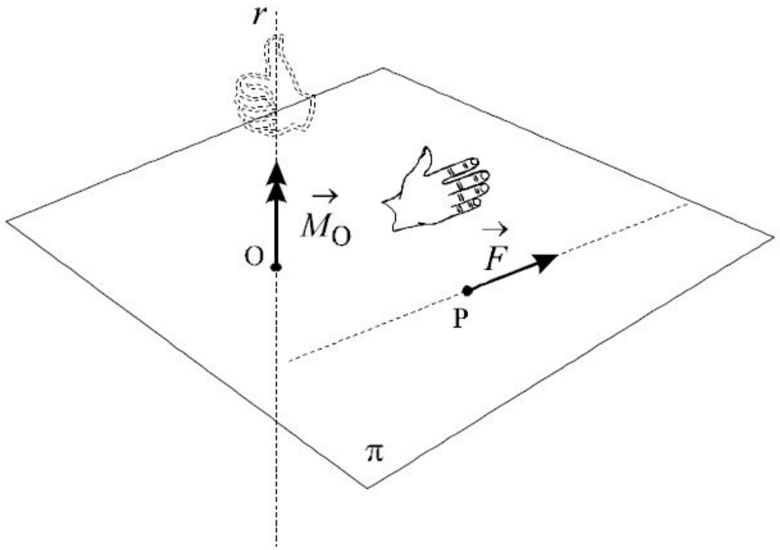


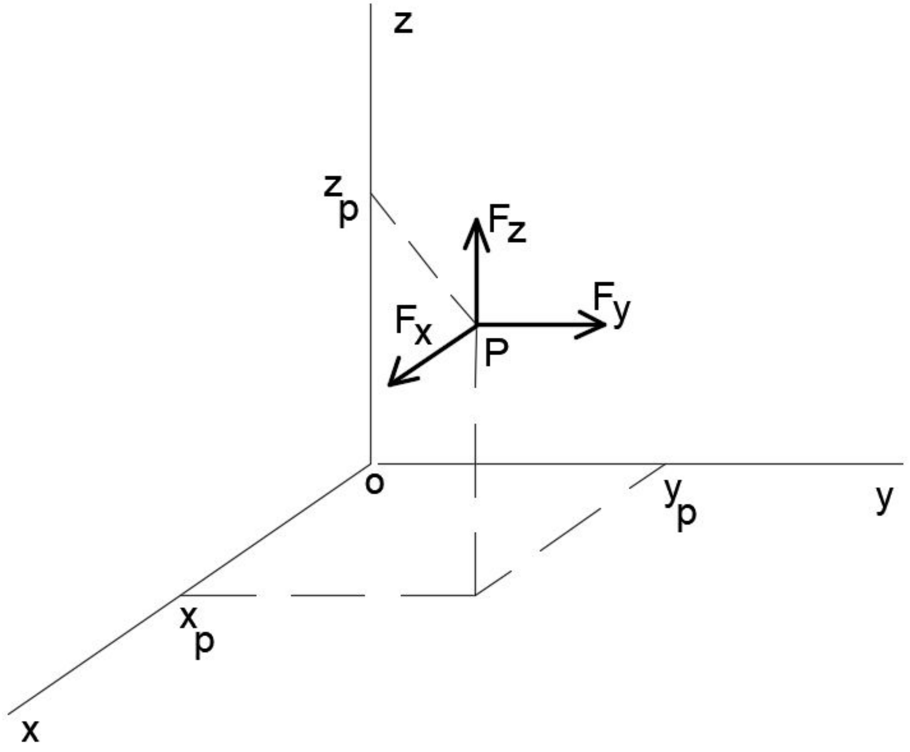
Figura 1.4

O sentido de $\vec{M}_O$ pode ser determinado da seguinte maneira:

- no plano que contém a linha de ação de (P, $\vec{F}$) e é perpendicular a π, coloque a mão direita com a palma voltada para a reta r e com os dedos no sentido de $\vec{F}$;
- deixe o polegar perpendicular aos demais dedos;
- o sentido de $\vec{M}_O$ é então o apontado pelo polegar da mão direita (Figura 1.4).

Recordação da estática dos sólidos rígidos

As forças em P geram que momento em “O”?



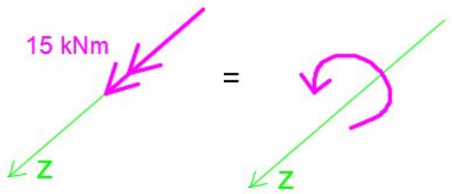
$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}$$

$$r = (x_p - x_o)i + (y_p - y_o)j + (z_p - z_o)k$$

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$M_0 = [(x_p - x_o)i + (y_p - y_o)j + (z_p - z_o)k] \wedge [F_x i + F_y j + F_z k]$$

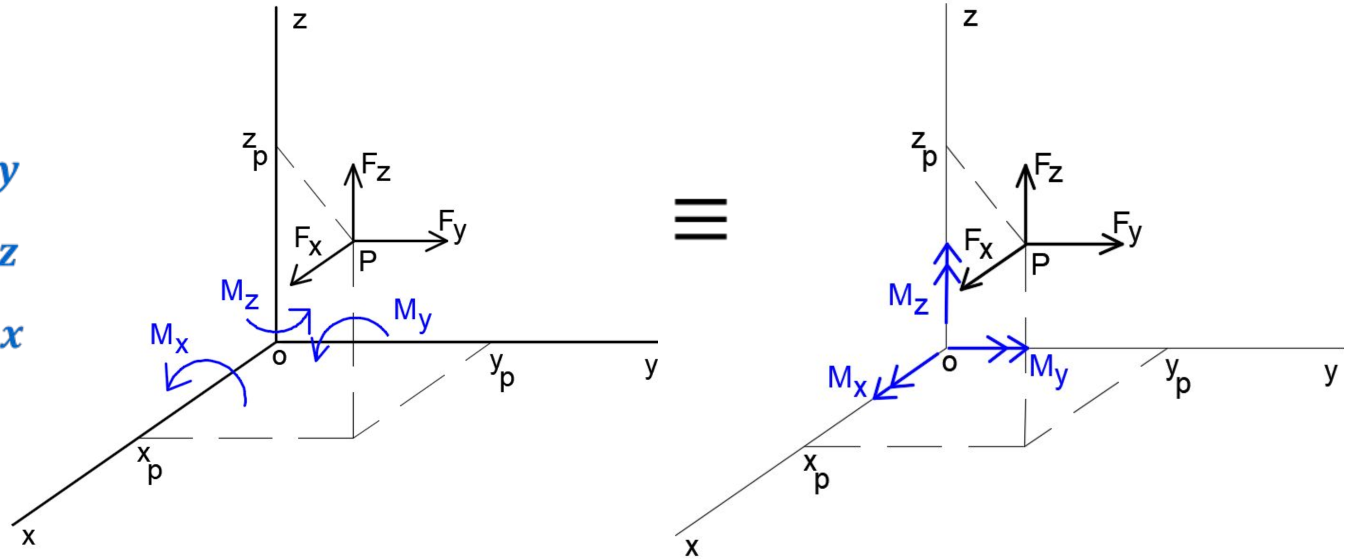
notações equivalentes



Recordação da estática dos sólidos rígidos

$$M_o = M_x i + M_y j + M_z k$$

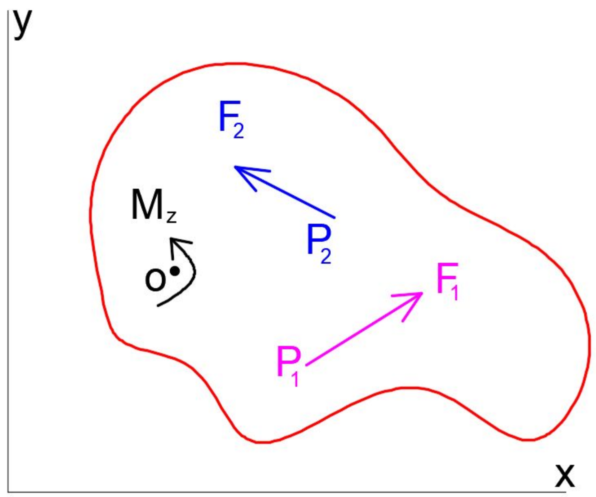
$$M_x = (y_p - y_o)F_z - (z_p - z_o)F_y$$
$$M_y = (z_p - z_o)F_x - (x_p - x_o)F_z$$
$$M_z = (x_p - x_o)F_y - (y_p - y_o)F_x$$



Sistema coplanar (Estruturas no plano)

$$R_x = \sum_i^n F_{xi} \qquad R_y = \sum_i^n F_{yi}$$

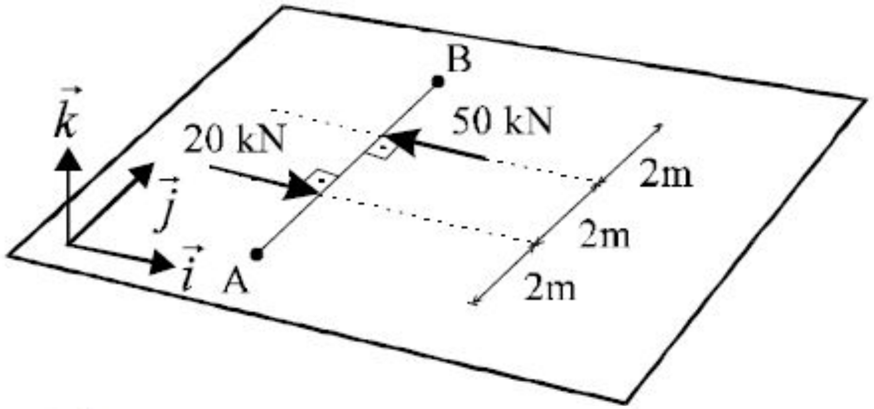
$$M_z = \mathbf{M} = (x_p - x_o)F_y - (y_p - y_o)F_x$$



Recordação da estática: sistema mecanicamente equivalentes

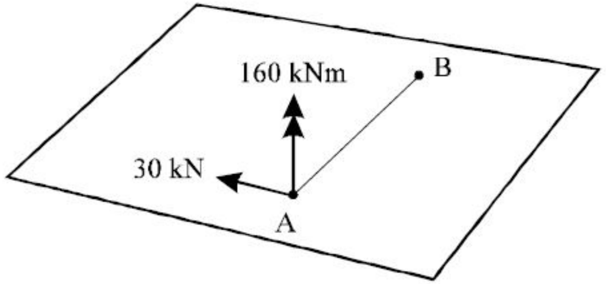
Diz-se que dois sistemas de forças S e S' são *mecanicamente equivalentes* quando suas reduções em um mesmo ponto genérico A levam aos mesmos esforços, isto é, $\vec{R} = \vec{R}'$ e $\vec{M}_A = \vec{M}'_A$.

Exemplo 1 Considere-se a barra da figura em que são aplicadas duas forças coplanares, que constituem o sistema de esforços S_I. Obtenha um sistema equivalente em A

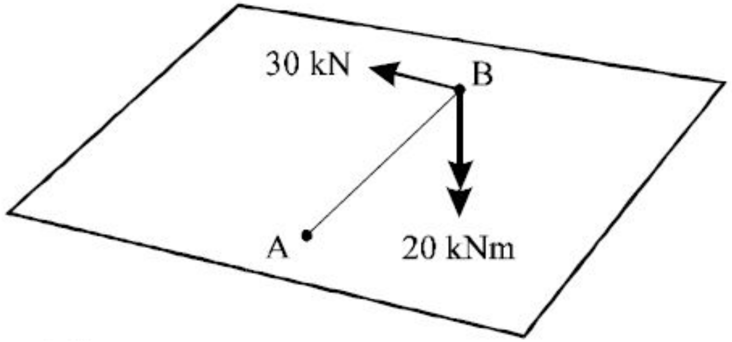


$$\vec{R} = 20\vec{i} - 50\vec{i} = -30\vec{i}$$

$$\vec{M}_A = -20 \cdot 2\vec{k} + 50 \cdot 4\vec{k} = 160\vec{k}$$



Sistema equivalente em B



Exemplo 2

Determinar para que ponto da barra da Figura 1.25 a redução do sistema de forças aplicadas conduz exclusivamente à resultante *R*.

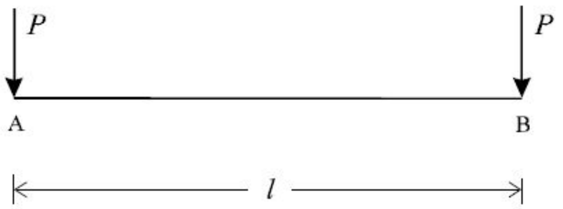


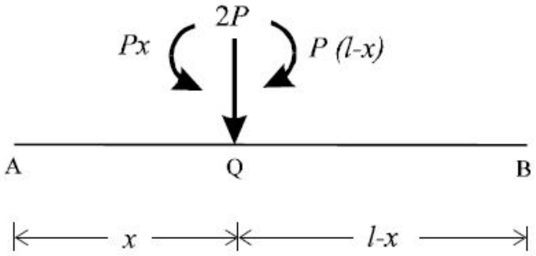
Figura 1.25

A solução direta consiste na redução do sistema em um ponto genérico Q da barra e na determinação de qual deve ser a posição do ponto Q para que o momento de redução se anule.

A redução do sistema em Q leva aos esforços indicados na Figura 1.26.

O momento de redução é

$$M_Q = P \cdot x - P \cdot (l - x)\,; \qquad (1.30)$$



$$M_Q = P \cdot x - P \cdot (l - x) = 0 \qquad (1.31)$$

$$2\, P \cdot x - P \cdot l = 0 \qquad (1.32)$$

$$x = \frac{l}{2}. \qquad (1.33)$$

Conclui-se, então, que o polo no qual o sistema de forças da Figura 1.25 se reduz exclusivamente à resultante é o ponto médio da barra, como se indica na Figura 1.27.

Como já se verificou, a redução de um sistema de forças em um ponto leva a um sistema mecanicamente equivalente ao sistema que já foi reduzido. São, portanto, mecanicamente equivalentes os dois sistemas representados na Figura 1.28, onde o símbolo ≡ indica a equivalência mecânica entre eles.

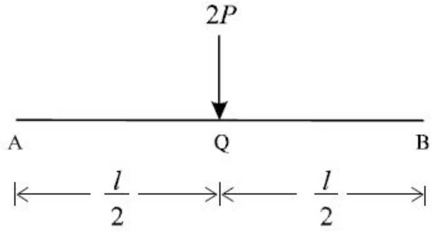


Figura 1.27

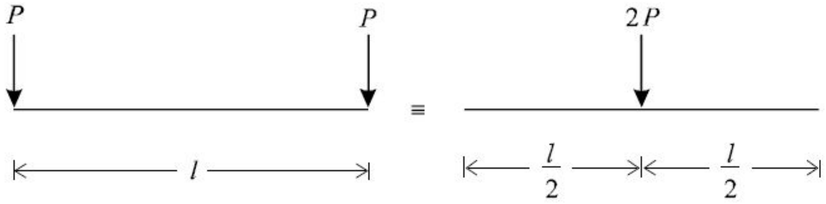


Figura 1.28

Exemplo 3

Aplicar na barra da Figura 1.31 uma única força mecanicamente equivalente ao sistema aplicado

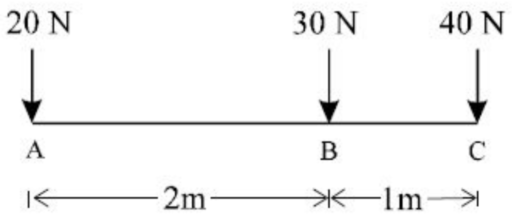


Figura 1.31

A força procurada é a resultante do sistema, mostrada na Figura 1.32.

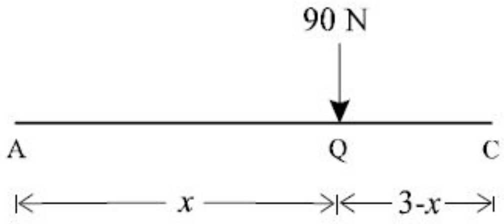


Figura 1.32

A redução do sistema da Figura 1.31 no ponto A leva ao momento

$$M_A = -30 \cdot 2 - 40 \cdot 3 = -180 \text{ Nm}\,; \tag{1.35}$$

a redução da resultante da Figura 1.32 nesse mesmo ponto leva ao momento

$$M_A = -90 \cdot x\,. \tag{1.36}$$

Impondo que esses dois momentos sejam iguais, obtém-se

$$M_A = -180 = -90 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{180}{90} = 2 \text{ m}\,. \tag{1.37}$$

São portanto mecanicamente equivalentes os dois sistemas da Figura 1.33.

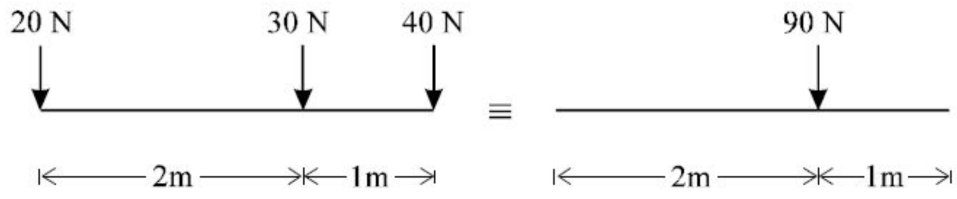
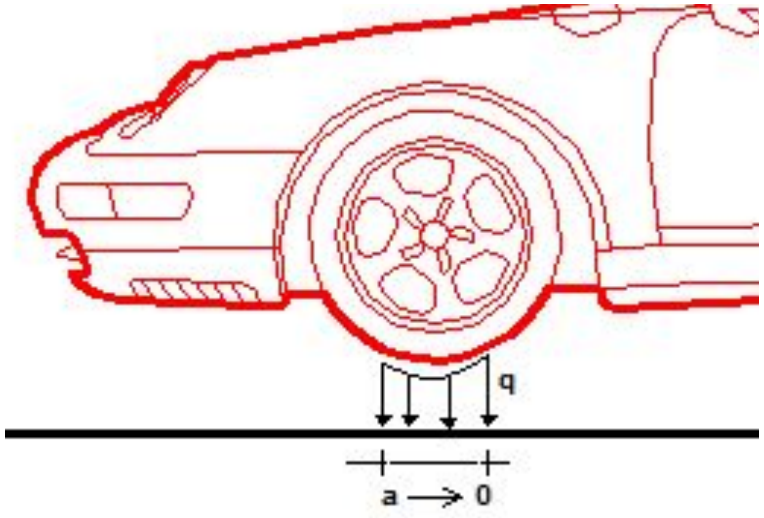
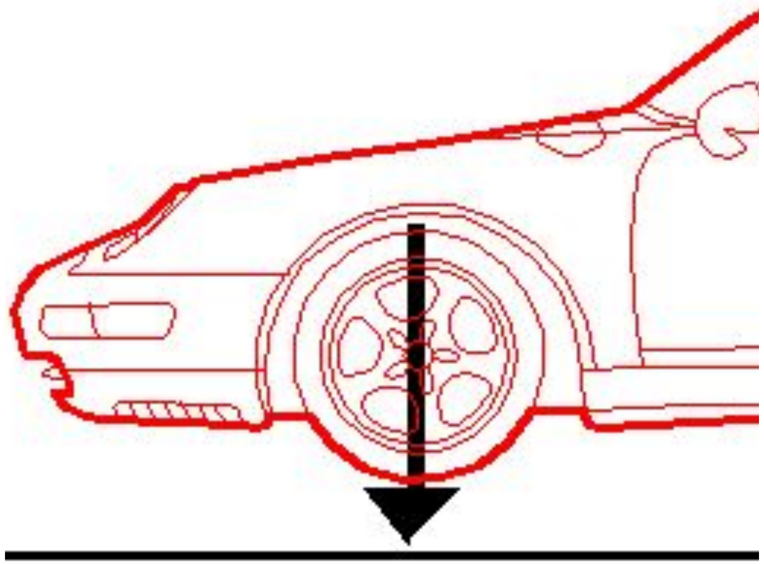


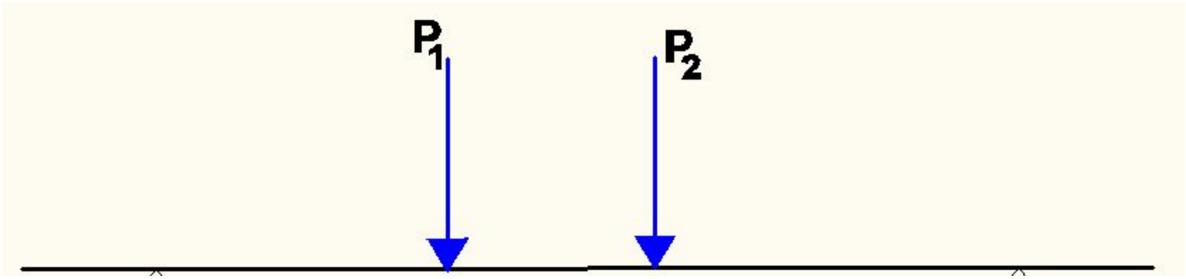
Figura 1.33

Ações: Tipos de cargas

a) Forças Concentradas

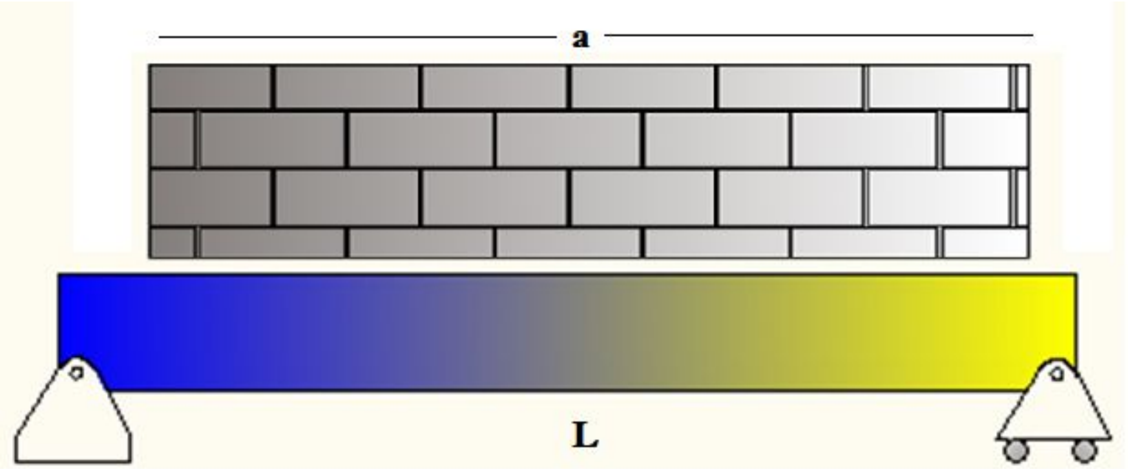


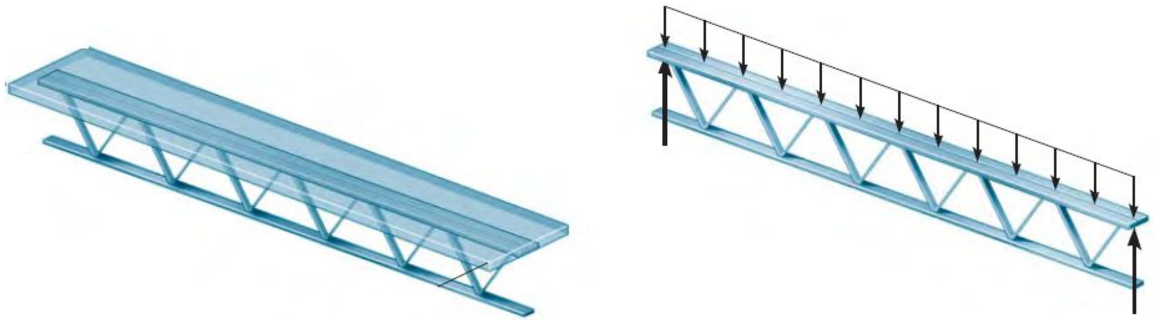


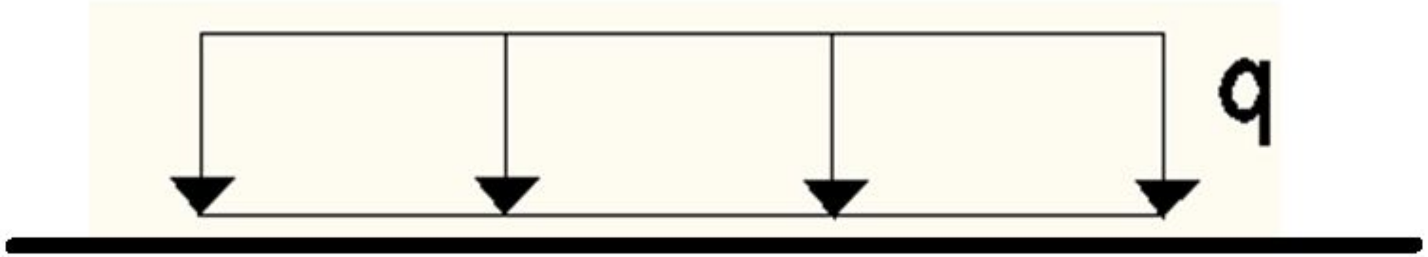


Ações: cargas distribuídas (q, unidade: F/L)

b) Carga distribuída constantemente Ex.: parede sobre uma viga



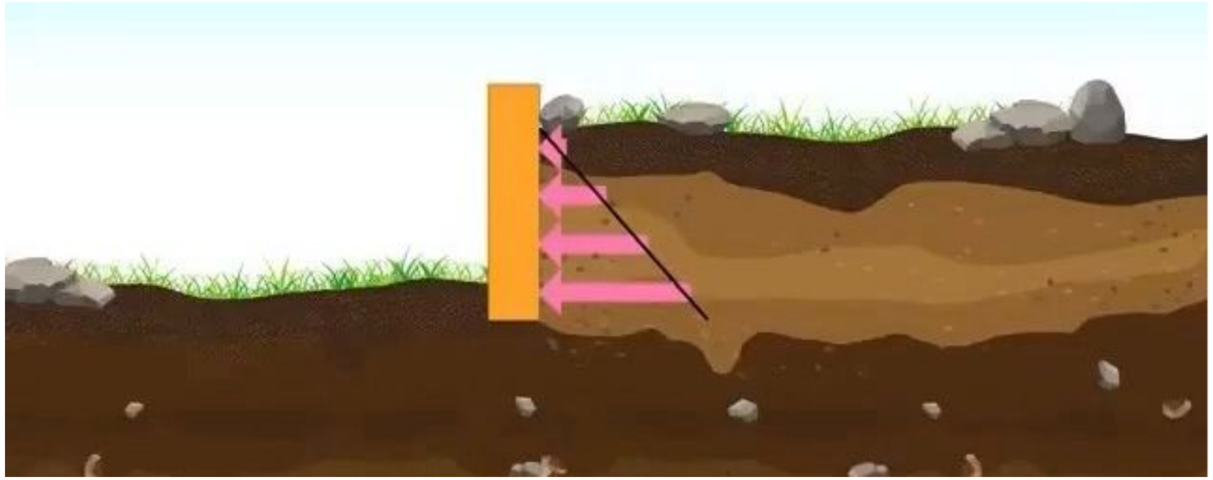


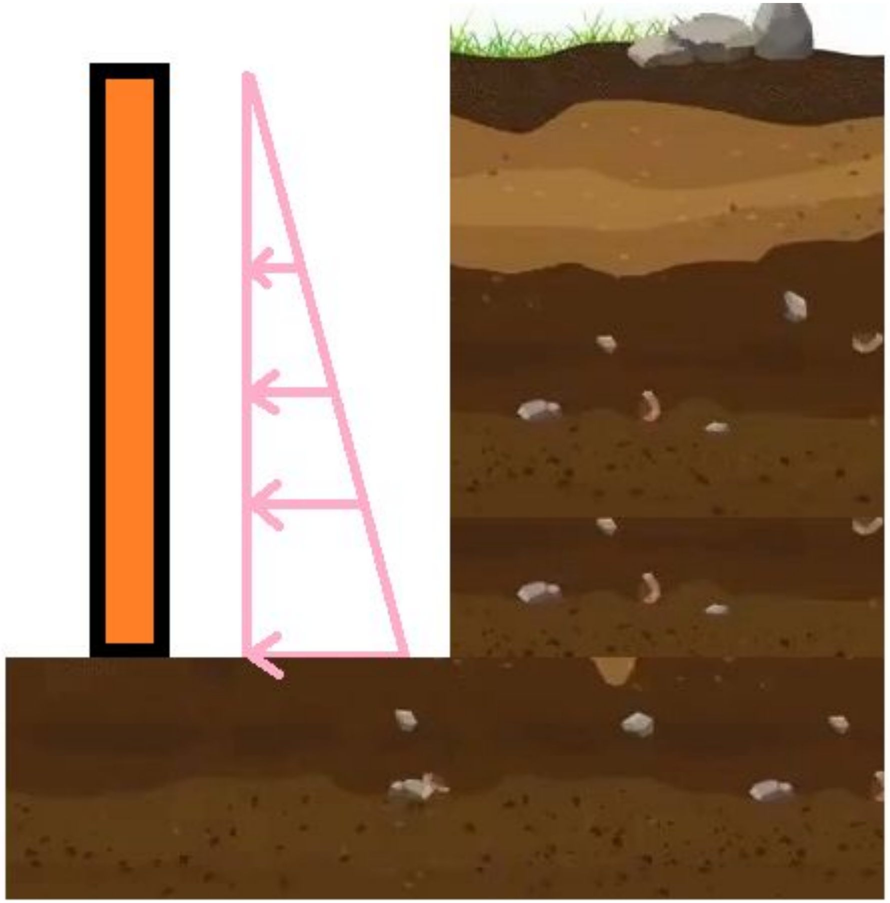


a não é muito pequeno em relação a ***L***

Ações: cargas distribuídas (q, unidade: F/L)

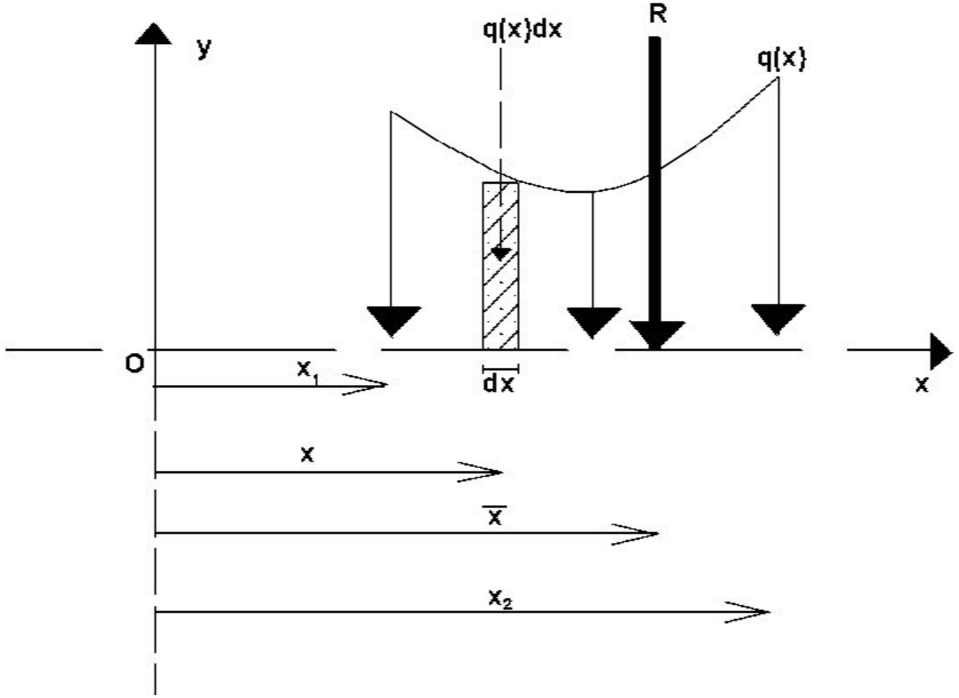
c) Carga distribuída linearmente
Ex.: empuxo de terra, água





Ações: cargas distribuídas (q, unidade: F/L)

Como calcular a resultante da carga distribuída?



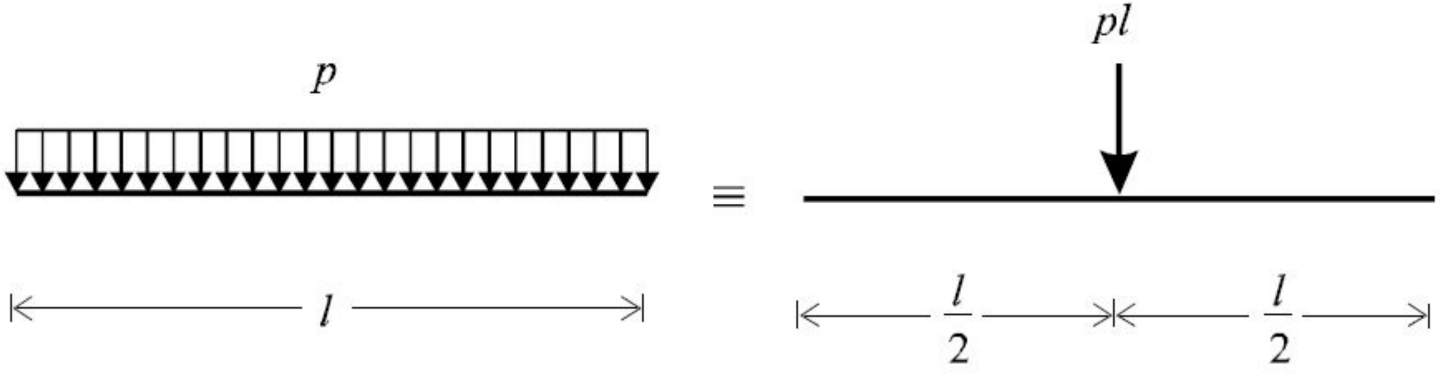
$$R = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} dF = Área$$

E qual é a posição da resultante (R)?

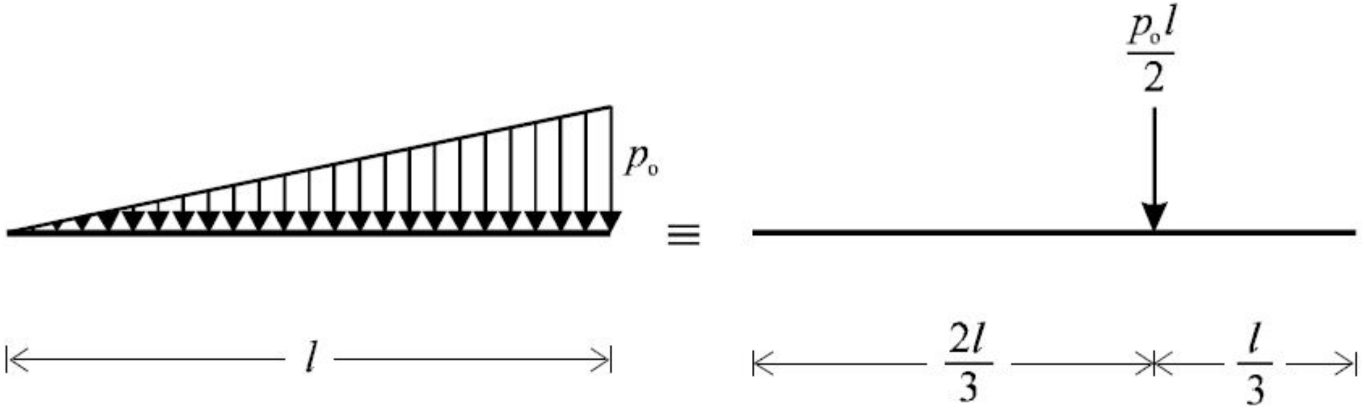
$$\bar{x} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx}{R} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx}{A} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx}{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot dx} (CG\ da\ área)$$

Substituindo o carregamento distribuído por uma força concentrada estaticamente equivalente para os dois casos a seguir, tem-se as respostas indicadas.

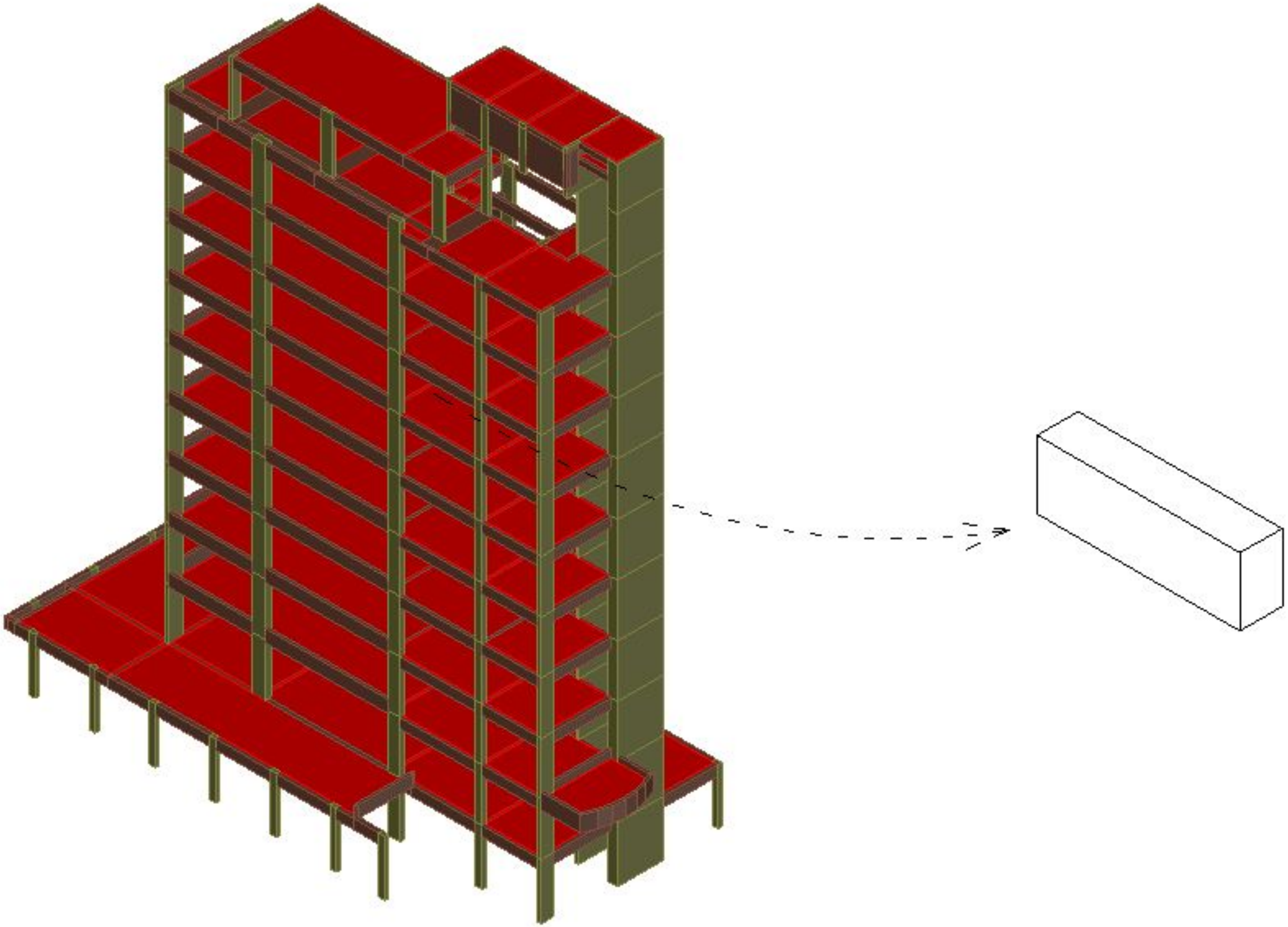
Exemplo 4



Exemplo 5



Separe um corpo de uma estrutura

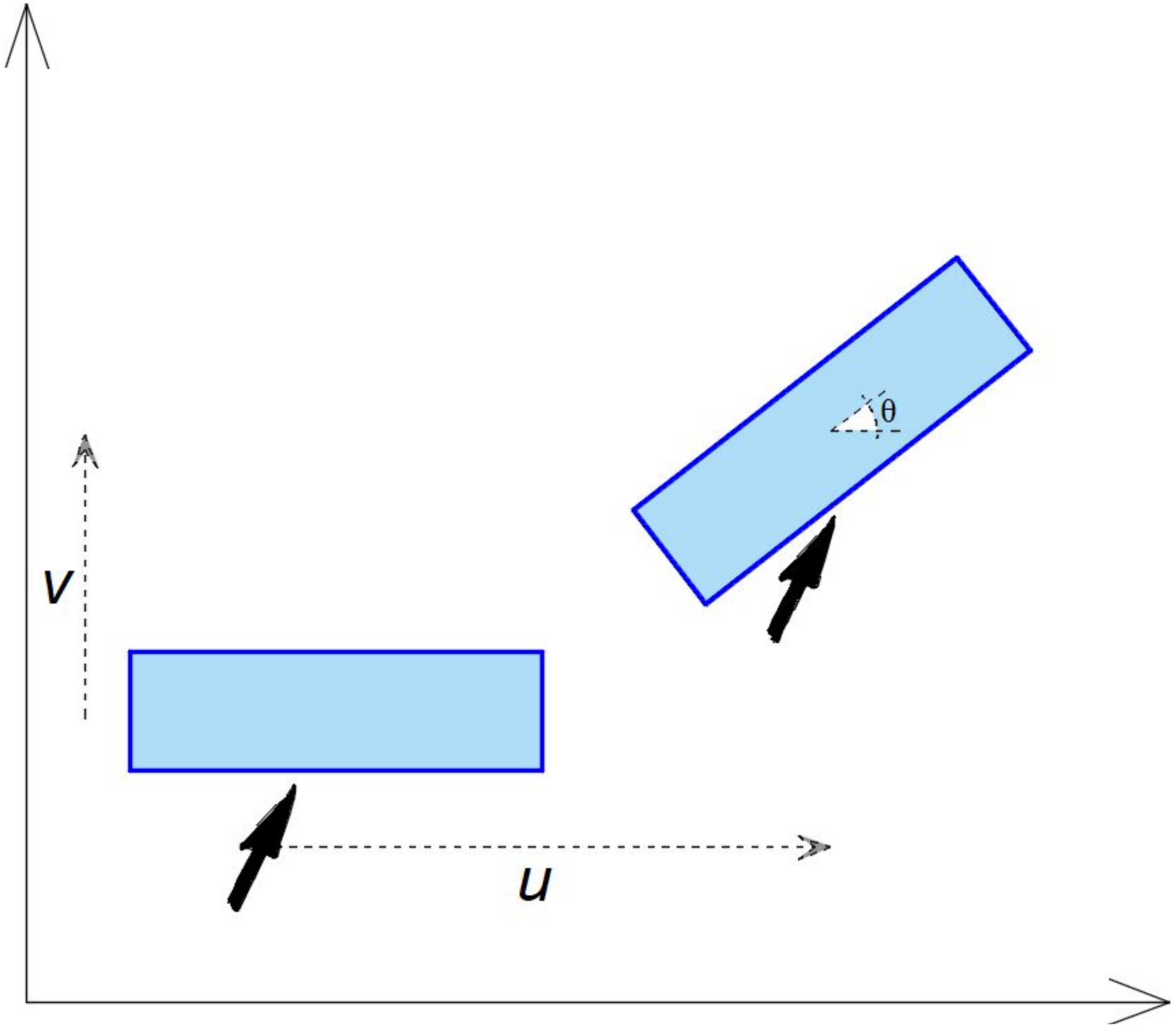


Movimento de um sistema material plano

Duas translações e uma rotação

Se corpo sem restrição

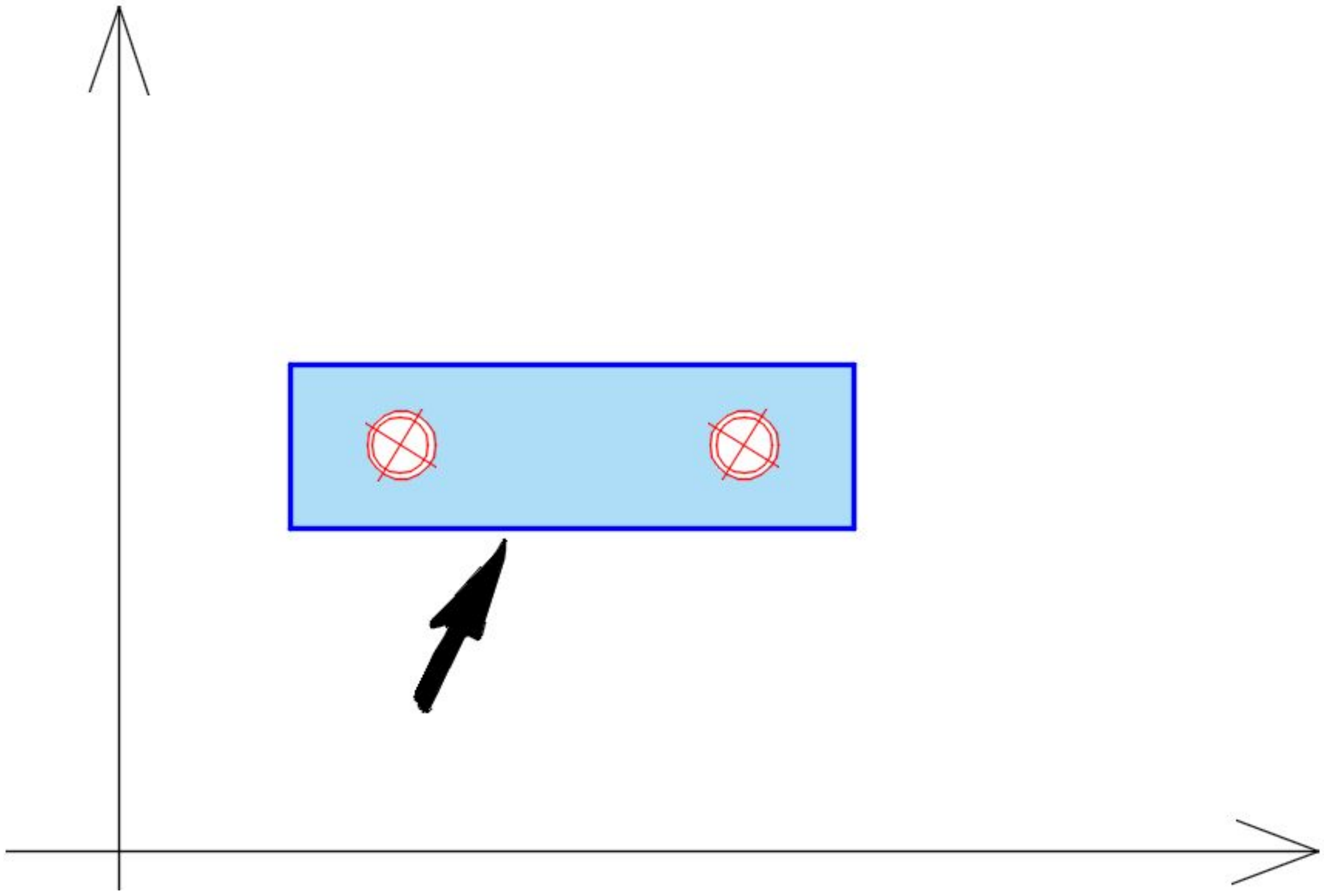
Com Movimento de Corpo Rígido



todo o corpo translada e rotaciona

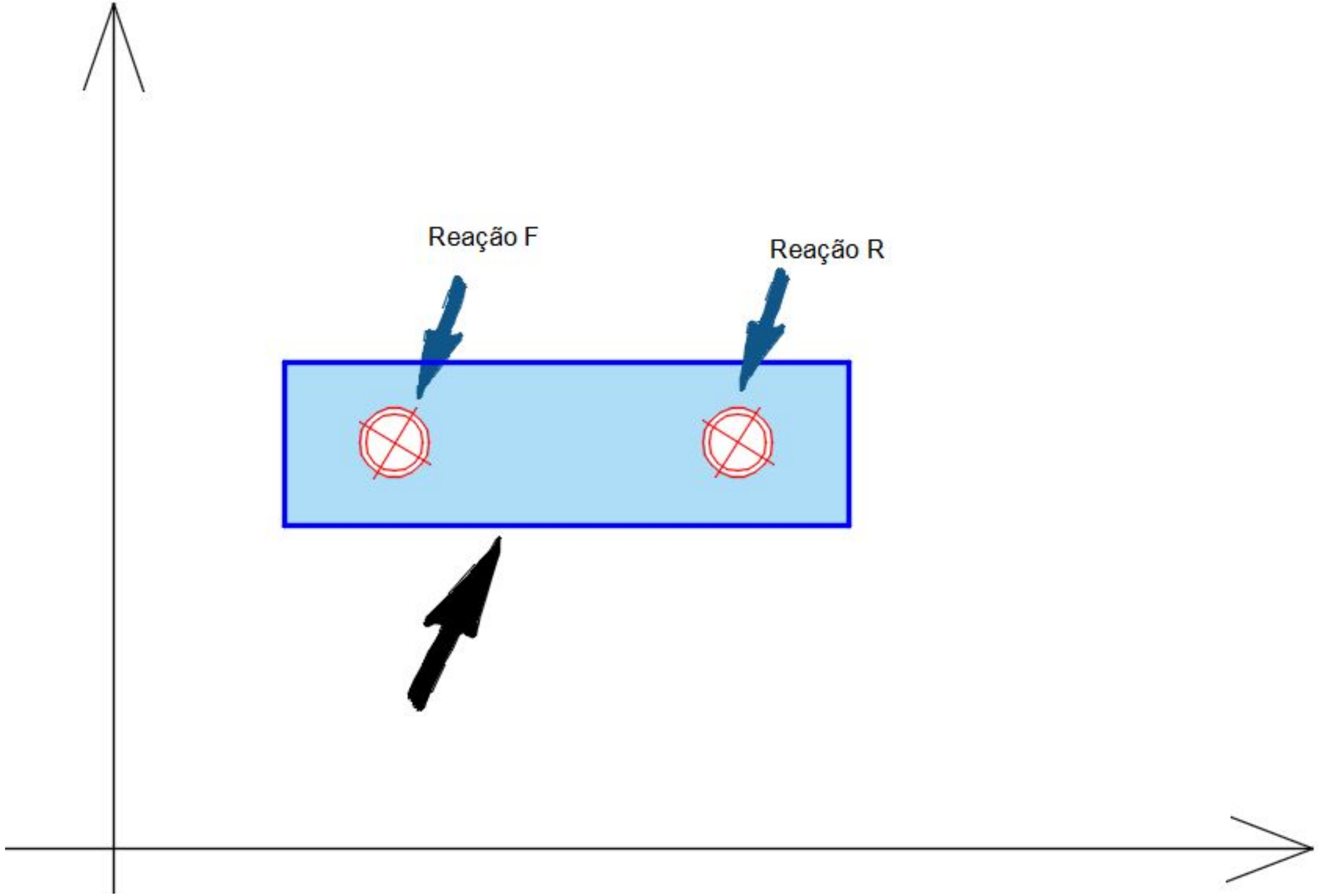
Se corpo com restrição de movimento

Sem Movimento de Corpo Rígido

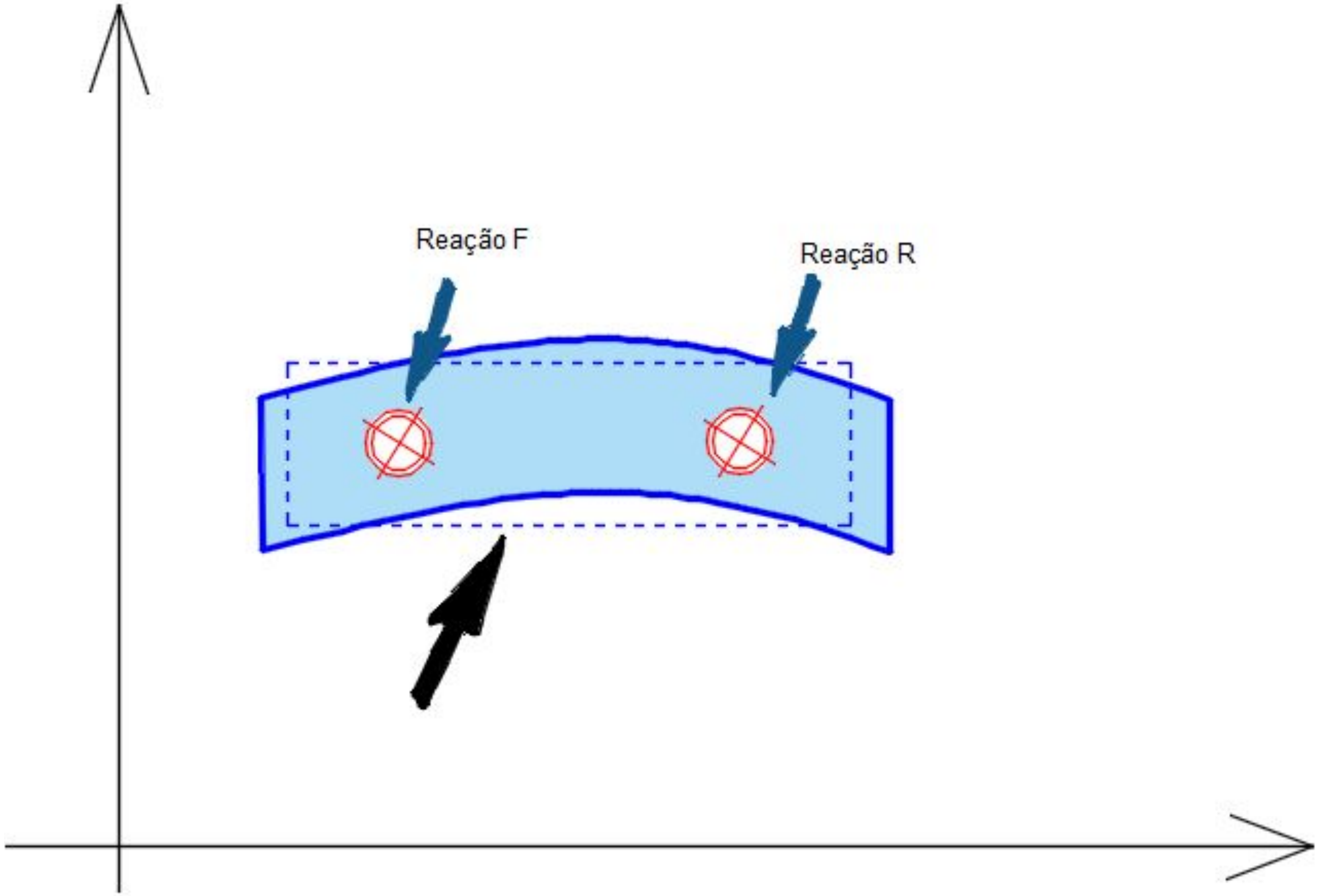


Se corpo com restrição de movimento

Reações impedem Movimento de Corpo Rígido



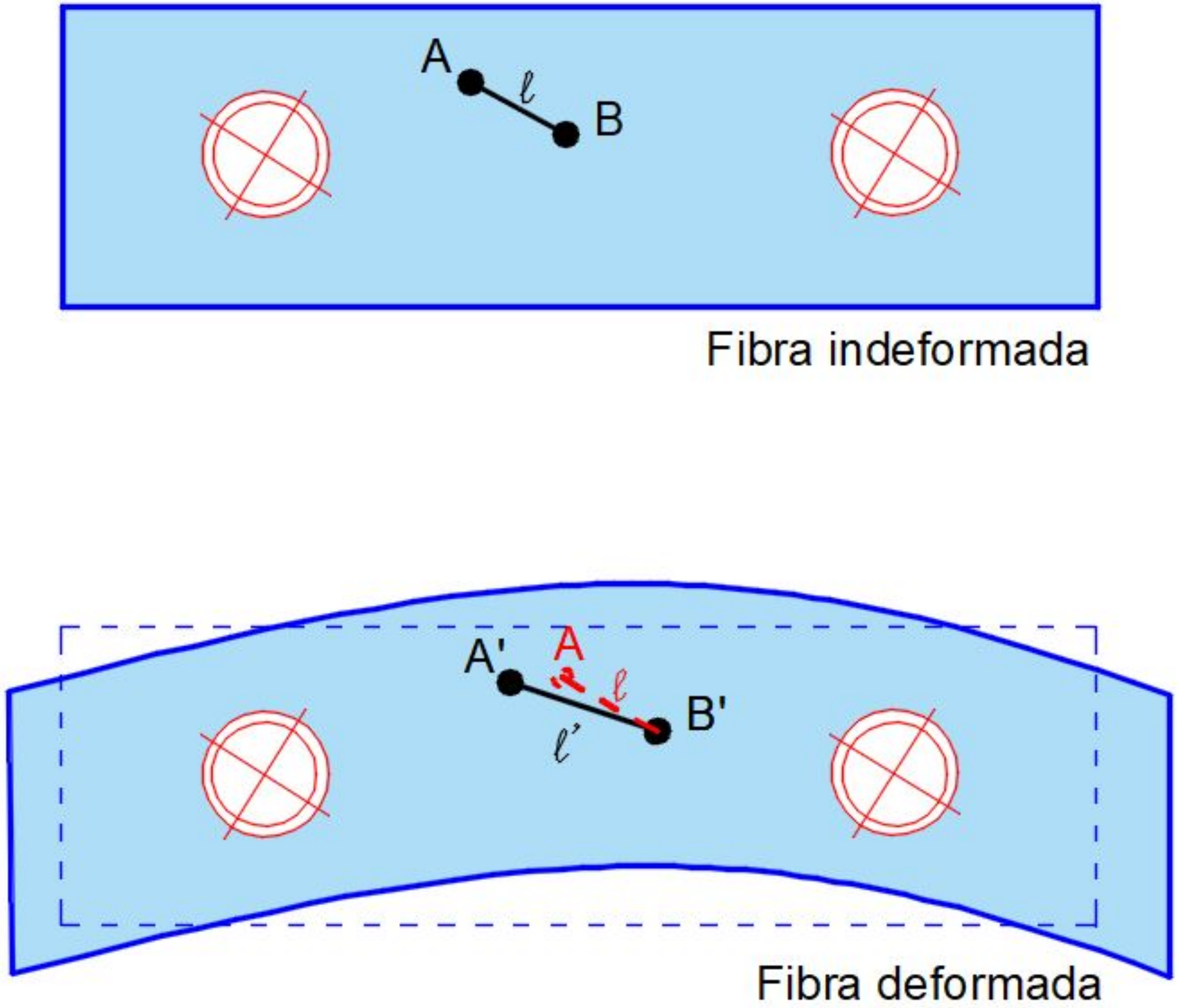
Se corpo com restrição de movimento



Corpo tem mudança de forma

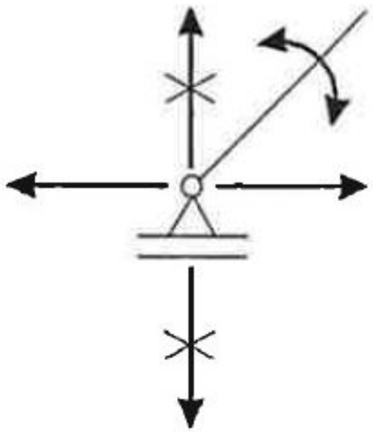
- **Corpos deformáveis**

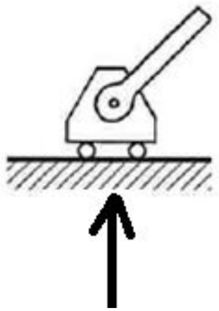
Grande interesse na mudança de forma do corpo: movimentação inter-atômica dos cristais.

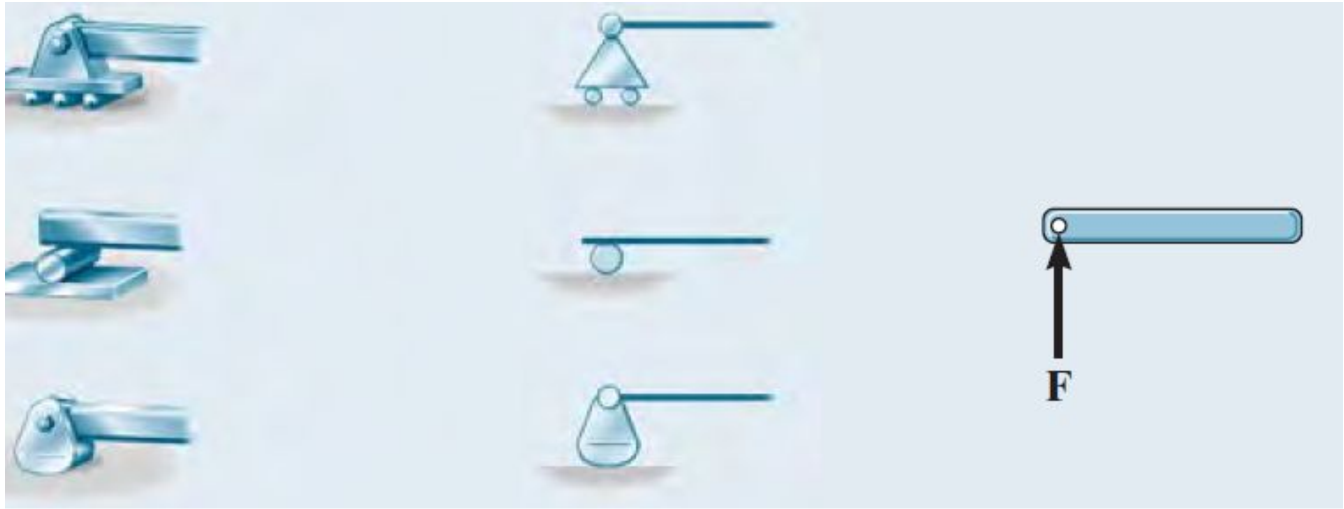


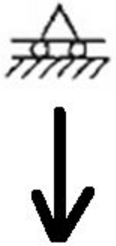
Restrições de movimento e reações associadas (plano)

a) 1º. Gênero ou articulação móvel ou apoio simples: impede uma translação



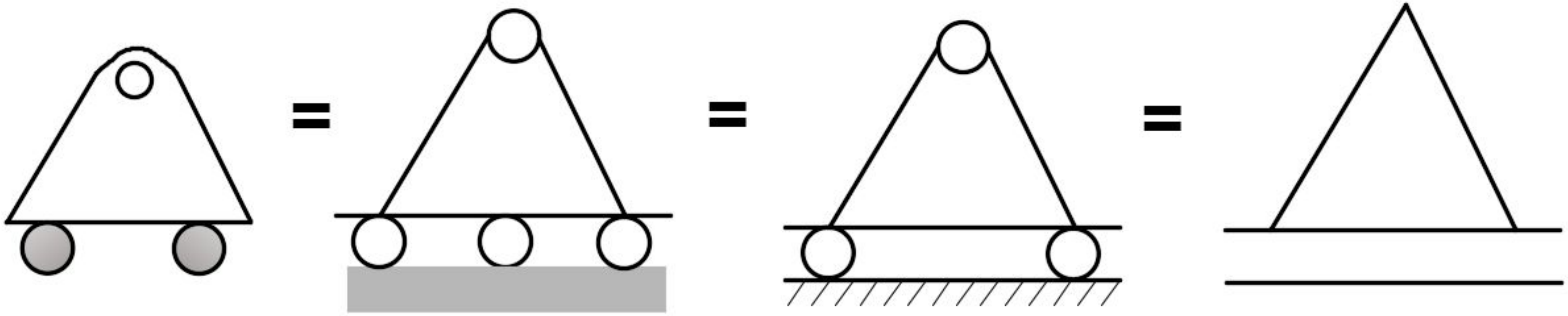






Tipos de apoios

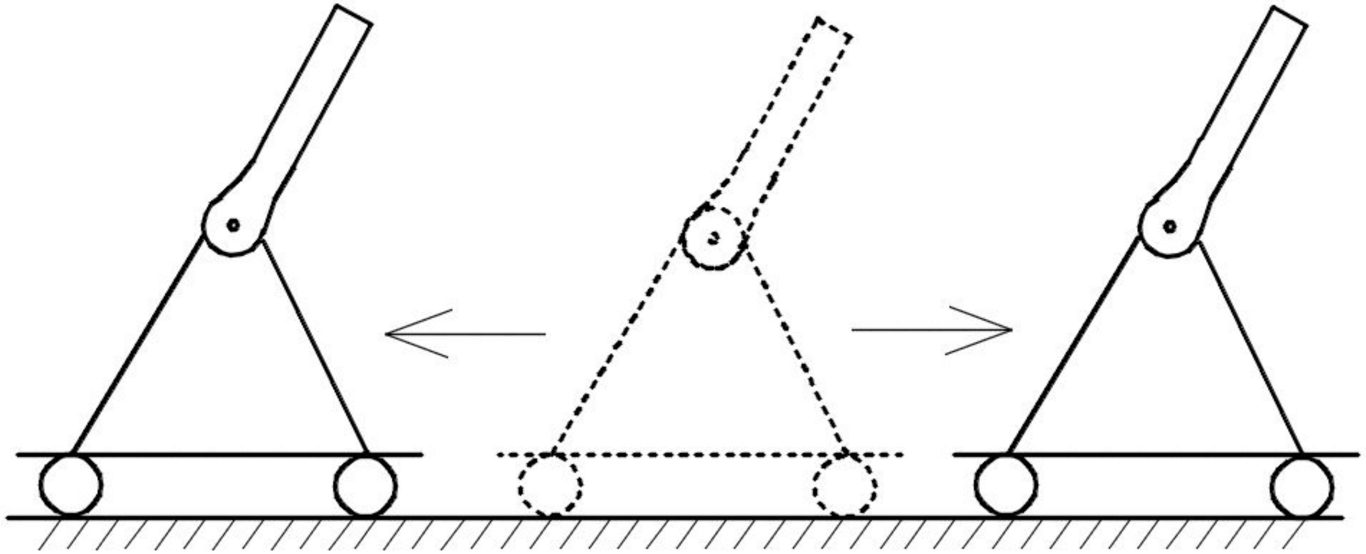
a) 1º. Gênero ou articulação móvel, apoio móvel: impede uma translação

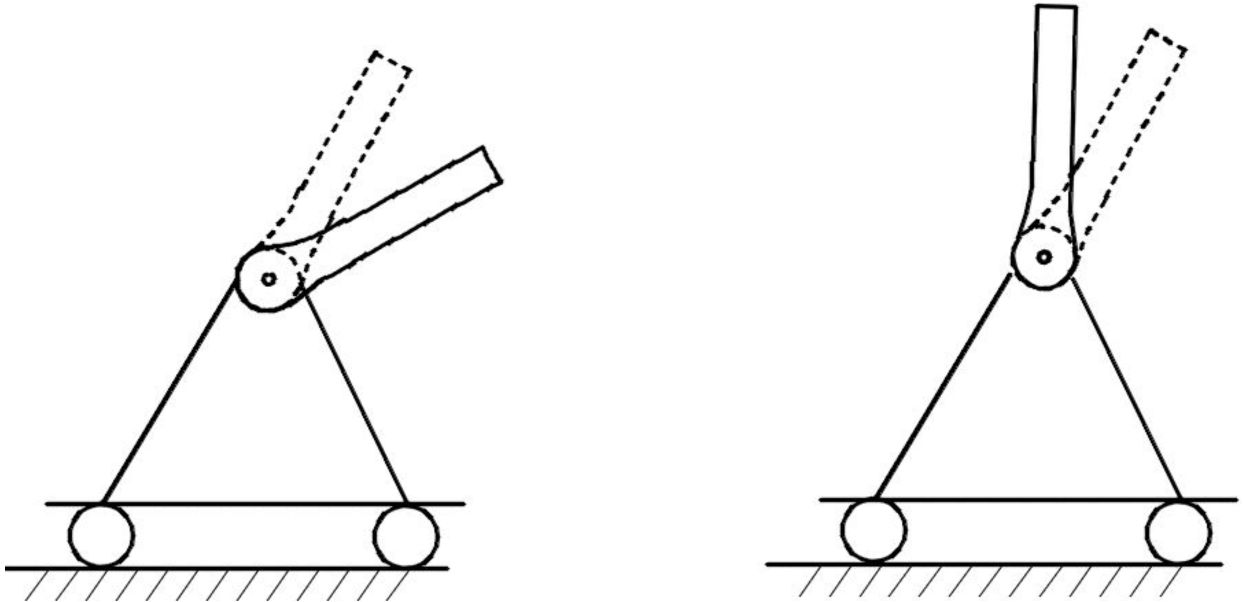


representação de apoio móvel

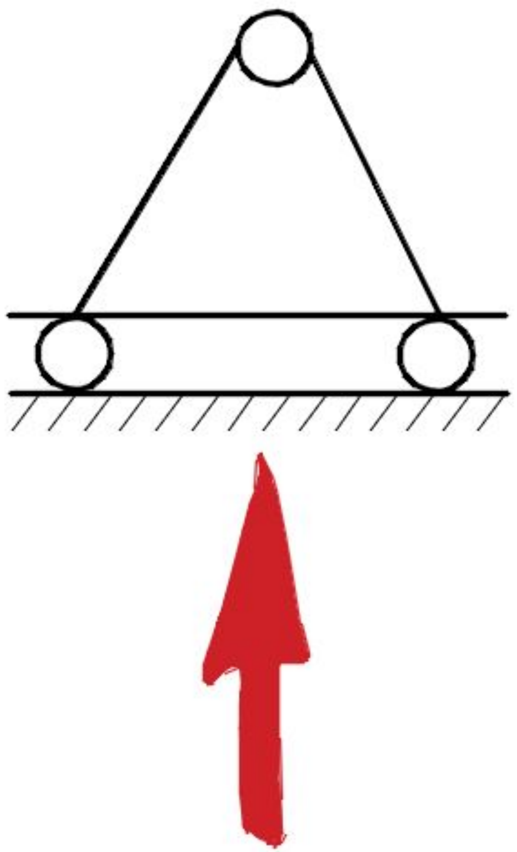
Apoio móvel

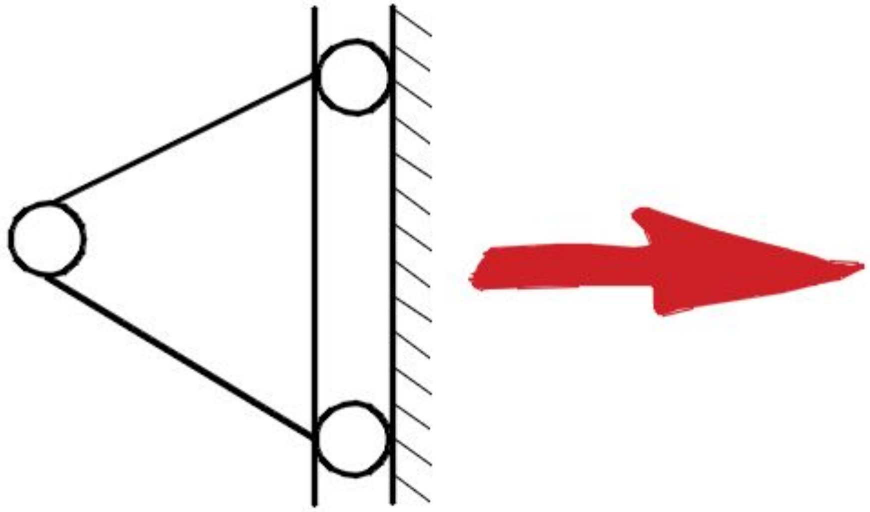
Livre para uma translação e rotação do ponto de vínculo





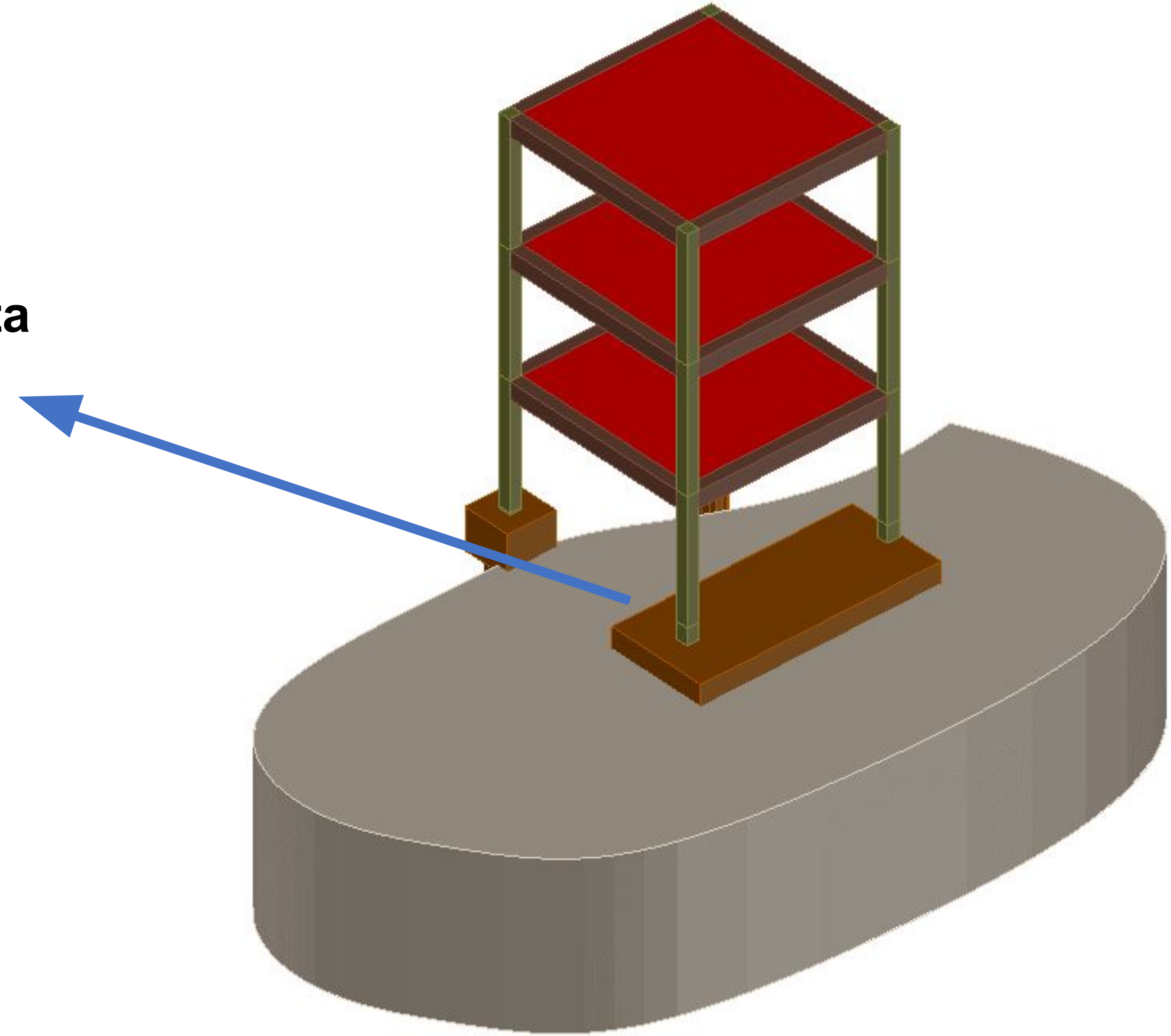
Reação associada



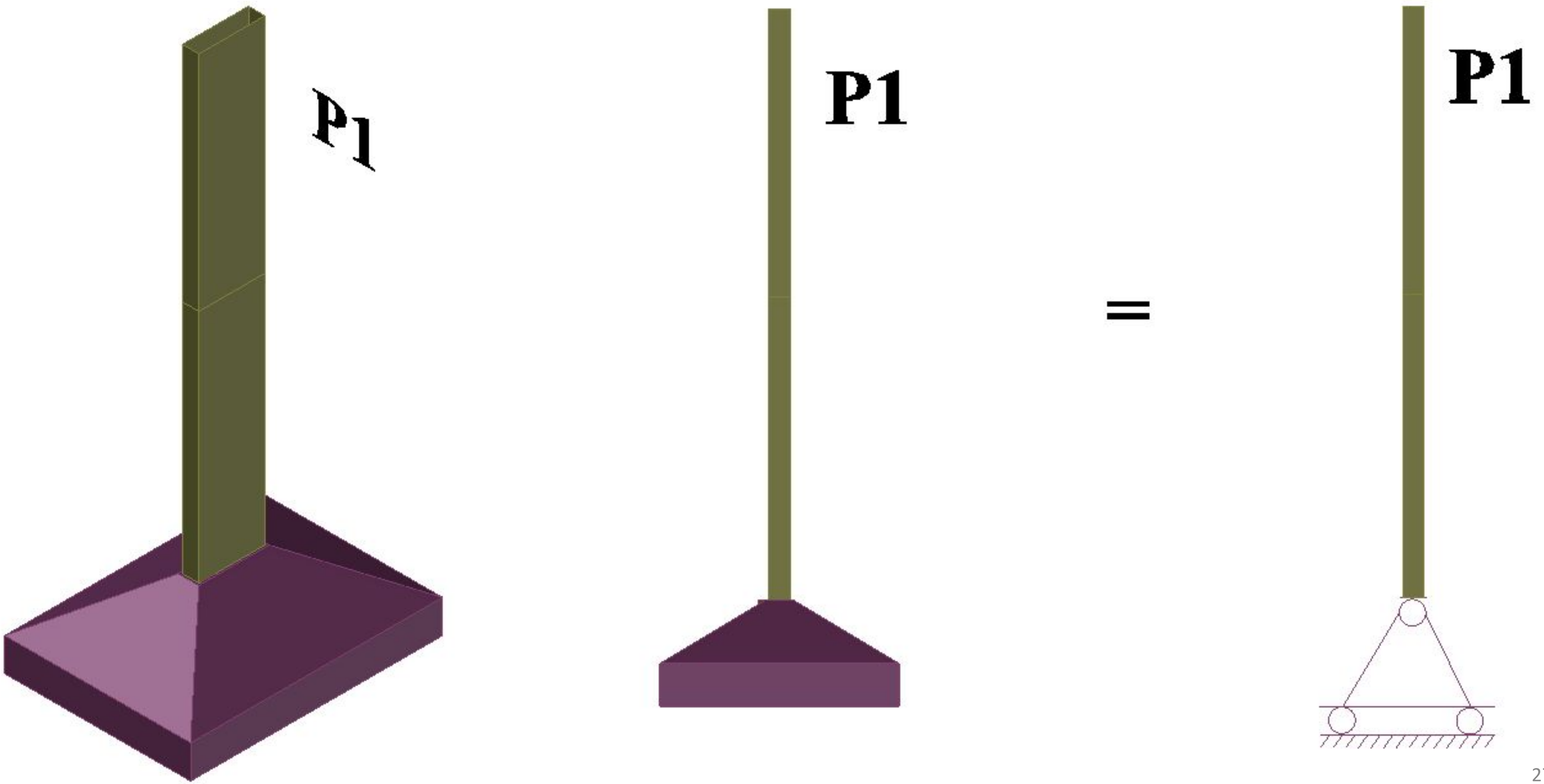


Apoio móvel

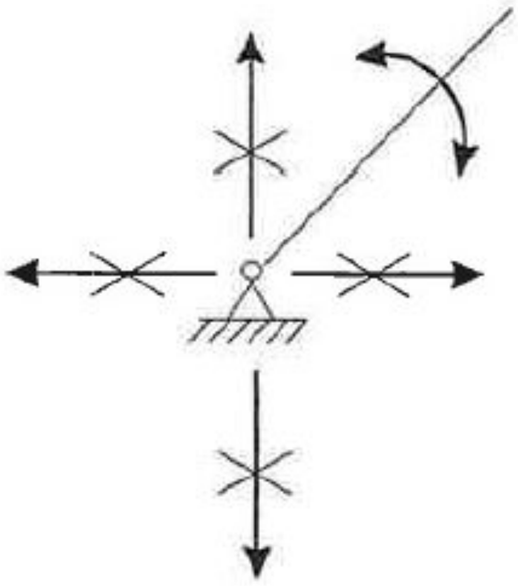
Fundação rasa: sapata

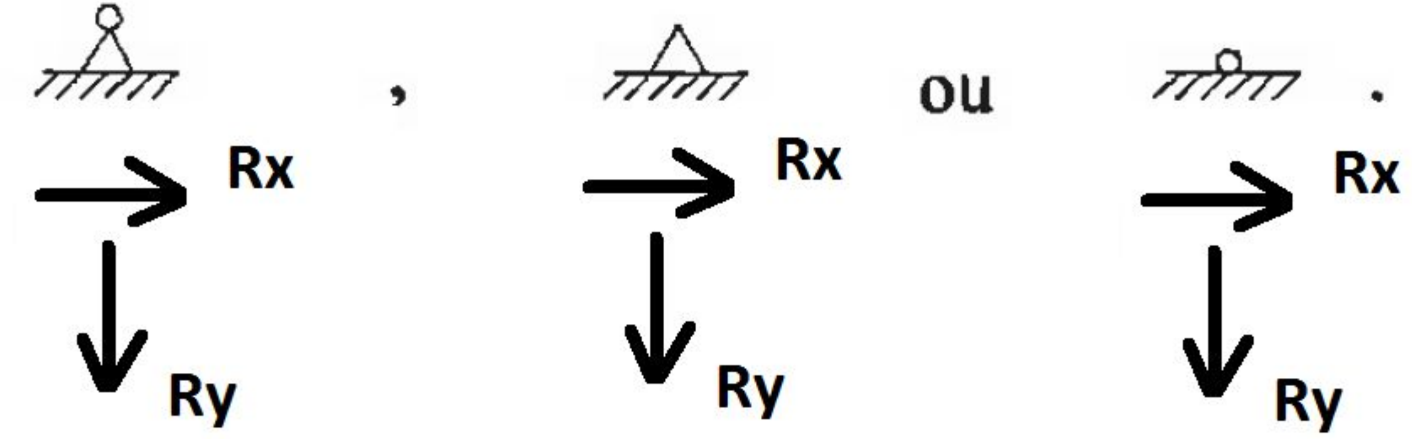


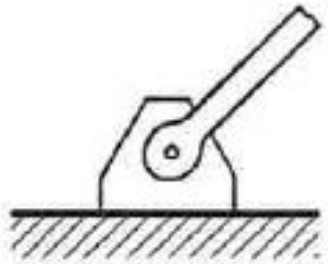
Fundação rasa: sapata

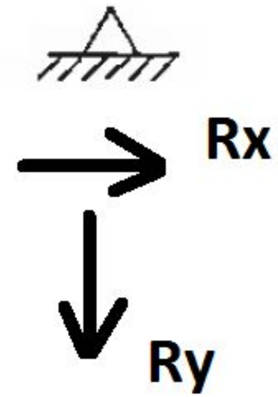


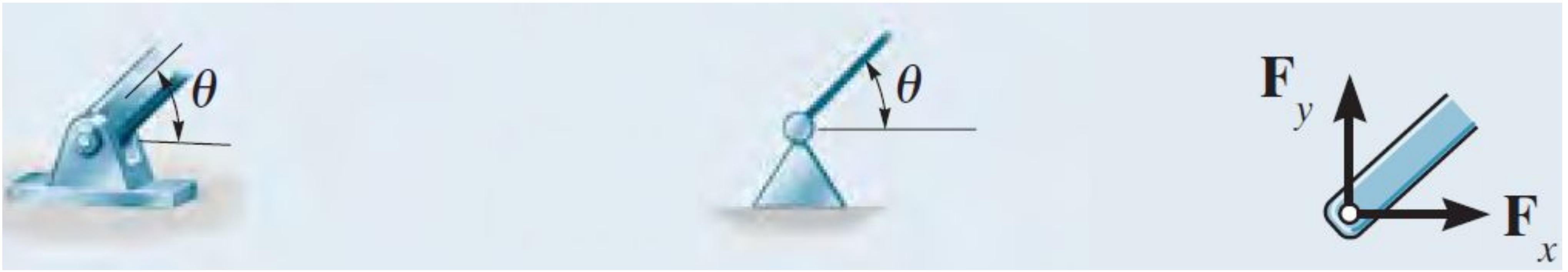
b) 2º. Gênero ou articulação fixa/apoio fixo: impedem duas translações



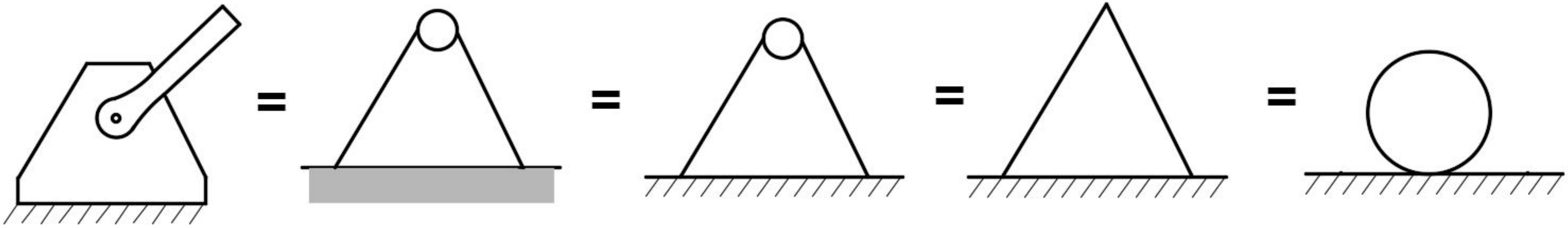






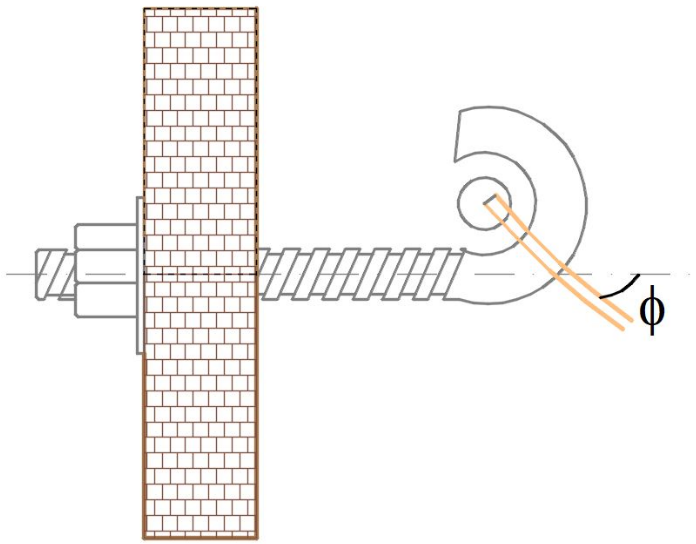


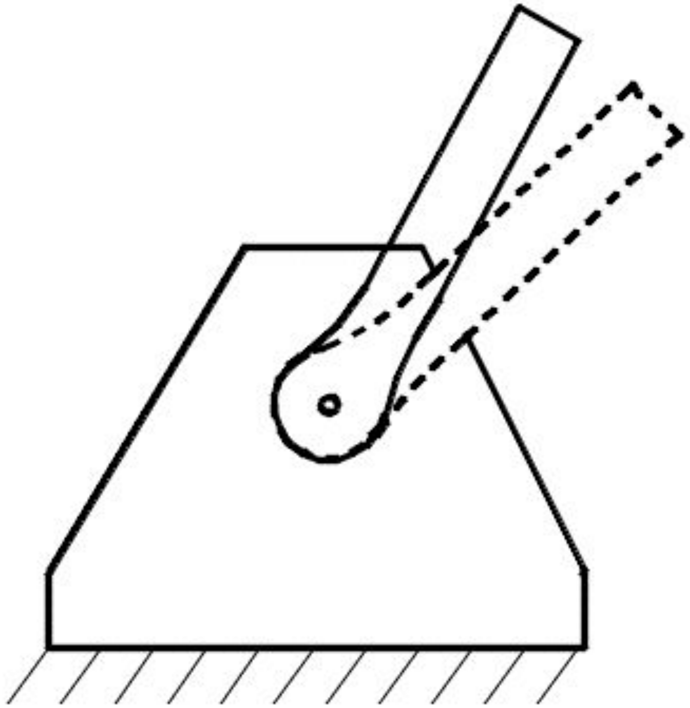
b) 2º. Gênero ou articulação fixa/apoio fixo: impedem duas translações

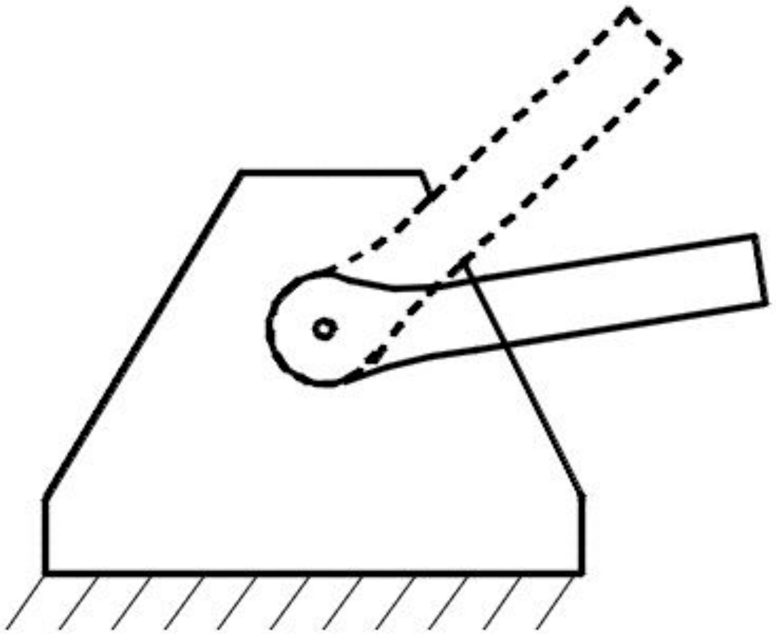


representação de apoio fixo

b) 2º. Gênero ou articulação fixa/apoio fixo: impedem duas translações

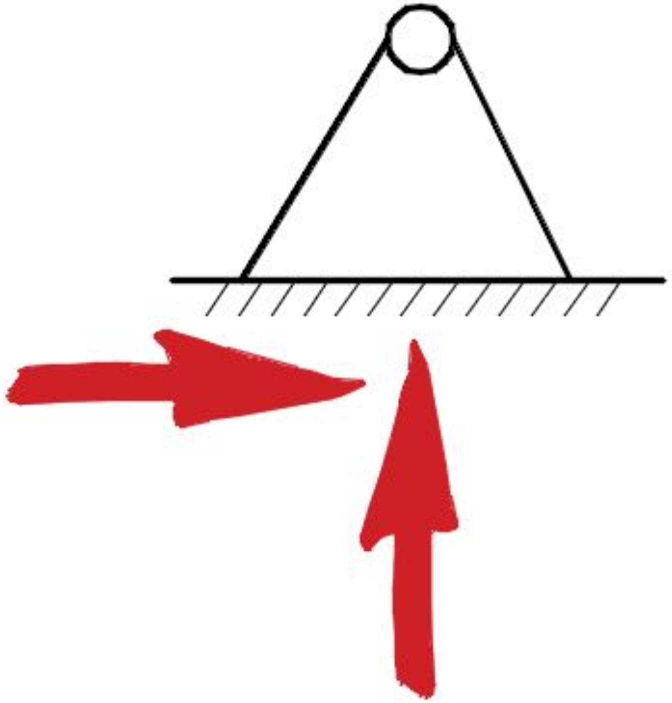


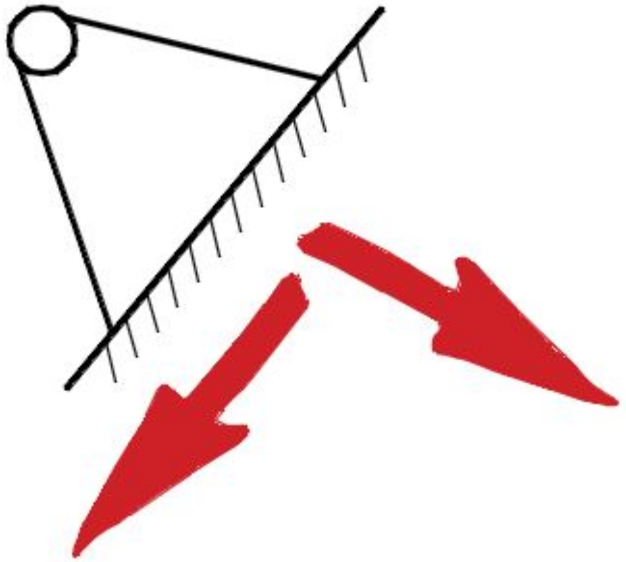




Apoio fixo

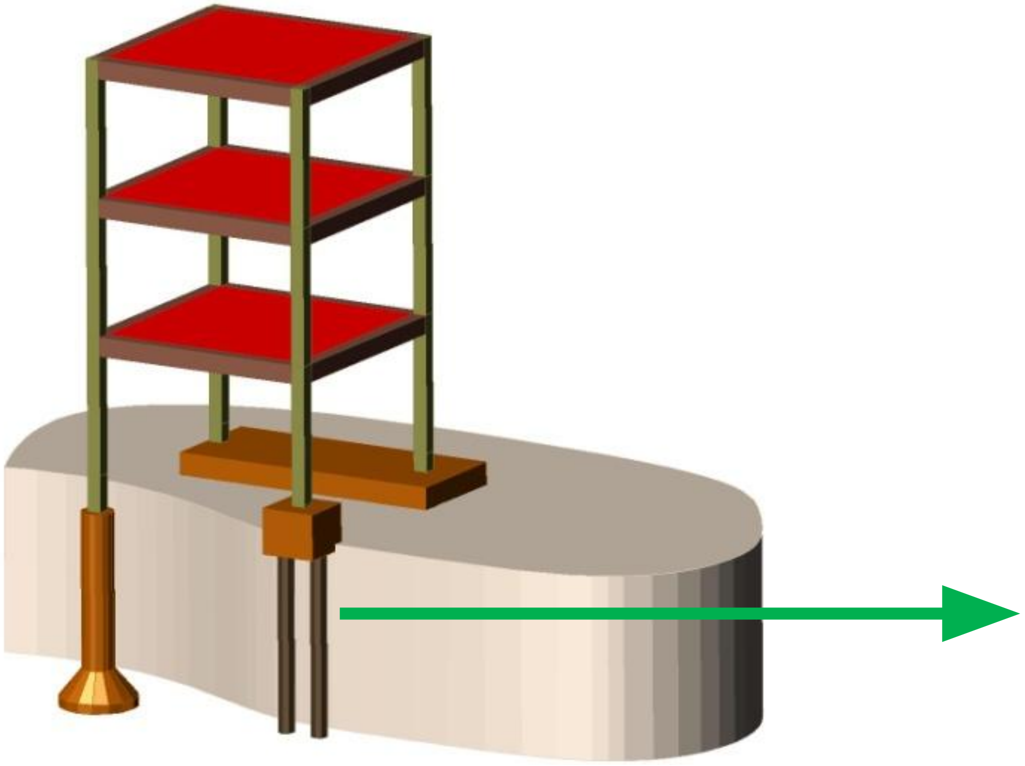
Reações associadas

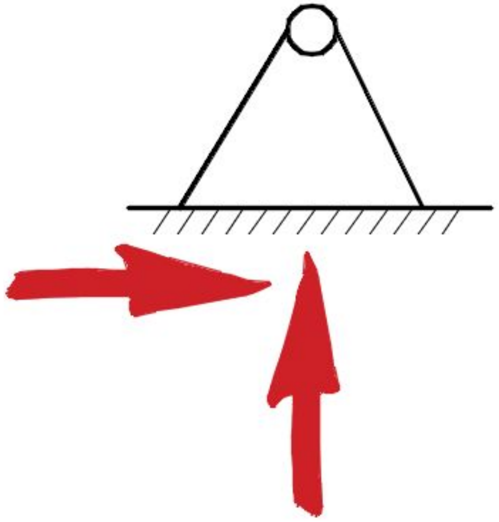




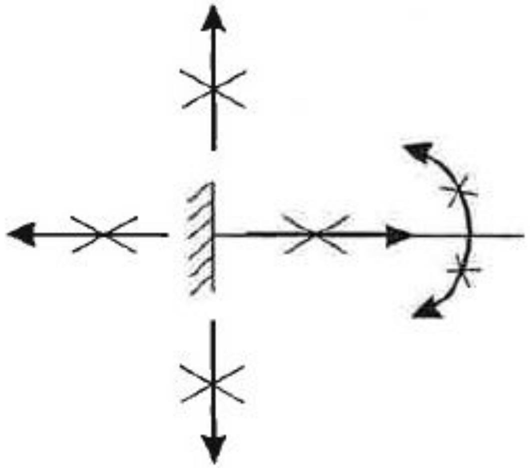
Apoio fixo

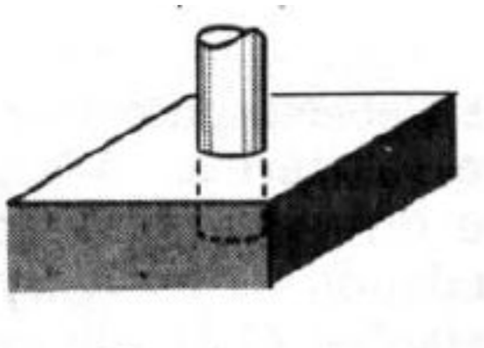
Fundação profunda bloco com estacas



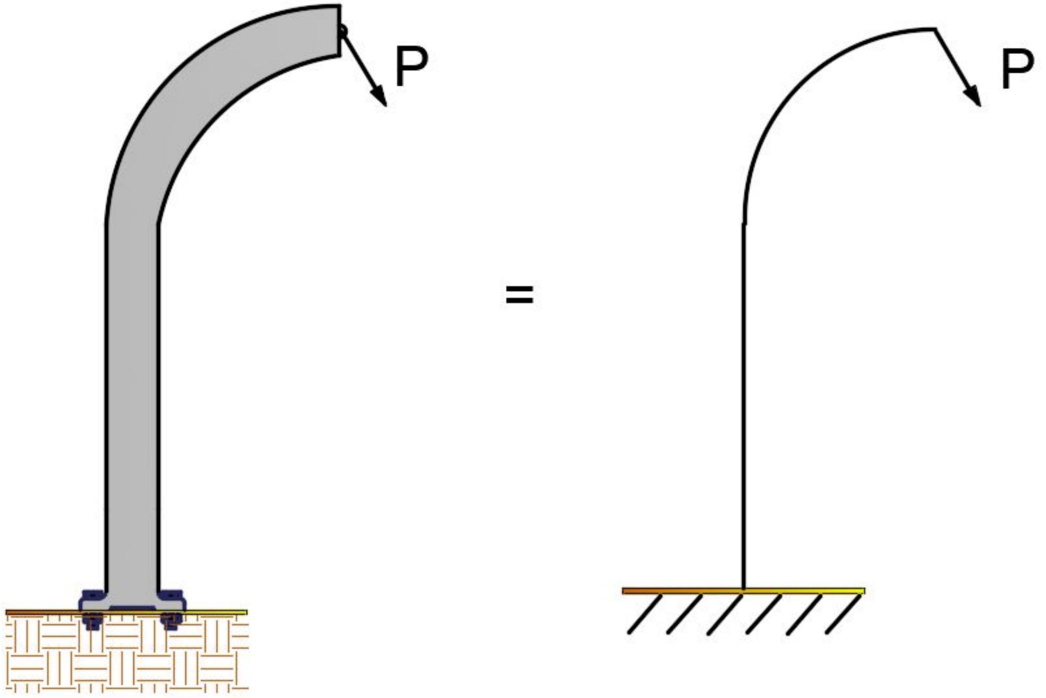


c) Engaste: impedem duas translações e uma rotação

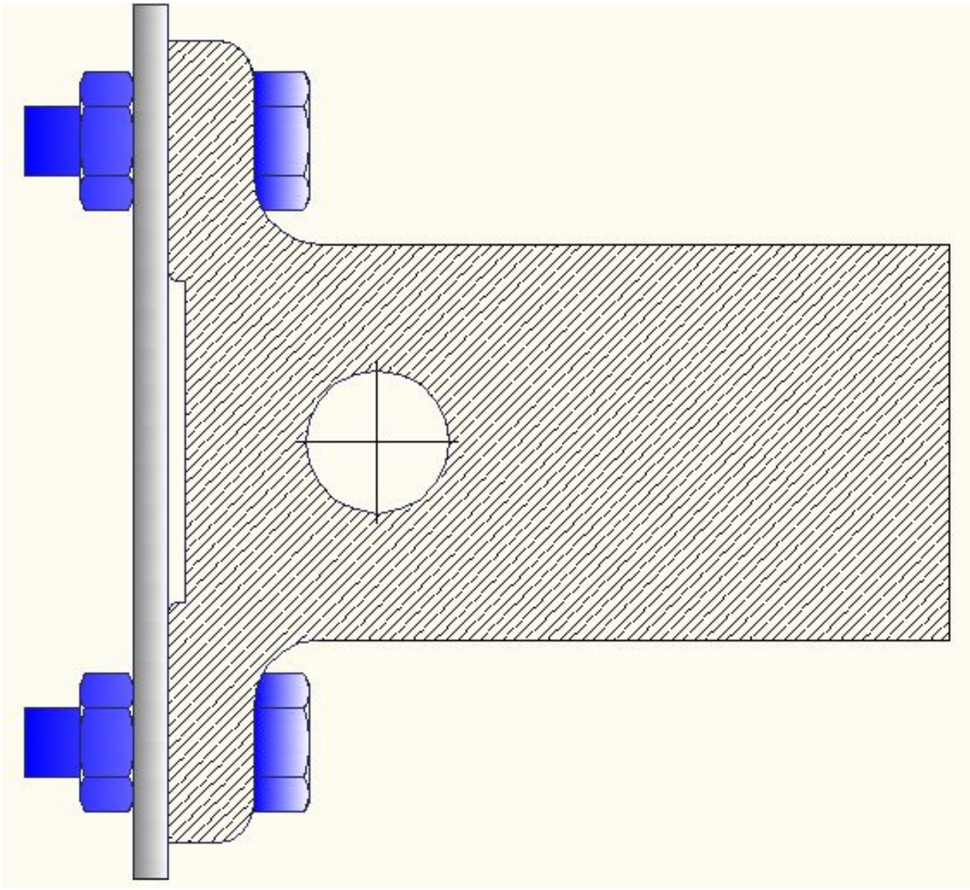


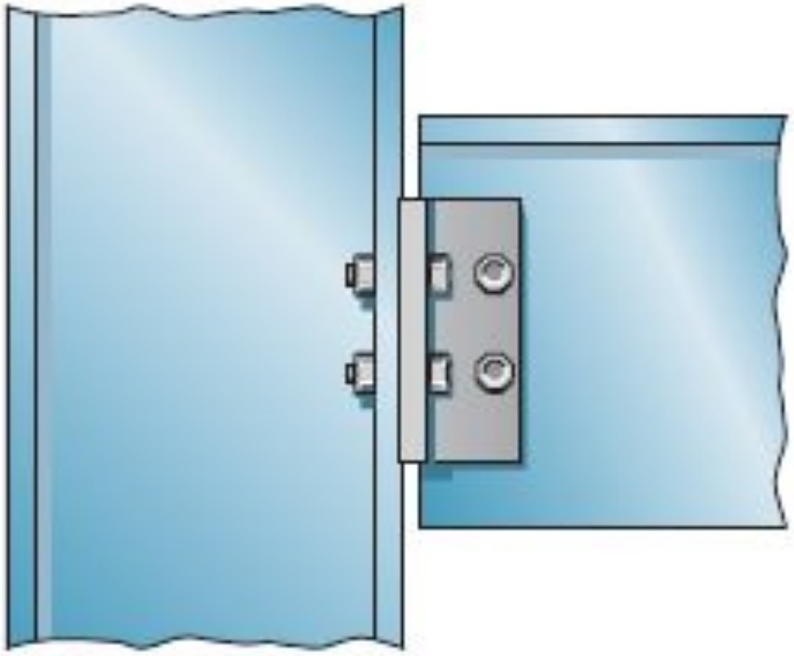


Engastamento

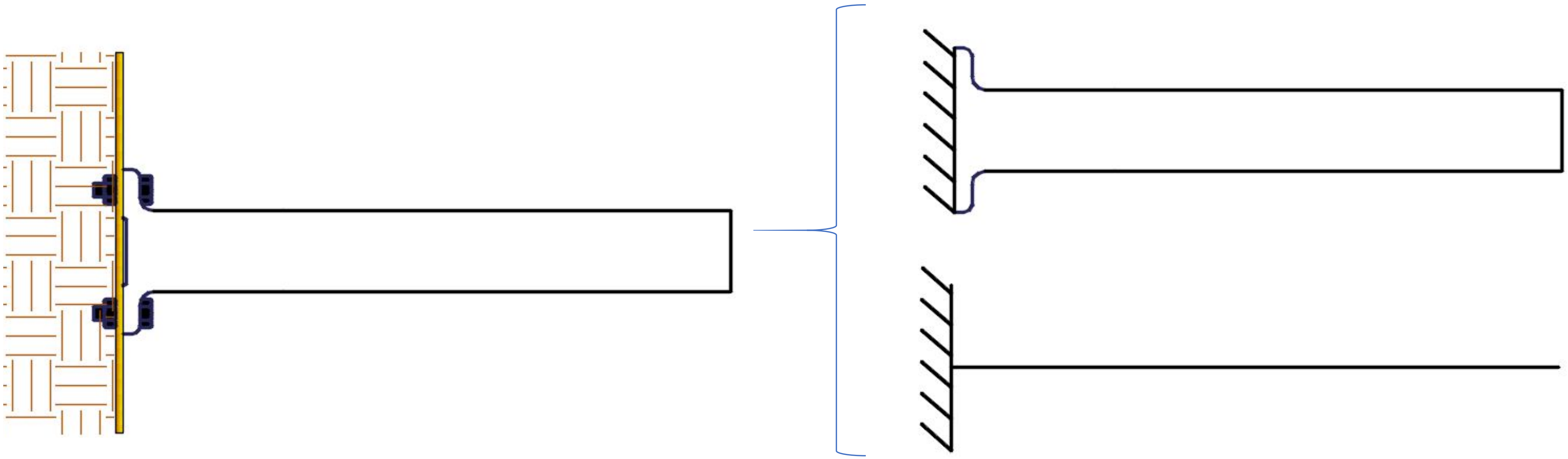


c) Engaste: impedem duas translações e uma rotação

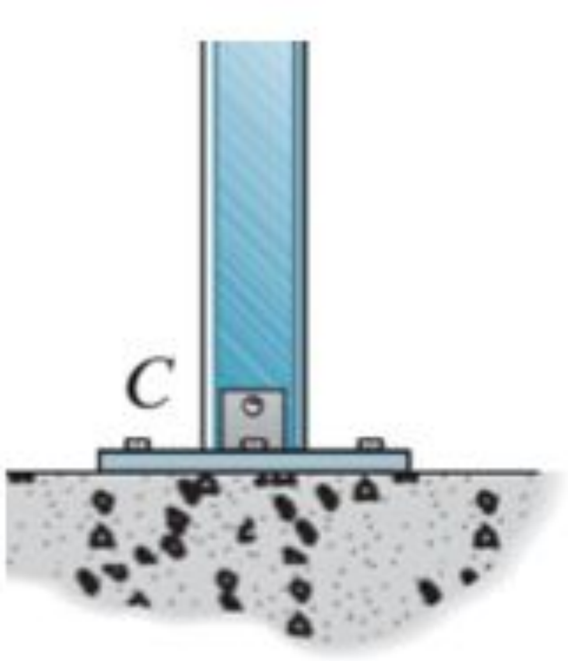


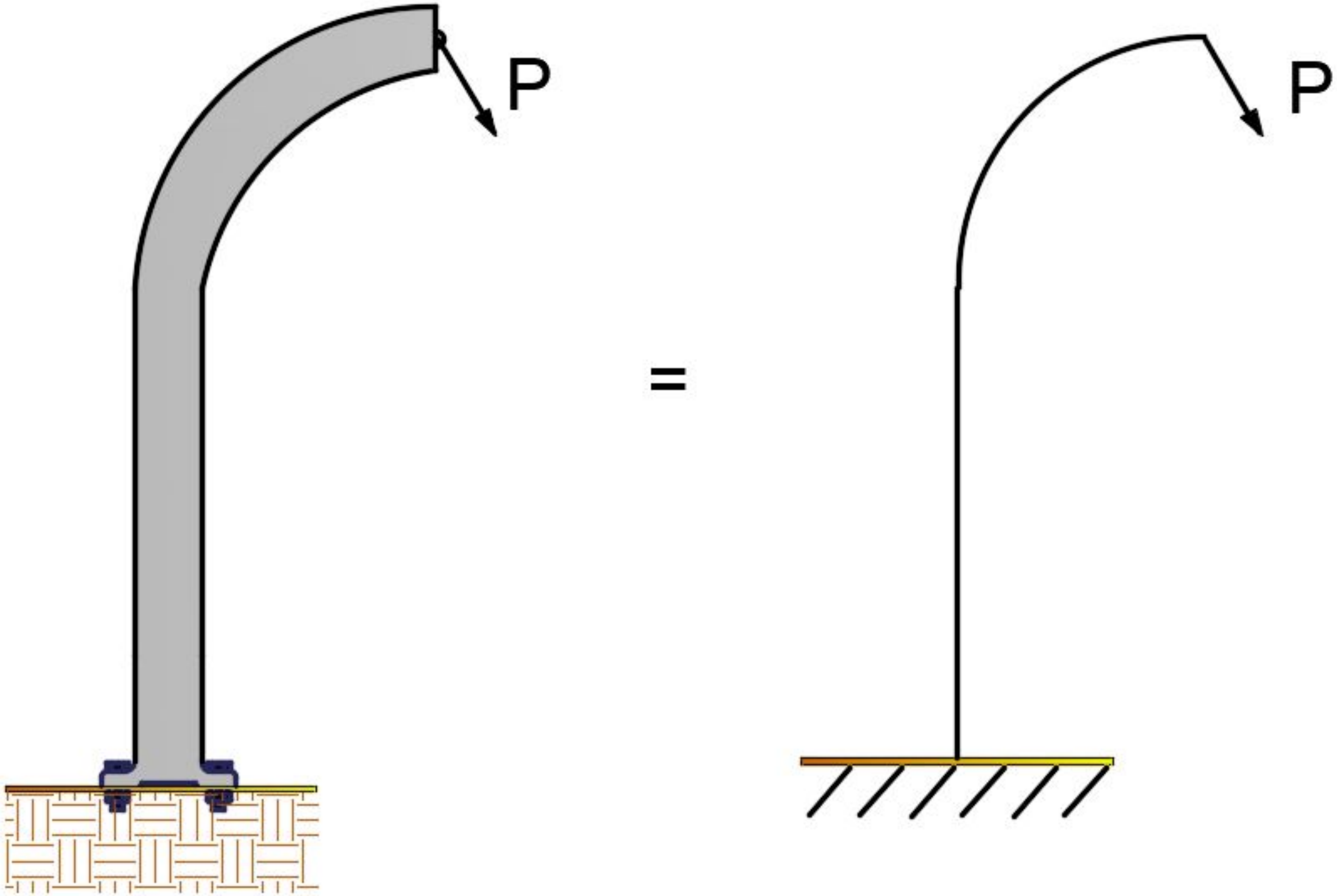


Engaste

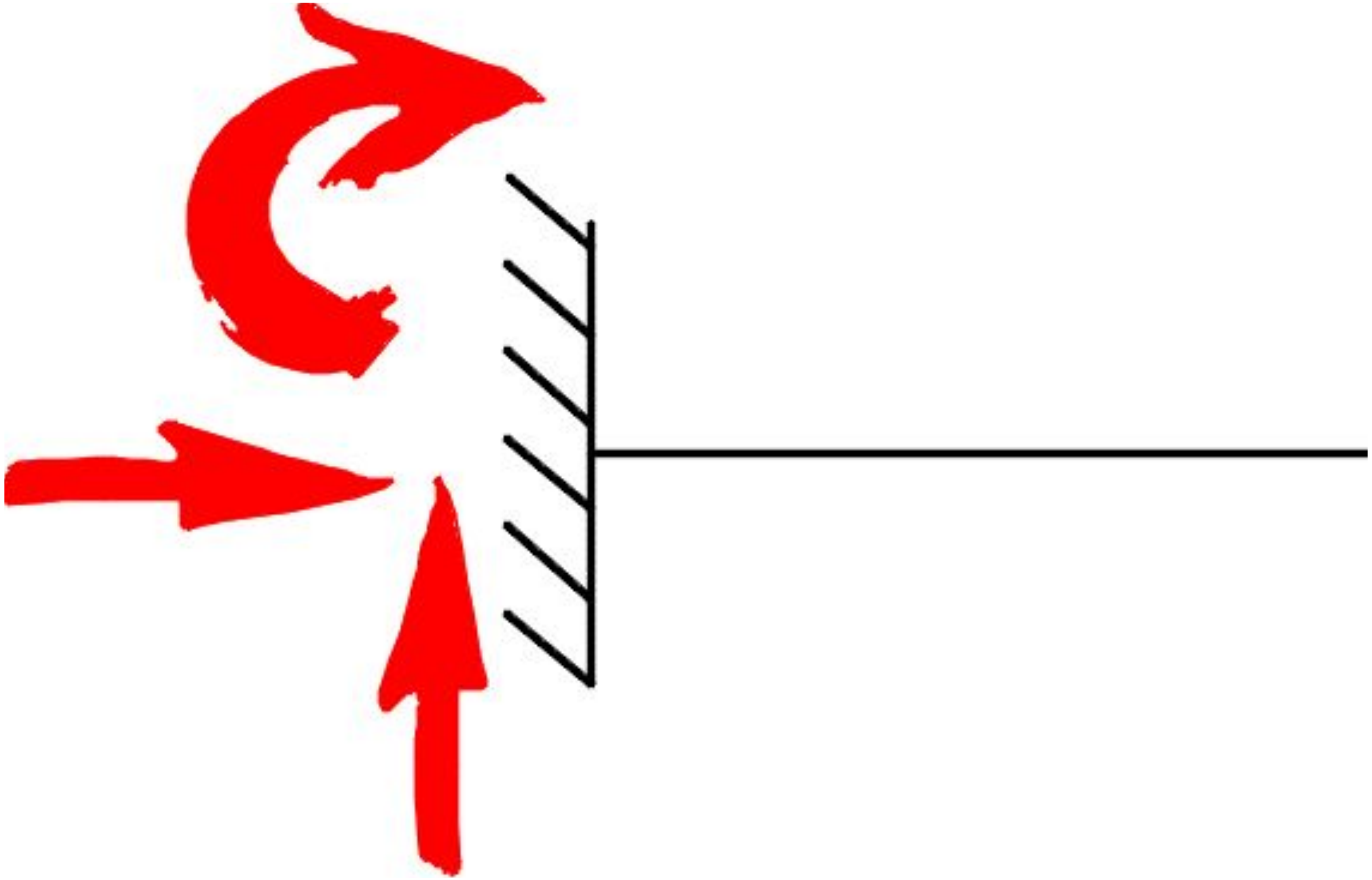


Engaste





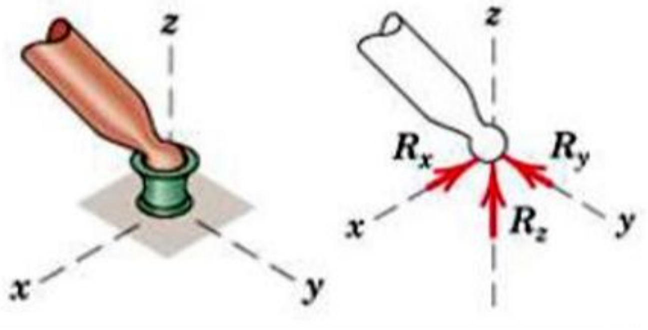
Reações associadas

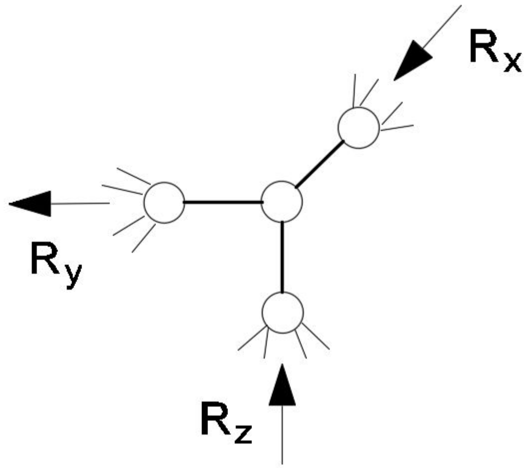


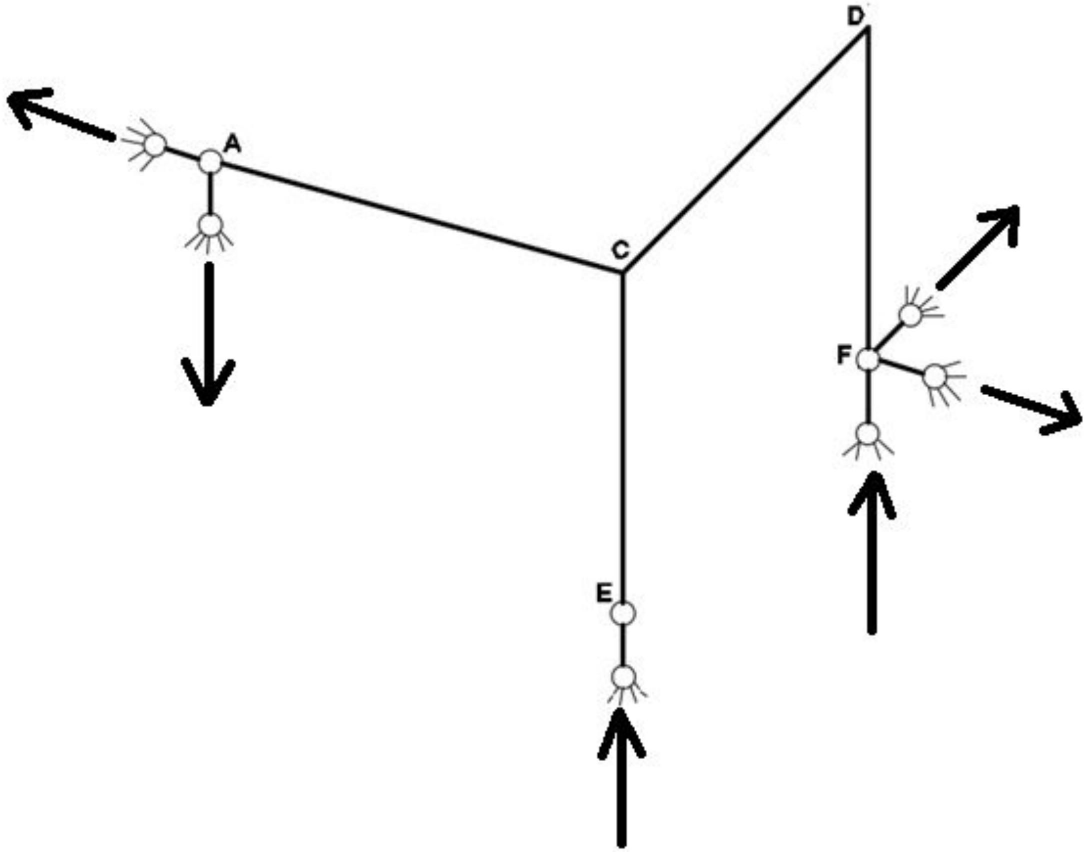
representação de engaste

APOIOS NO ESPAÇO

Apoios fixos

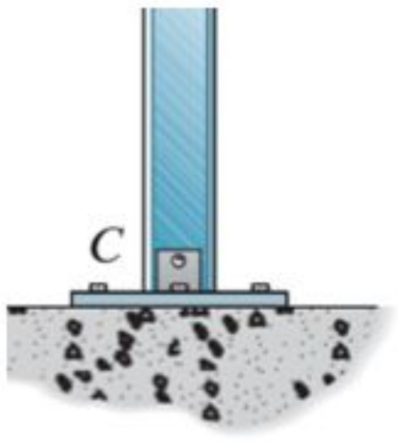


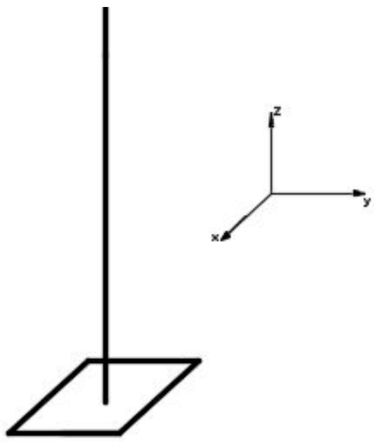




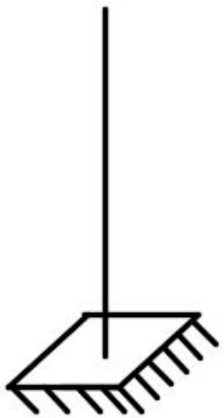
APOIOS NO ESPAÇO

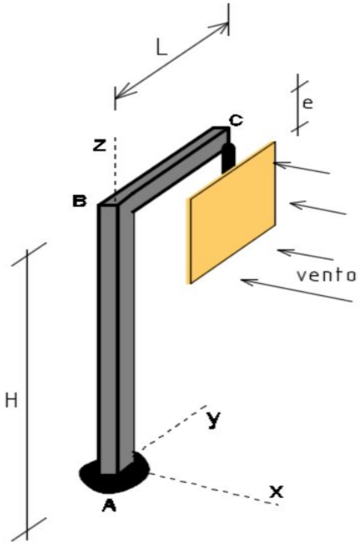
Engaste: 6 reações

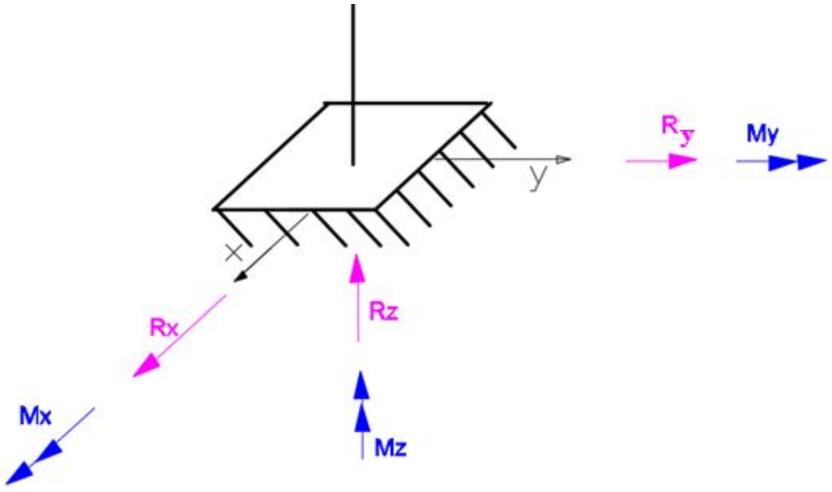




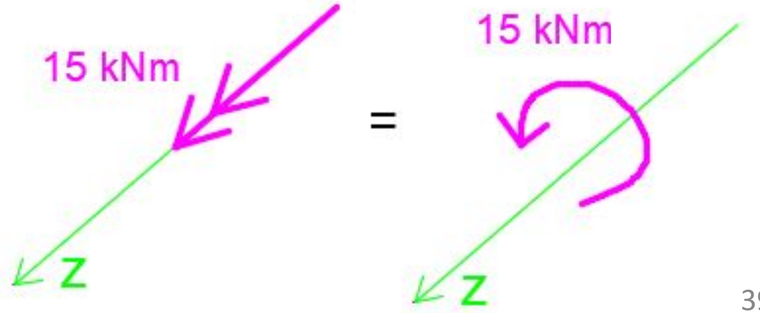
=







notações equivalentes



EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DA ESTÁTICA - ESPAÇO

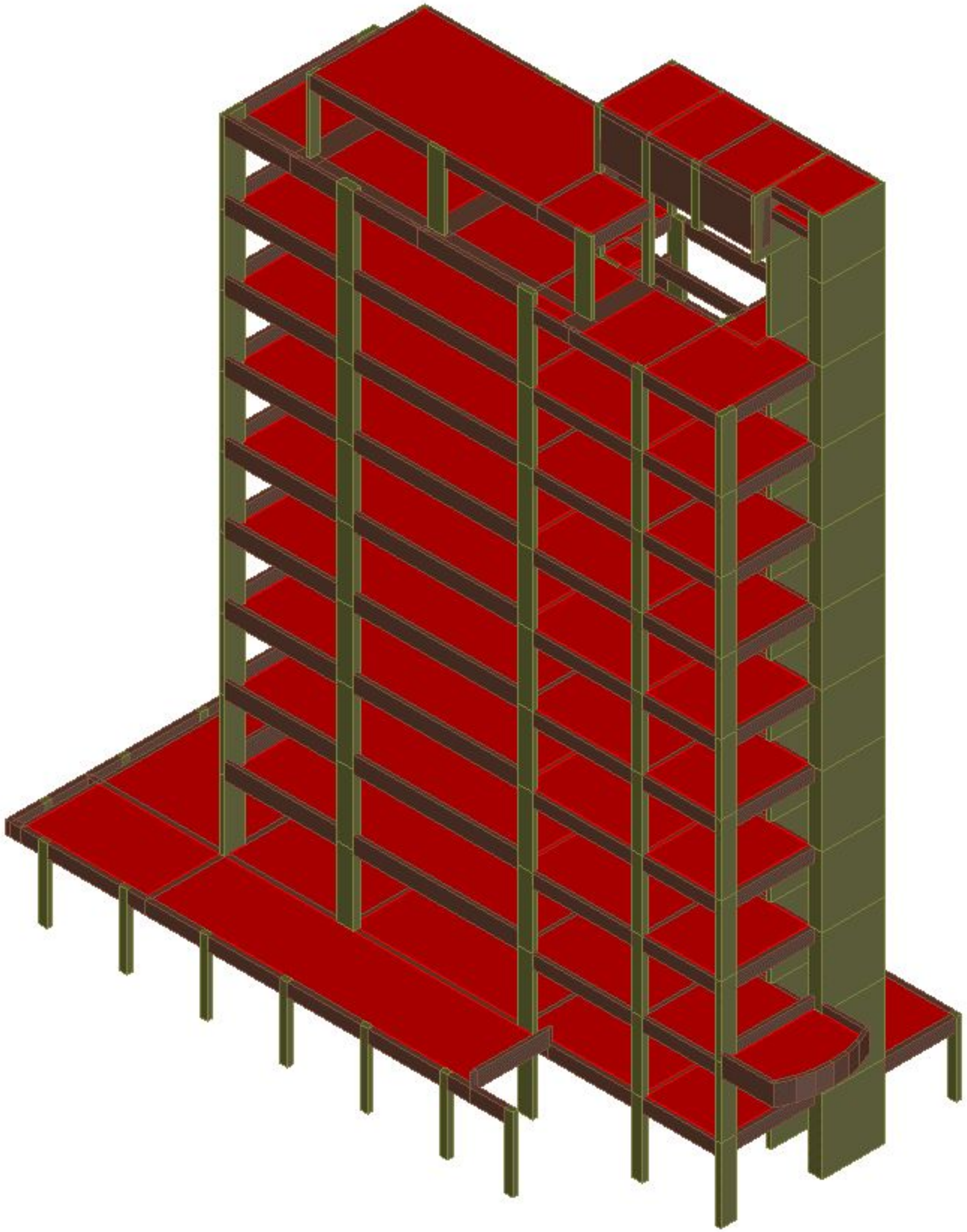
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

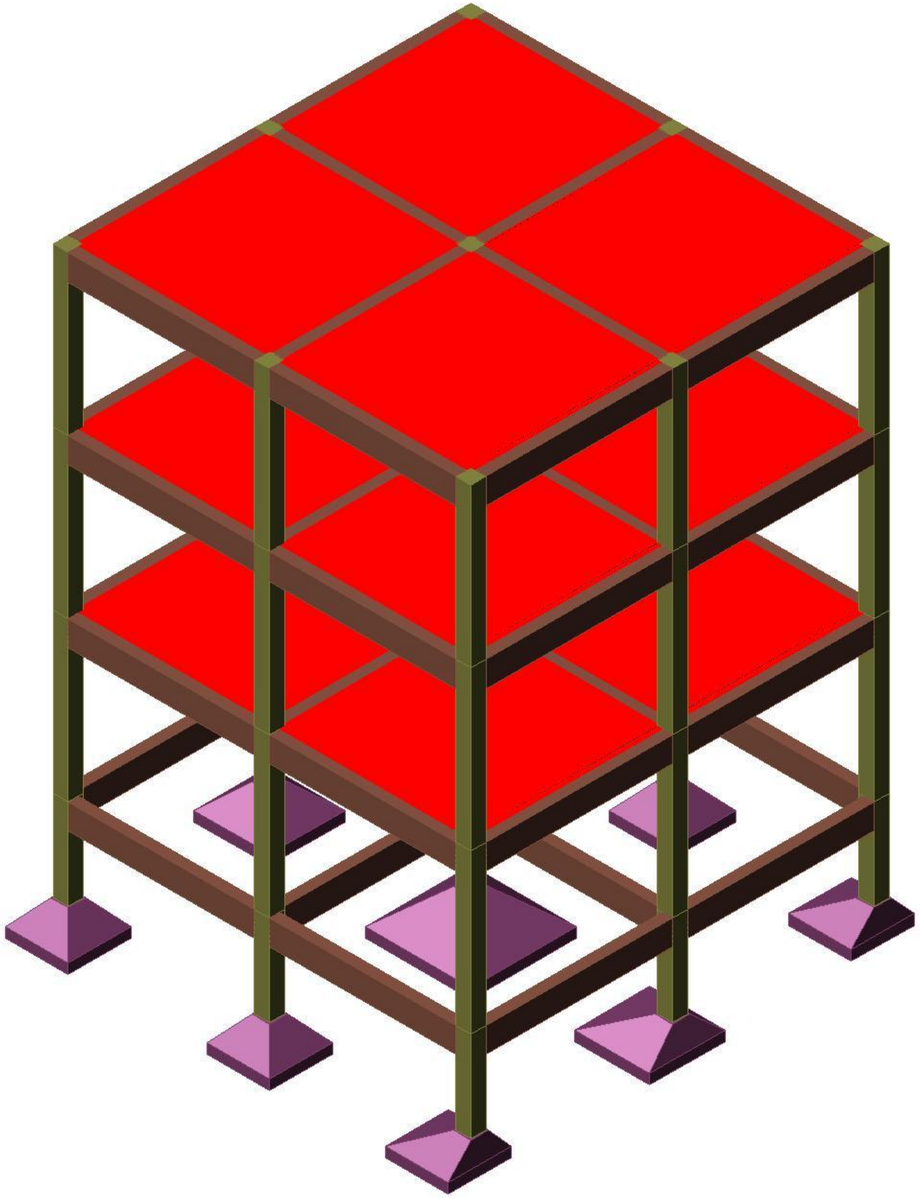
EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DA ESTÁTICA - PLANO

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$$

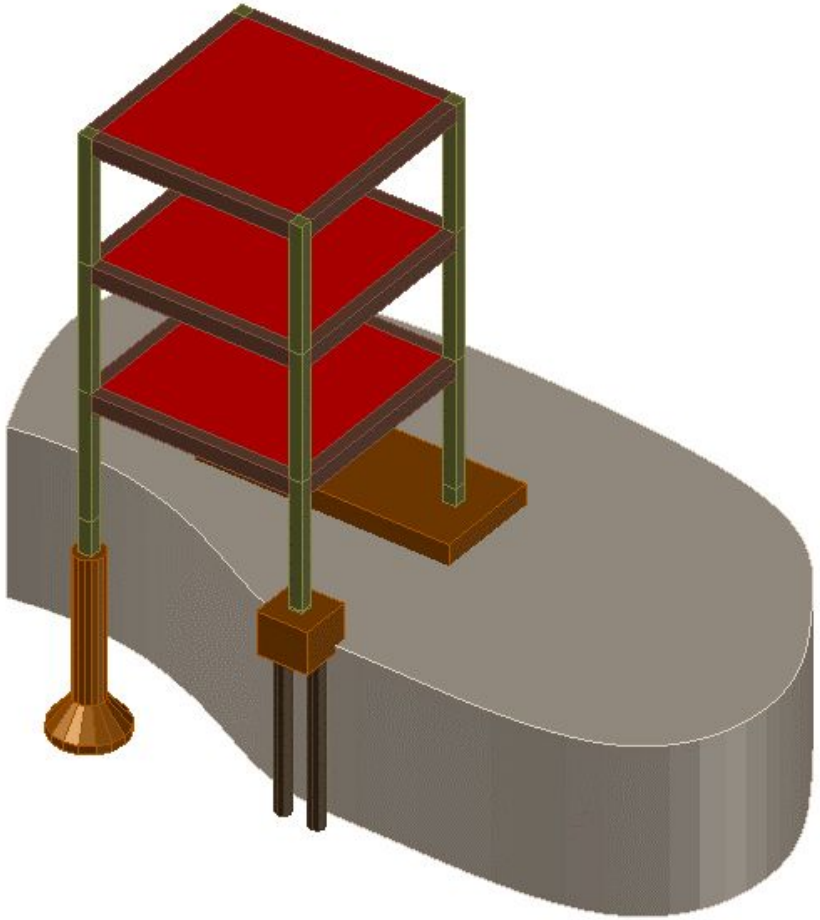
$$R = m \cdot a = 0 \xrightarrow{a=0} R = 0; \quad \sum R = 0 \quad (Forças); \sum M = 0 \quad (Momento)$$

Maioria das estruturas são hiperestáticas





Dependendo do projeto:
Estruturas podem ter vários tipos de vínculos



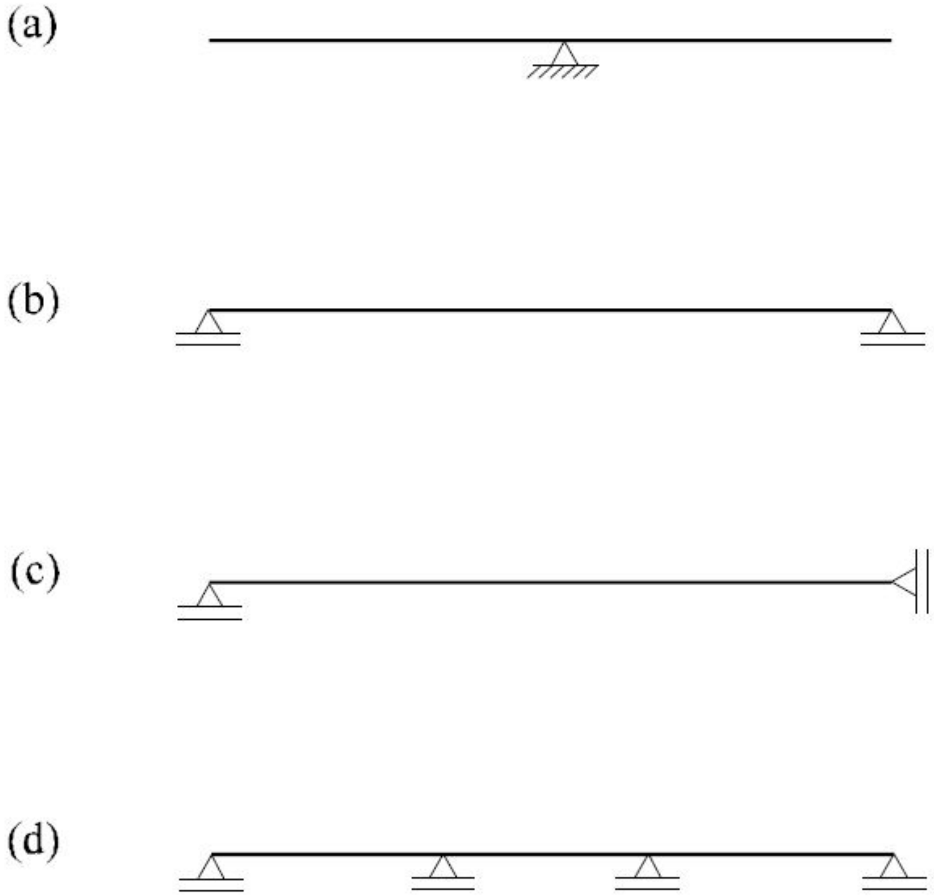
Classificam as estruturas quanto a sua estaticidade

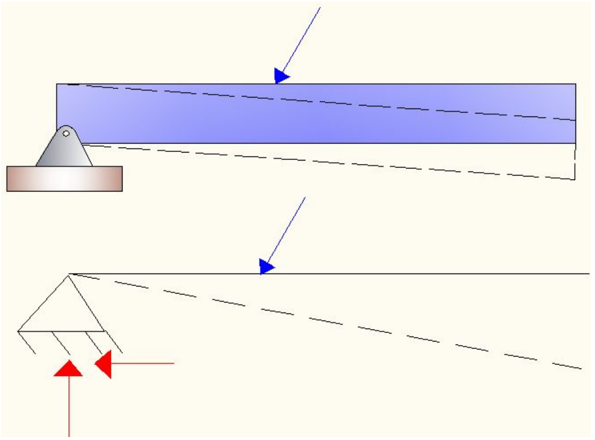
- **Hipostáticas**
- **Isostáticas**
- **Hiperestáticas**

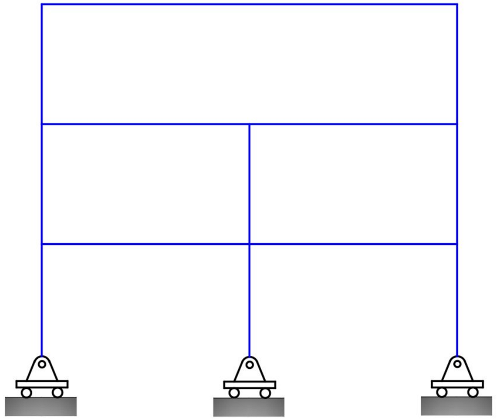
Classificação das estruturas quanto à estaticidade no plano

Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas

a) **Estrutura Hipostática:** Algum movimento de corpo rígido é possível (não gerando deformação)

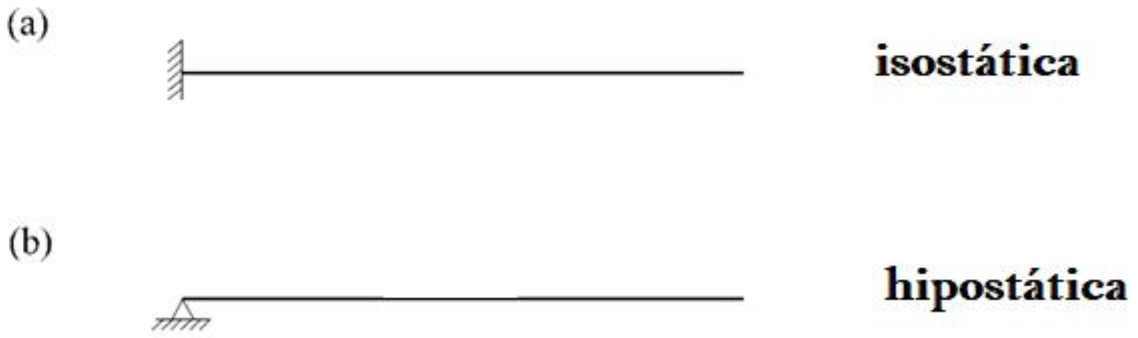


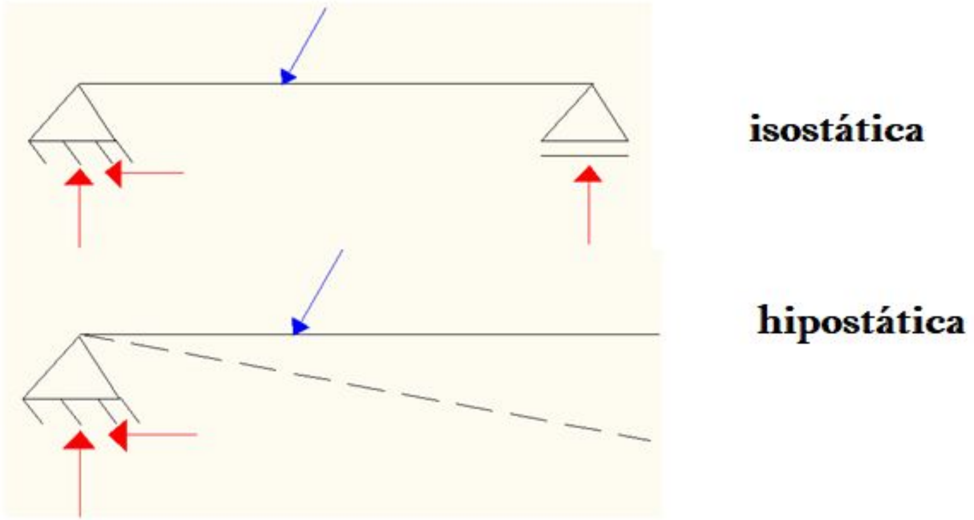


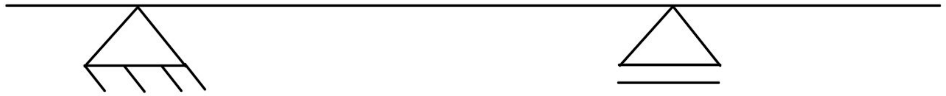


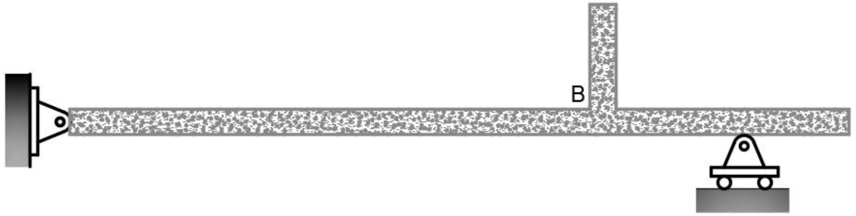
Classificação das estruturas quanto à estaticidade no plano

b) Estrutura Isostática: todo movimento de corpo rígido é restrito, mas se **um** vínculo for retirado, ela gera movimento de corpo rígido



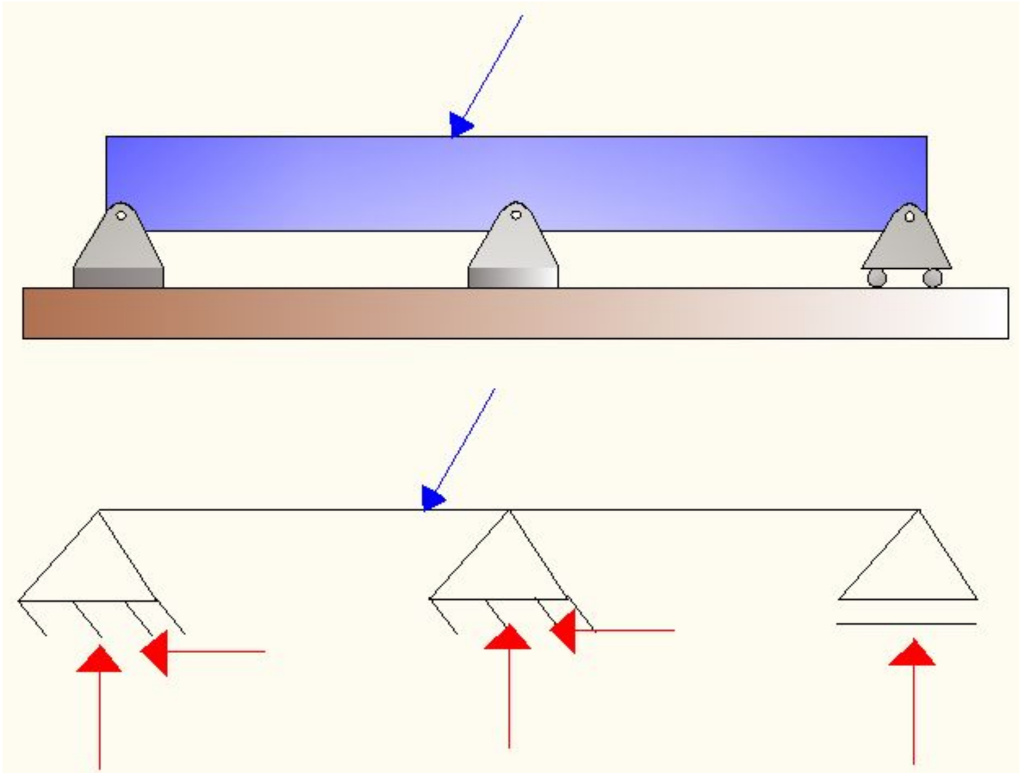


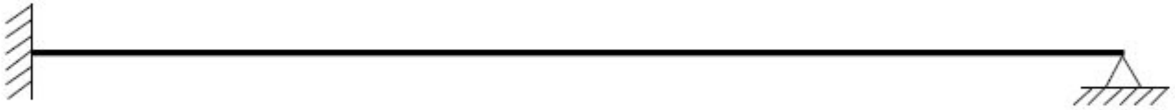




Classificação das estruturas quanto à estaticidade no plano

c) Estrutura Hiperestática: todo movimento de corpo rígido é restrito, se algum vínculo for retirado, ela ainda não gera movimento de corpo rígido



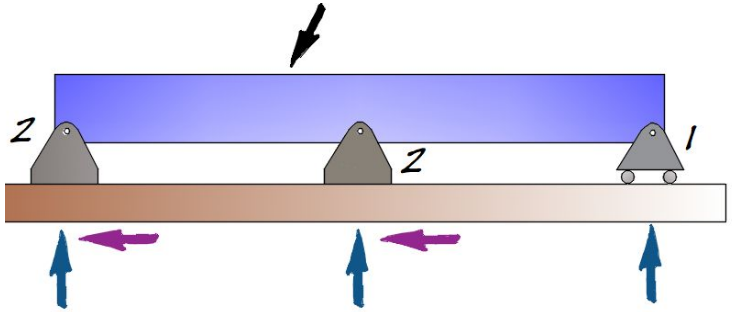


Grau de hiperestaticidade externa de uma estrutura rígida plana hiperestática

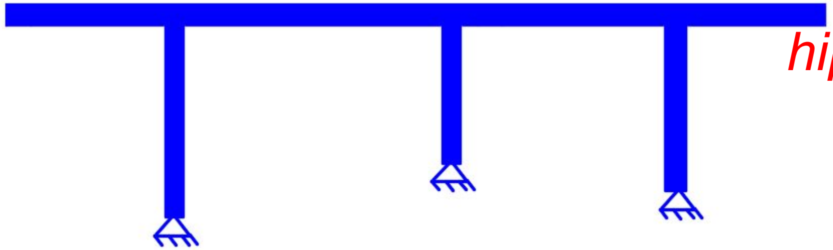
$$g = v - 3$$

g : grau de hiperestaticidade externa

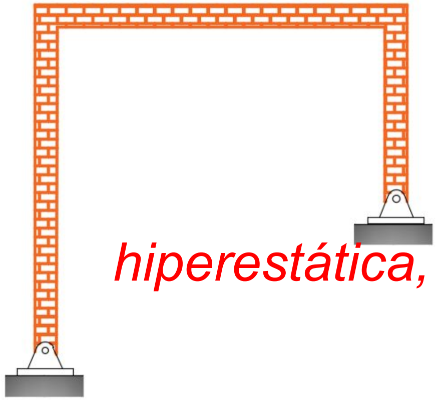
v : número de vínculos existentes nas estrutura inseridos pelos apoios



$$g = 5 - 3 = 2$$



hiperestática, g = 3



hiperestática, g = 1

hiperestática, g = 1

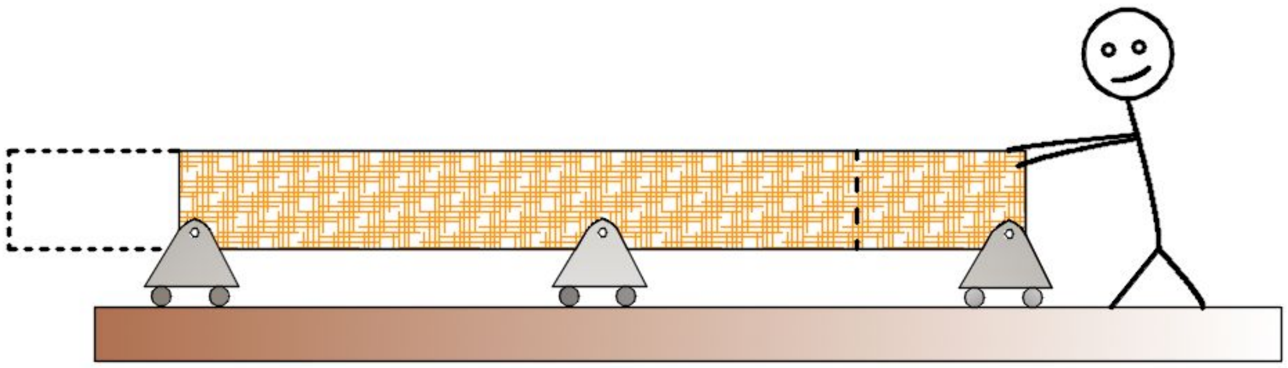
Grau de hiperestaticidade (g) externa de uma estrutura plana

Cuidado com a aplicação dessa fórmula:

$$g = v - 3$$

Tem que verificar se as duas translações e a rotação de movimento de corpo livre está sendo restritas

Contra-exemplo:



$$g = 3 - 3 = 0$$

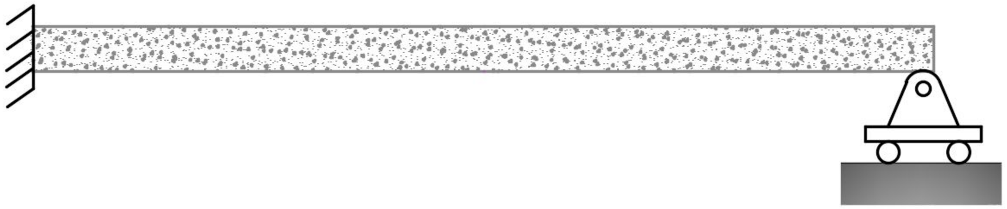
Mas essa estrutura é hipostática!

Exercícios: Classificar as estruturas quanto a sua estaticidade

a)

c)

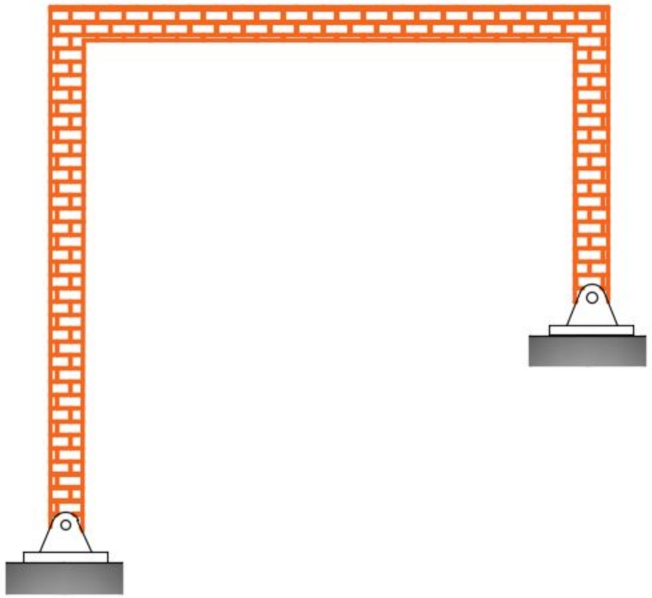
d)



b)

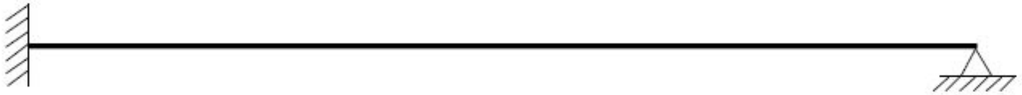
Exercícios: Classificar as estruturas quanto a sua estaticidade

e)

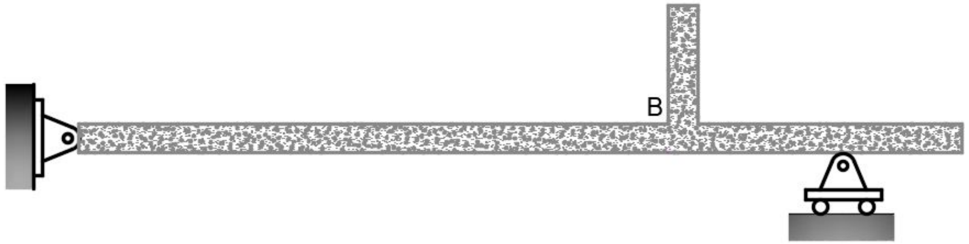


g)

h)

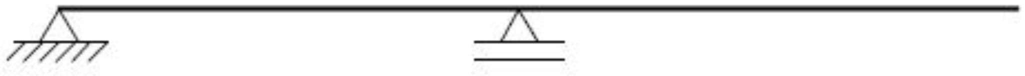


f)



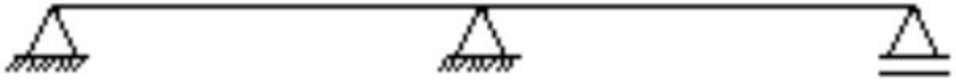
i)

j)



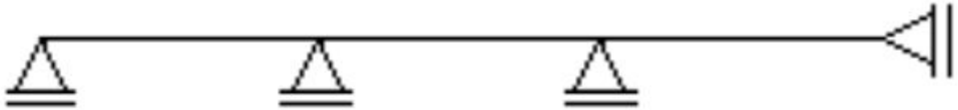
k)

l)

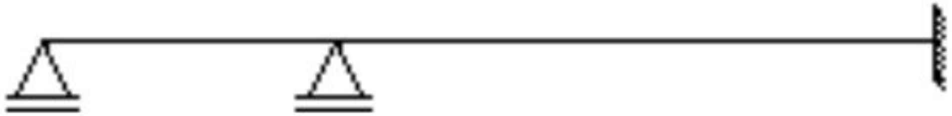


m)

n)



o)



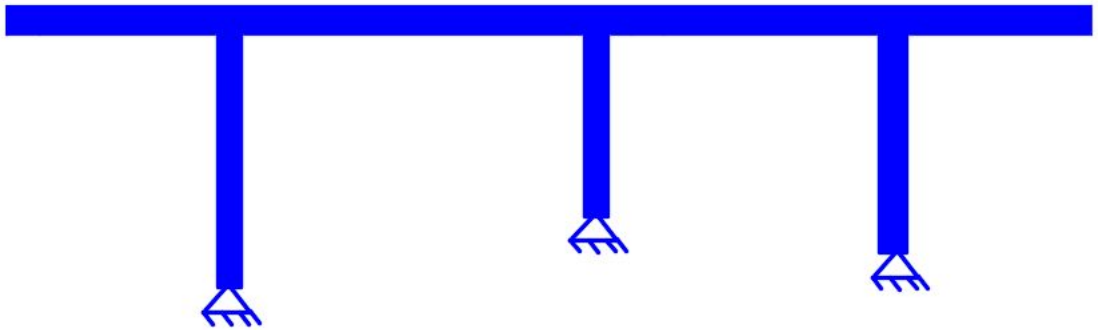
q)

p)

r)

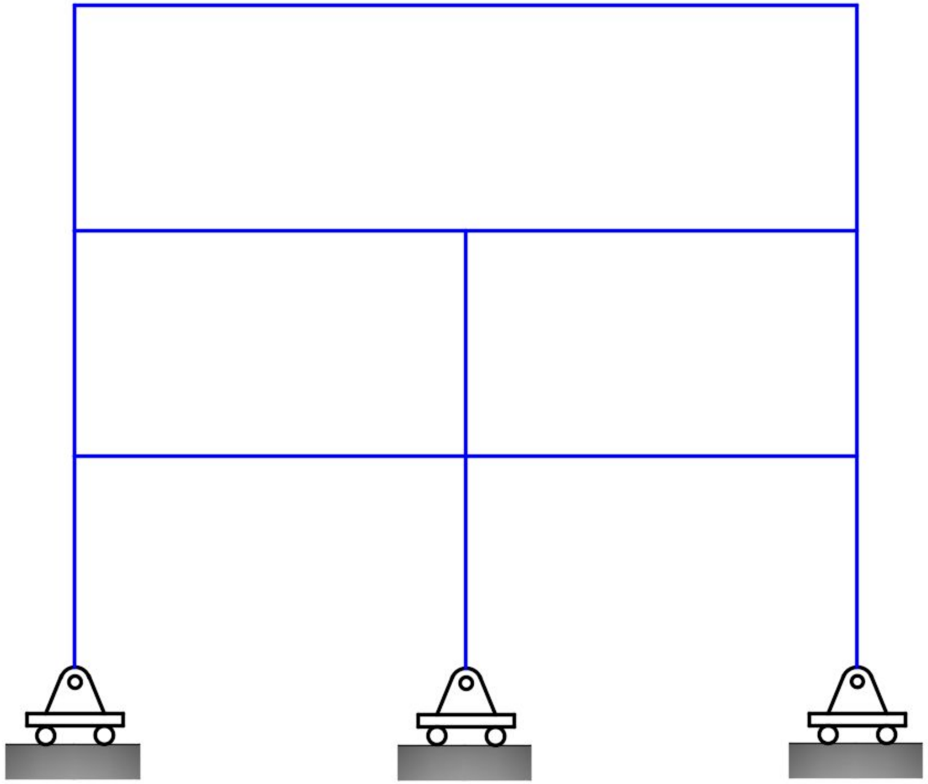
s)

u)



t)

v)



Respostas: Classificar as estruturas quanto a sua estaticidade

a)

Isostática, $g = g_h = 0$

b)

Hiperestática, $g = g_h = 1$

c)

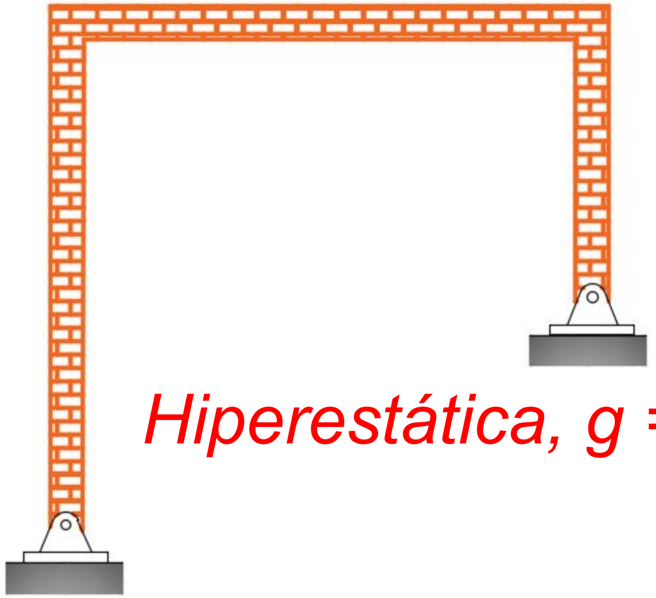
Isostática, $g = g_h = 0$

d)

Hiperestática, $g = g_h = 1$

Exercícios: Classificar as estruturas quanto a sua estaticidade

e)



Hiperestática, $g = g_h = 1$

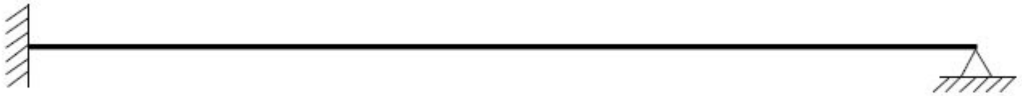
f)

Isostática, $g = g_h = 0$

g)

Hipostática

h)

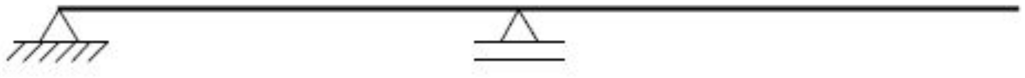


Hiperestática, $g = g_h = 2$

i)

Hiperestática, $g = g_h = 1$

j)

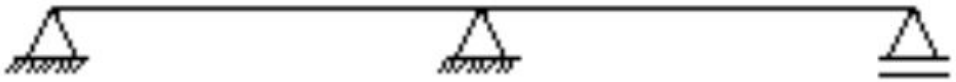


Isostática, $g = g_h = 0$

k)

Hipostática

l)

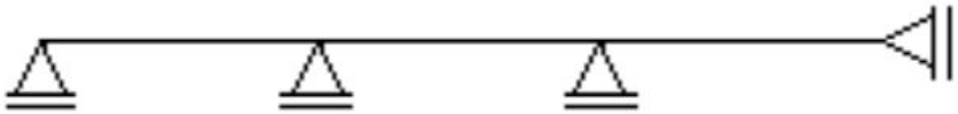


Hiperestática, $g = g_h = 2$

m)

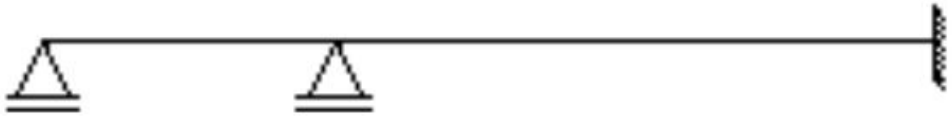
Hiperestática, $g = g_h = 2$

n)



Hiperestática, $g = g_h = 1$

o)



Hiperestática, $g = g_h = 2$

q)

Hipostática

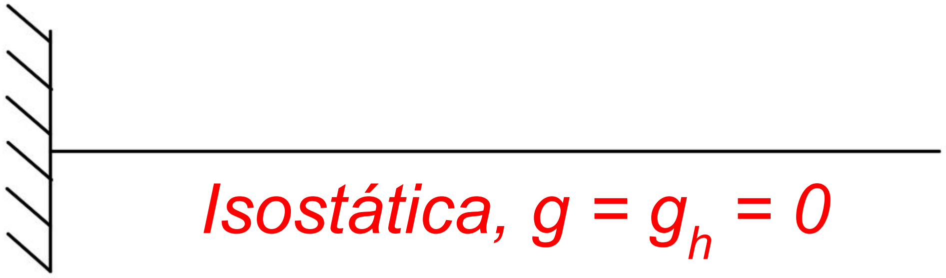
p)

Hiperestática, $g = g_h = 1$

r)

Hiperestática, $g = g_h = 3$

s)

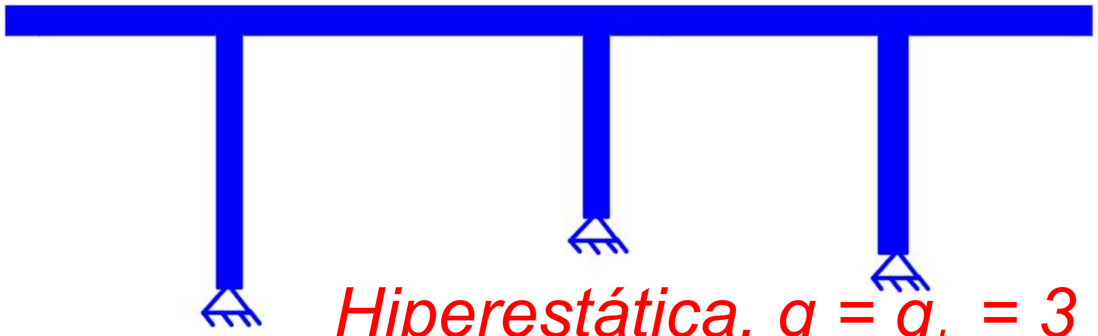


Isostática, $g = g_h = 0$

t)

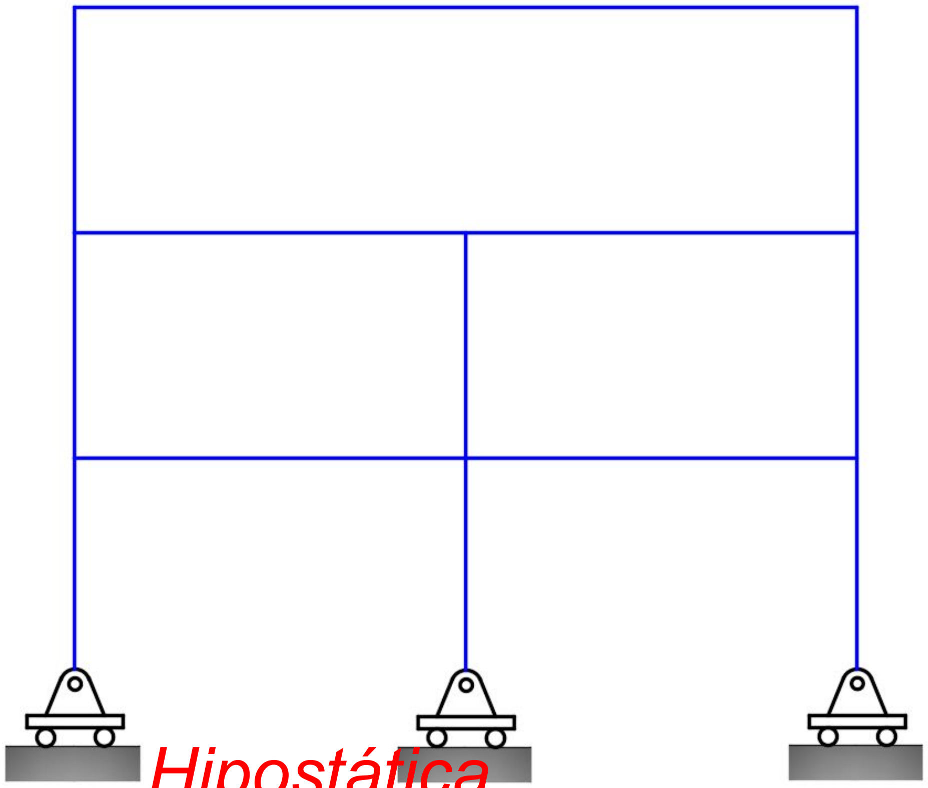
Isostática, $g = g_h = 0$

u)



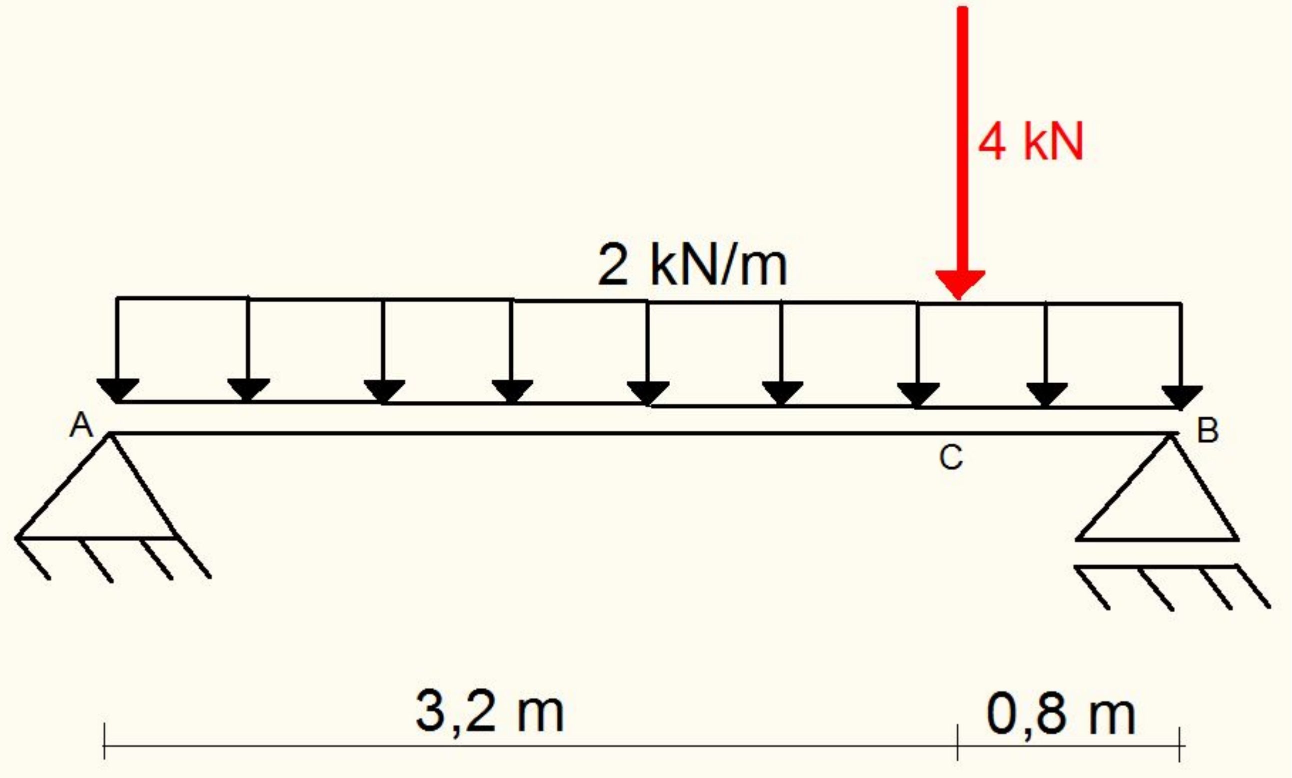
Hiperestática, $g = g_h = 3$

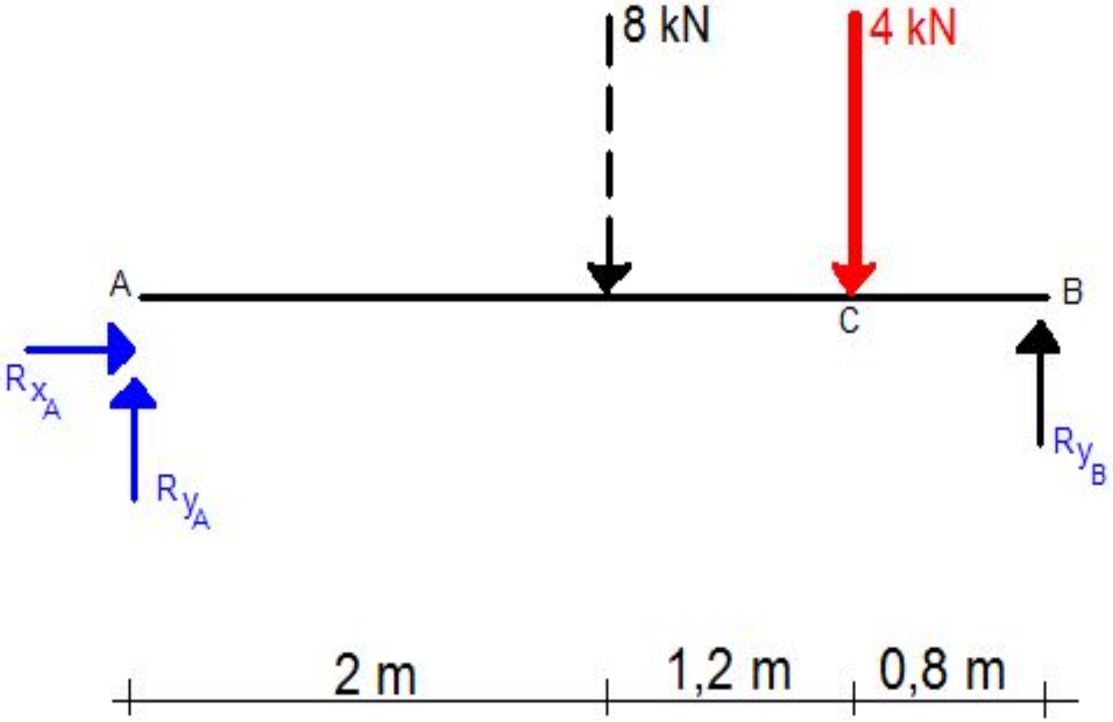
v)



Hipostática

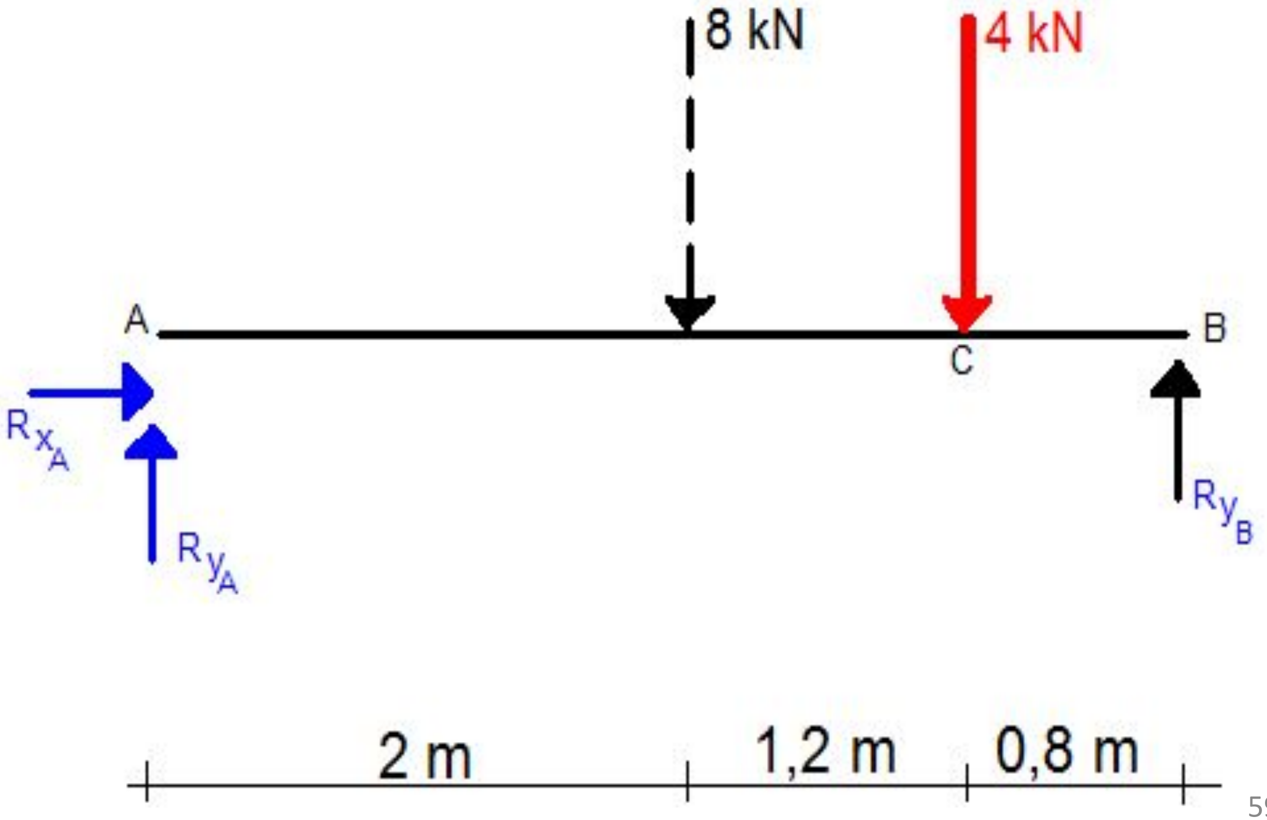
Exemplo 4: Calcule as reações da estrutura





$$\sum F_x = 0: \quad R_{XA} = 0$$

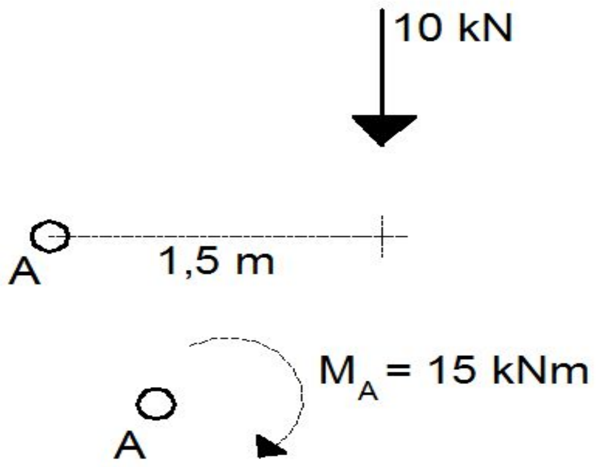
$$\sum F_y = 0: \quad R_{YA} + R_{YB} - 12 = 0$$



Lembrando que:

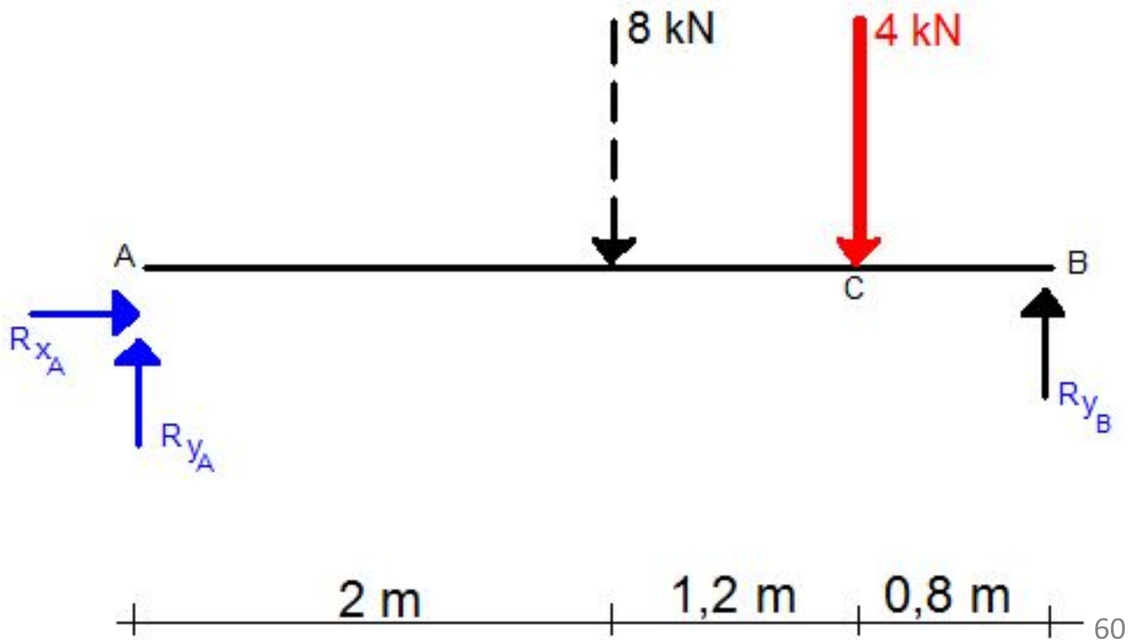
$$\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F}$$

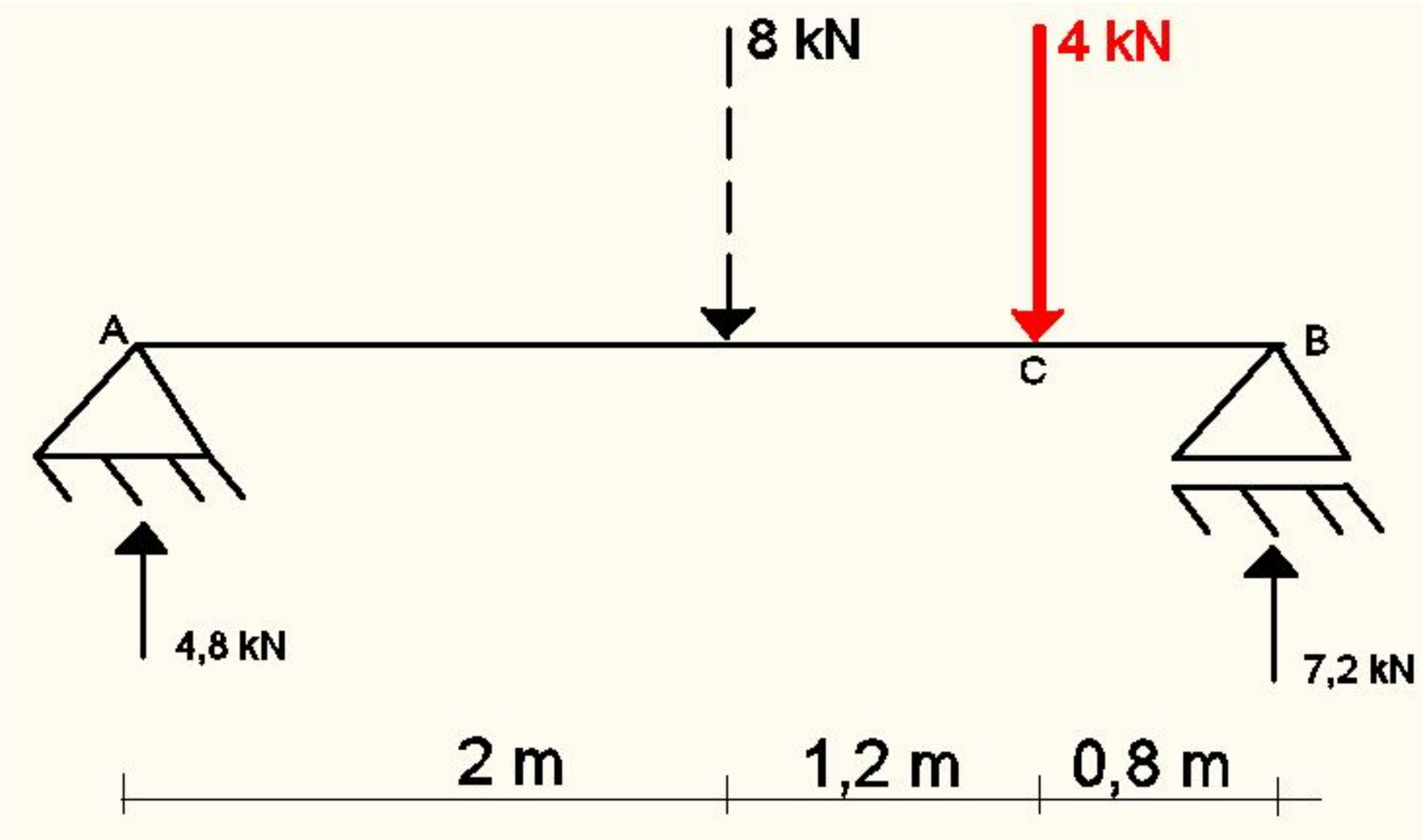
$$\left\|\overrightarrow{M}_O\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{F}\right\| \ sen\,\alpha$$



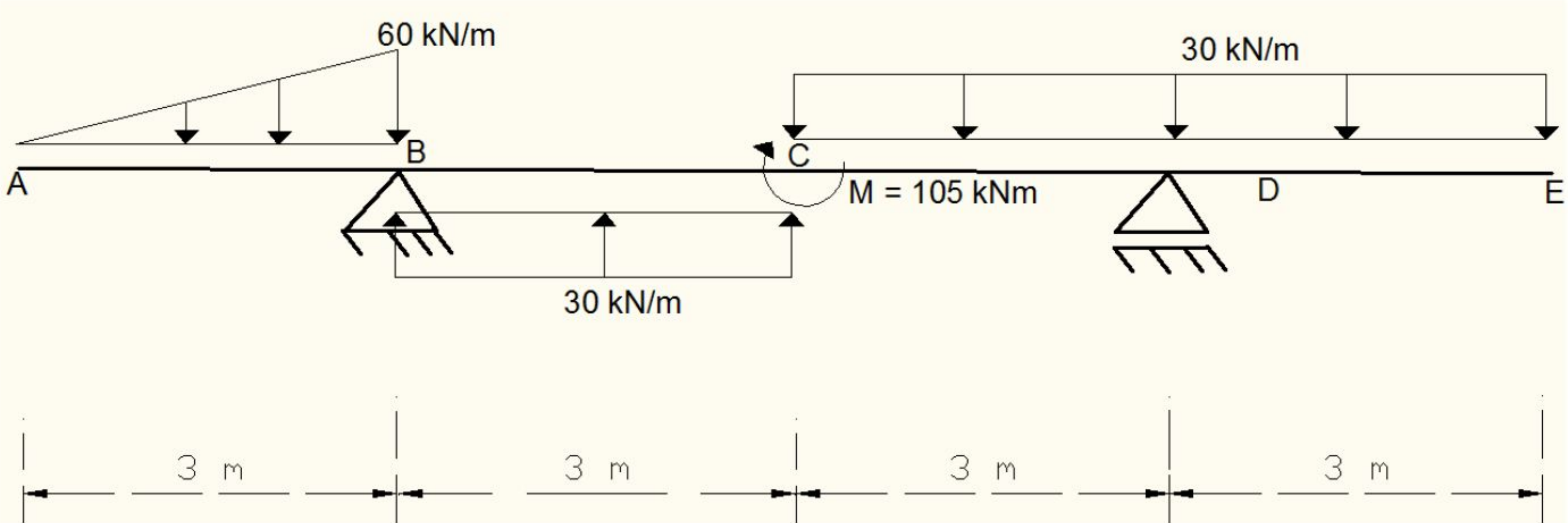
$$\sum M_A = 0: \ \overset{+}{\circlearrowleft} \quad 4{,}0 \cdot R_{YB} - 8{,}0 \cdot 2{,}0 - 4{,}0 \cdot 3{,}2 = 0 \rightarrow R_{YB} = 7{,}2 \ kN$$

$$\therefore R_{YA} = 12 - 7{,}2 = 4{,}8 \ kN$$



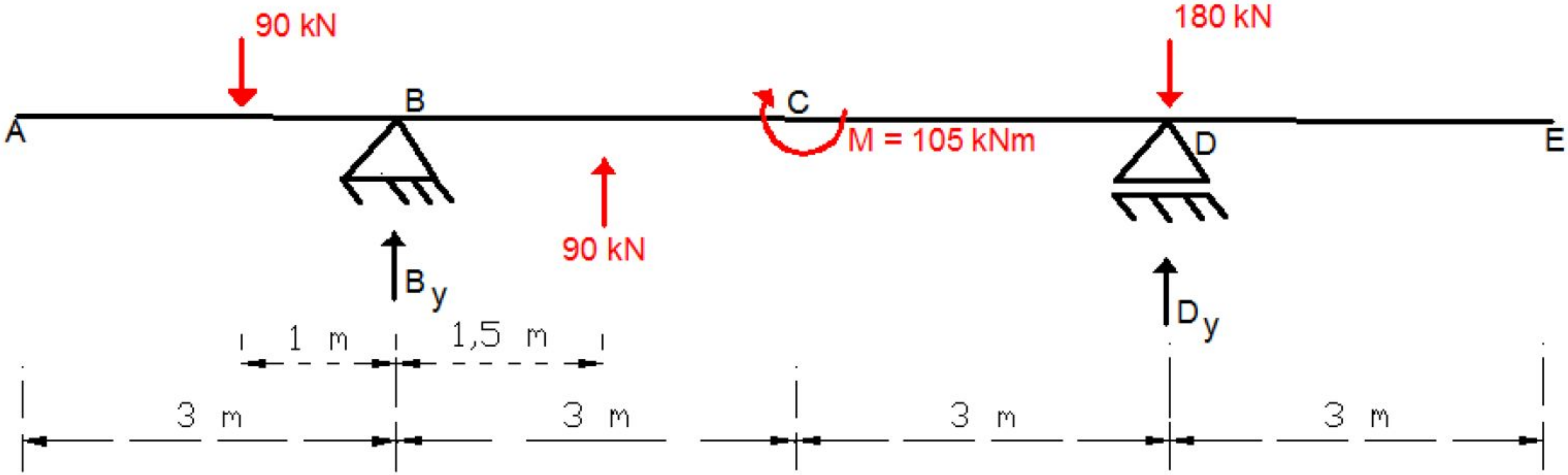

8 kN
4 kN
A
C
B
4,8 kN
7,2 kN
2 m
1,2 m
0,8 m

Exemplo 5



Exemplo 5

Determinar as reações da viga a seguir.



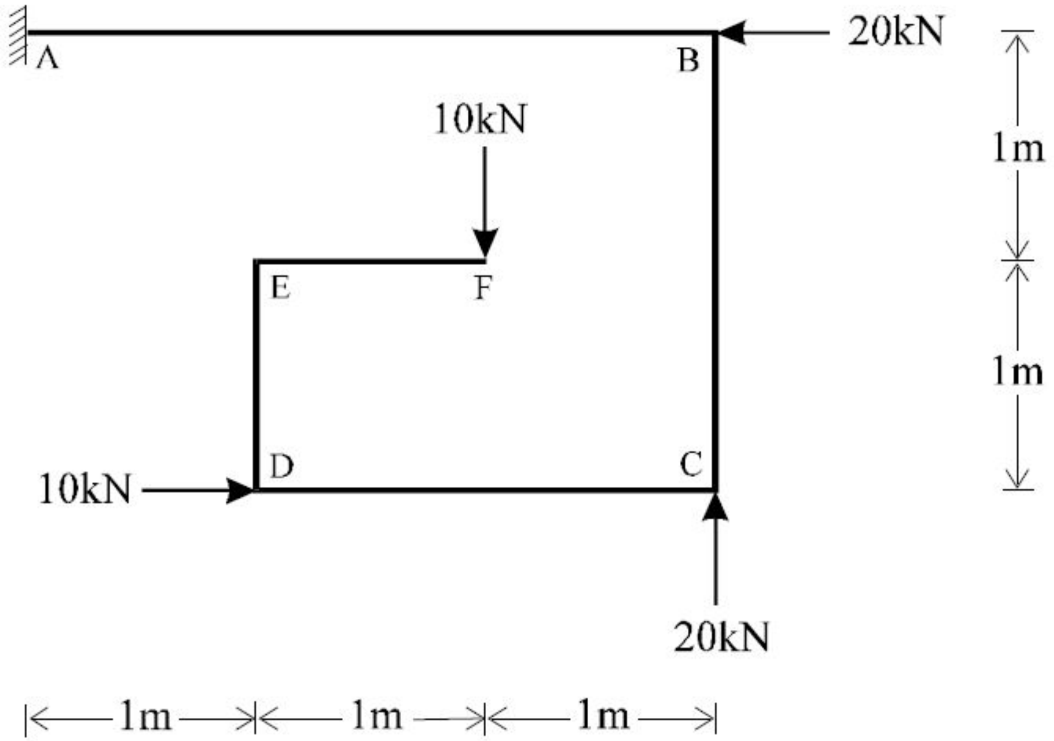
$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$$

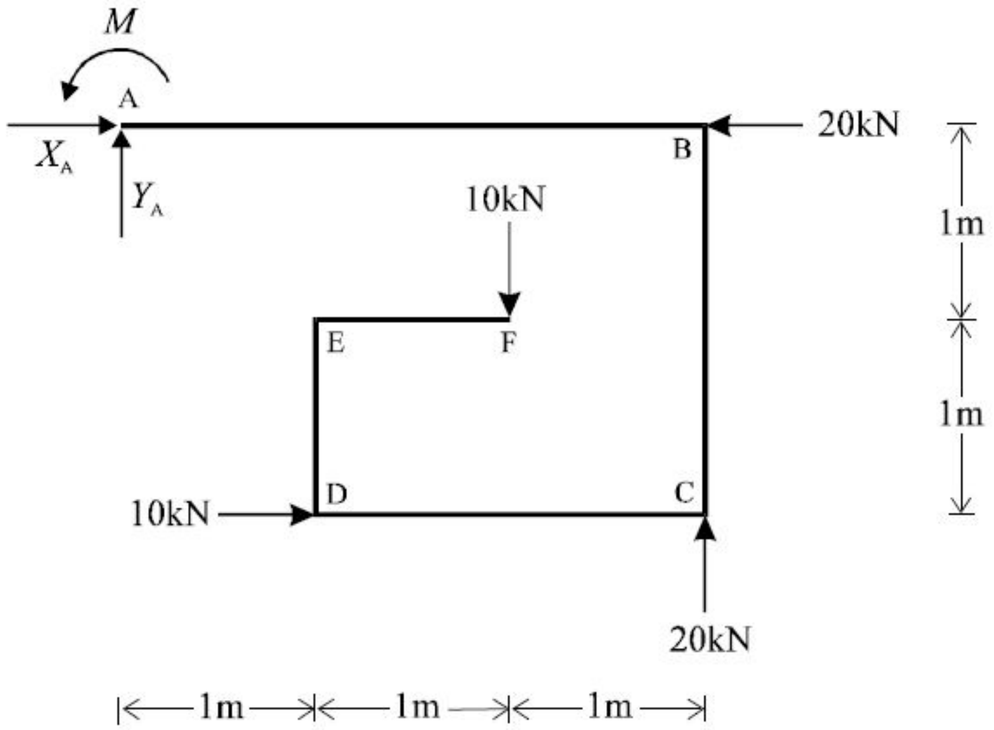
$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + D_y = 180$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 6.D_y + 90.1 + 90.1,5 = 105 + 180.6 \rightarrow D_y = 160 \;\; kN(\uparrow)$$

$$\therefore B_y = 20 \;\; kN(\uparrow)$$

Exemplo 6: Determinar as reações da estrutura



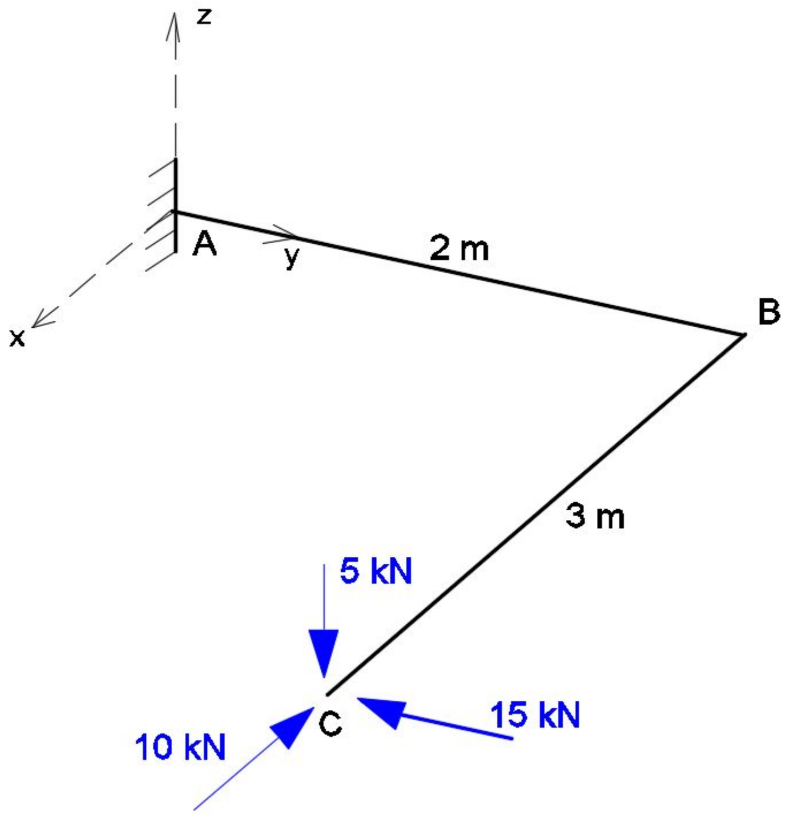


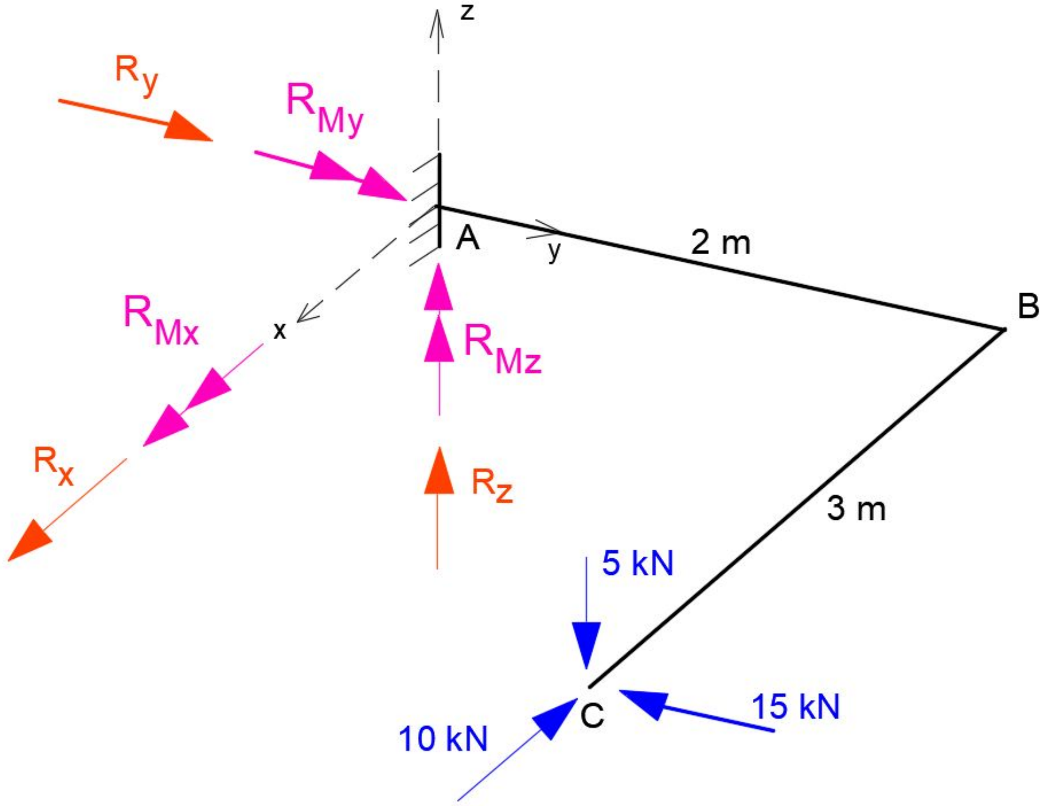
$$X_A = 10 \text{ kN} \ ,$$

$$Y_A = -10 \text{ kN} \ ,$$

$$M = -60 \text{ kN m},$$

Exemplo 7: Determinar as reações da estrutura

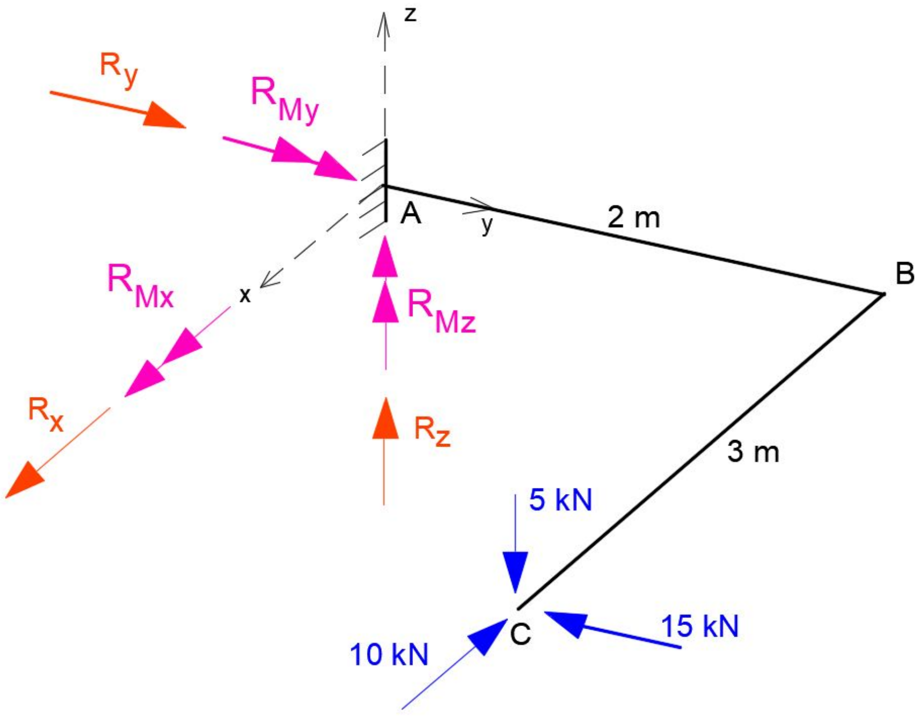




$$\sum F_x = 0: R_x - 10 = 0 \rightarrow R_x = 10\ kN$$

$$\sum F_y = 0: R_y - 15 = 0 \rightarrow R_y = 15\ kN$$

$$\sum F_z = 0: R_z - 5 = 0 \rightarrow R_z = 5\ kN$$



$$M_o = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$M_x = (y_p - y_o)F_z - (z_p - z_o)F_y$$

$$M_y = (z_p - z_o)F_x - (x_p - x_o)F_z$$

$$M_z = (x_p - x_o)F_y - (y_p - y_o)F_x$$

$$\mathbf{F_x = -10\ kN; F_y = -15\ kN; F_z = -5kN}$$

$$\mathbf{x_p - x_0 = 3m} \qquad \mathbf{y_p - y_0 = 2m} \qquad \mathbf{z_p - z_0 = 0}$$

$$R_{My} + \sum_{i=1}^{nr.\,forças} (M_y)_i = 0$$

$$R_{My} + (0m)(-10kN) - (3m)(-5kN) = 0$$

$$\mathbf{R_{My} = -15\ kNm}$$

$$R_{Mx} + \sum_{i=1}^{nr.\,forças} (M_x)_i = 0$$

$$R_{Mx} + (2m)(-5kN) - (0m)(-15kN) = 0$$

$$\mathbf{R_{Mx} = 10\ kNm}$$

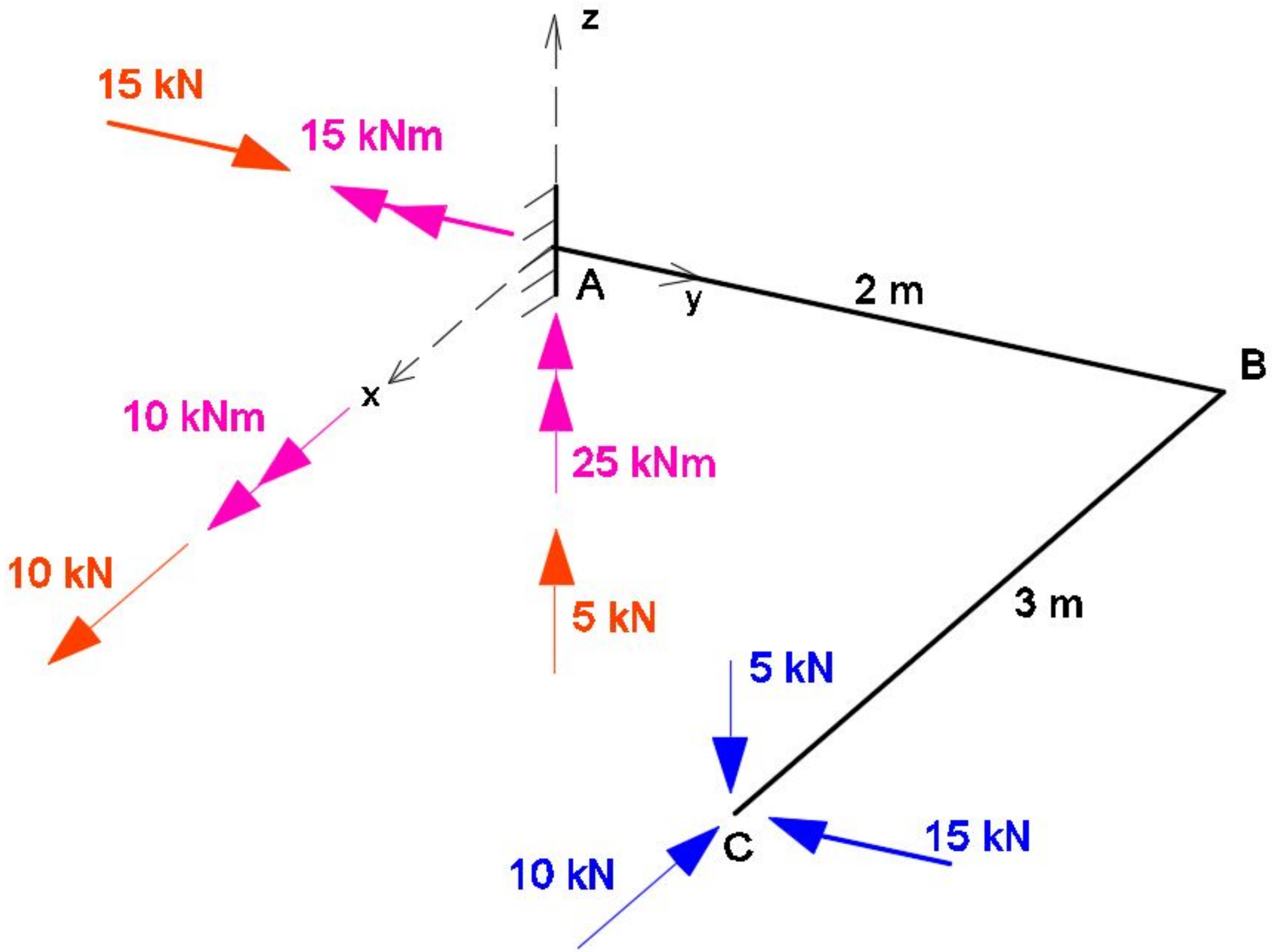
$$R_{Mz} + \sum_{i=1}^{nr.\,forças} (M_z)_i = 0$$

$$\mathbf{R_{Mz} = 25\ kNm}$$

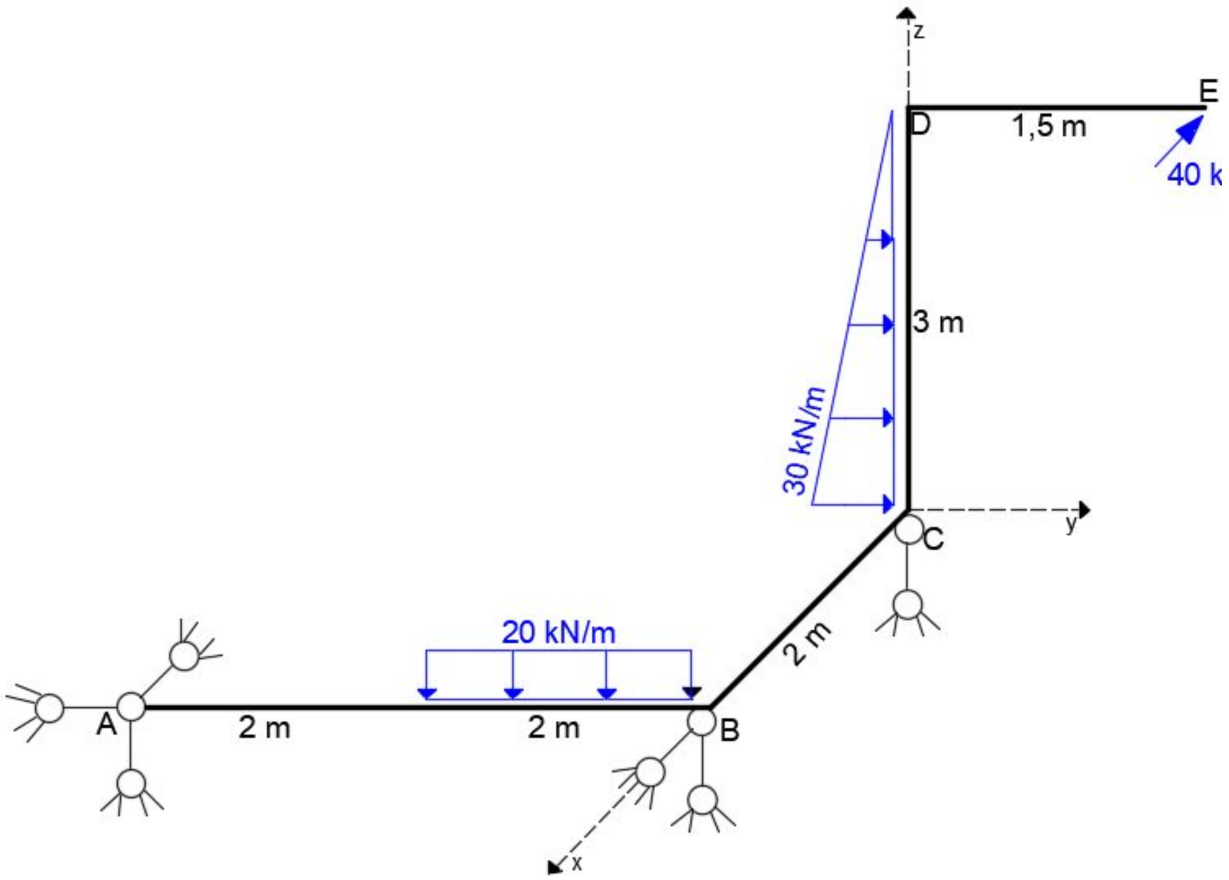
$$R_{Mz} + (3m)(-15kN) - (2m)(-10kN) = 0$$

Exemplo 7: Determinar as reações da estrutura

Reações

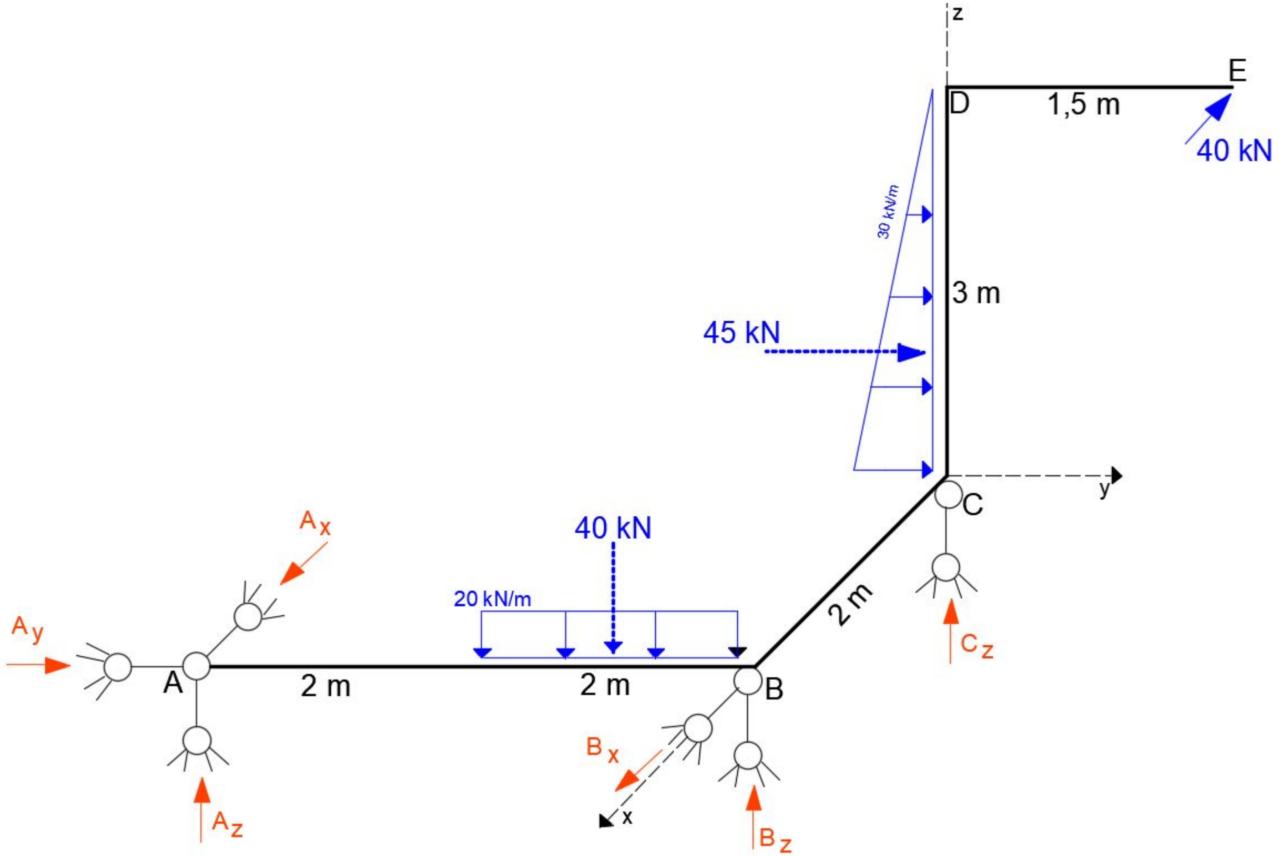


Exemplo 8: Determinar as reações da estrutura



Ações em AB:

$$\mathbf{F_z = -40\ kN; F_x = F_y = 0}$$



Ações em E: $\mathbf{F_x = -40\ kN; F_y = F_z = 0}$

Ações em CD: $\mathbf{F_y = 45\ kN; F_x = F_z = 0}$

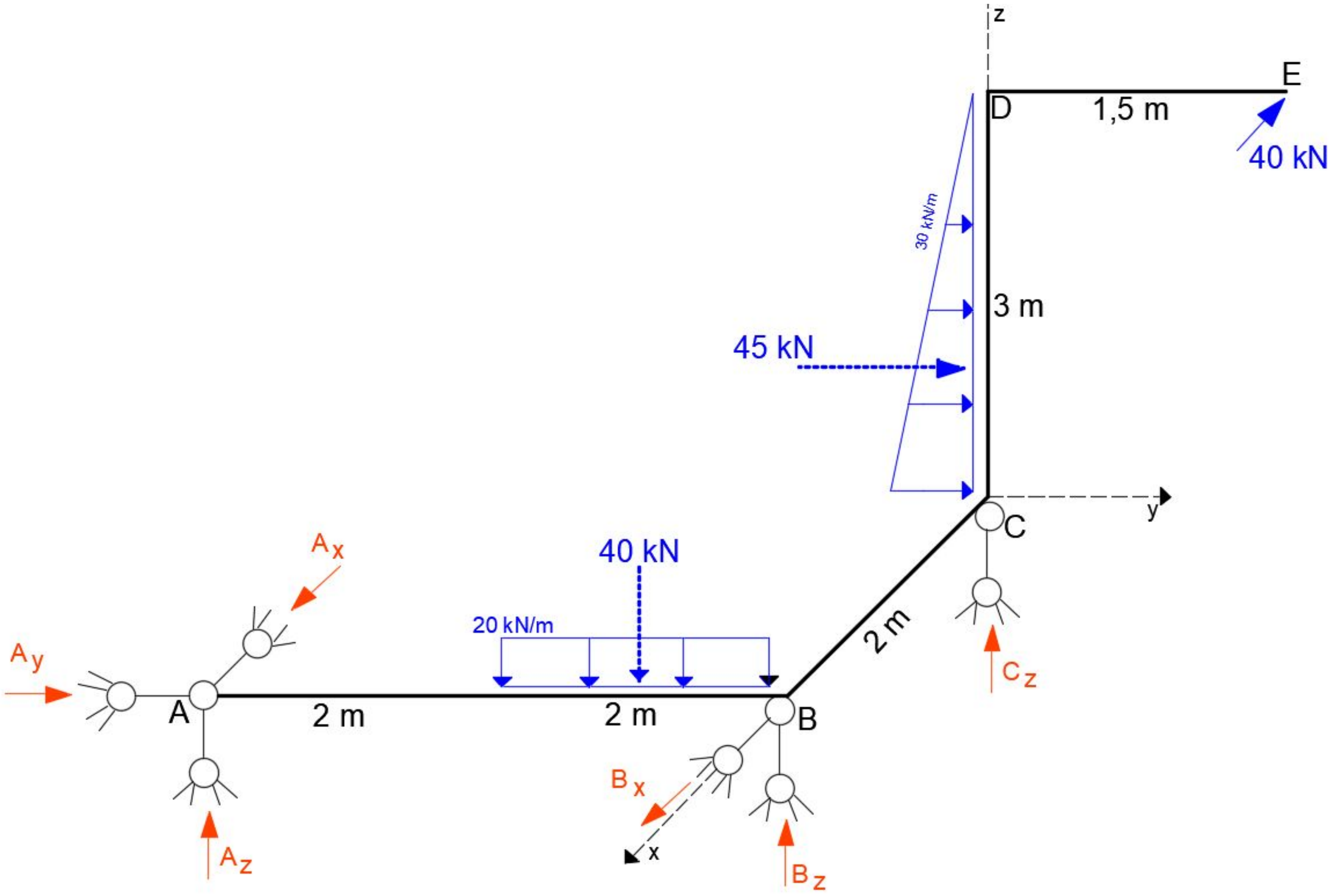
Resposta

$$\sum F_x = 0: \quad A_x + B_x = 40 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y = 45\ kN \quad (\leftarrow)$$

$$\sum F_z = 0: \quad A_z + B_z + C_z = 40 \quad (2)$$

$$M_x = d_y \cdot F_z - d_z \cdot F_y$$
$$M_y = d_z \cdot F_x - d_x \cdot F_z$$
$$M_z = d_x \cdot F_y - d_y \cdot F_x$$

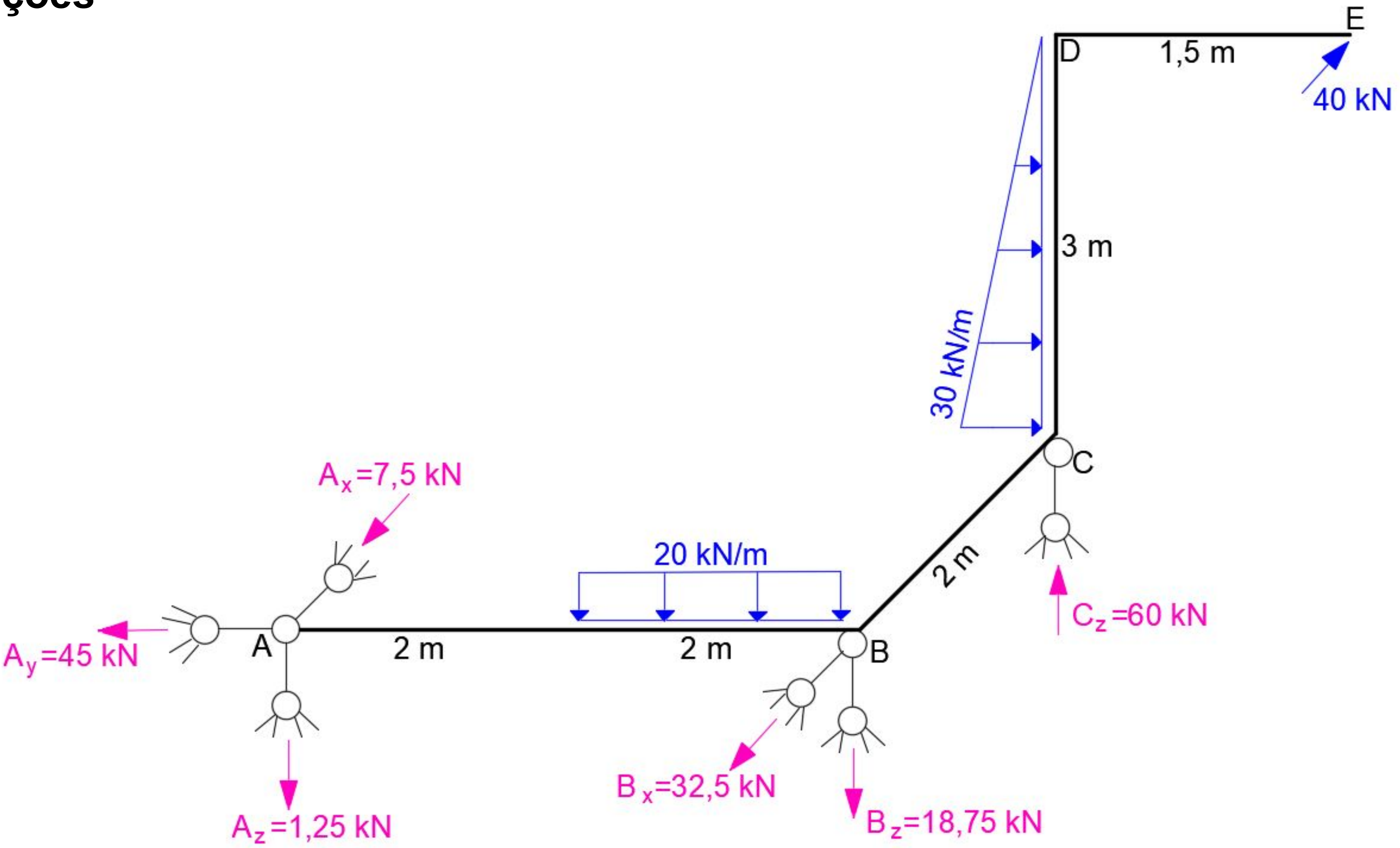


Aplicar eqs. de momentos com pólo em C:

$$\sum M_{Cx} = 0: -40 \cdot (-1) + A_z \cdot (-4) - (45) \cdot (1) = 0 \rightarrow A_z = -1{,}25\ \ kN$$
$$\sum M_{Cy} = 0: -40 \cdot (3) - [(-40) \cdot (2) + B_z \cdot (2) + A_z \cdot (2)] = 0 \rightarrow B_z = -18{,}75\ \ kN$$
$$\sum M_{Cz} = 0: -45 \cdot (2) - [(-40) \cdot (1{,}5) + A_x(-4)] = 0 \rightarrow A_x = 7{,}5\ \ kN$$

Portanto: $B_x = 40 - 7{,}5 = 32{,}5\ \ kN$

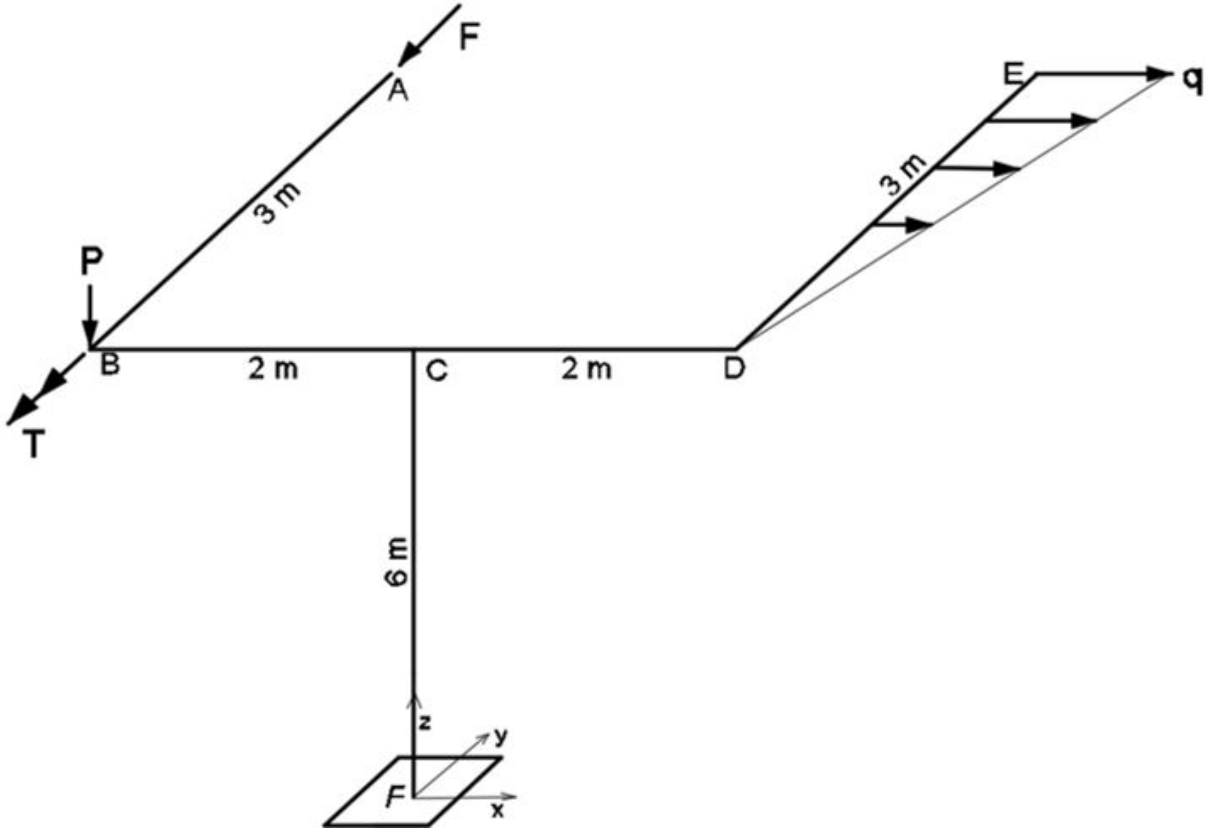
Reações

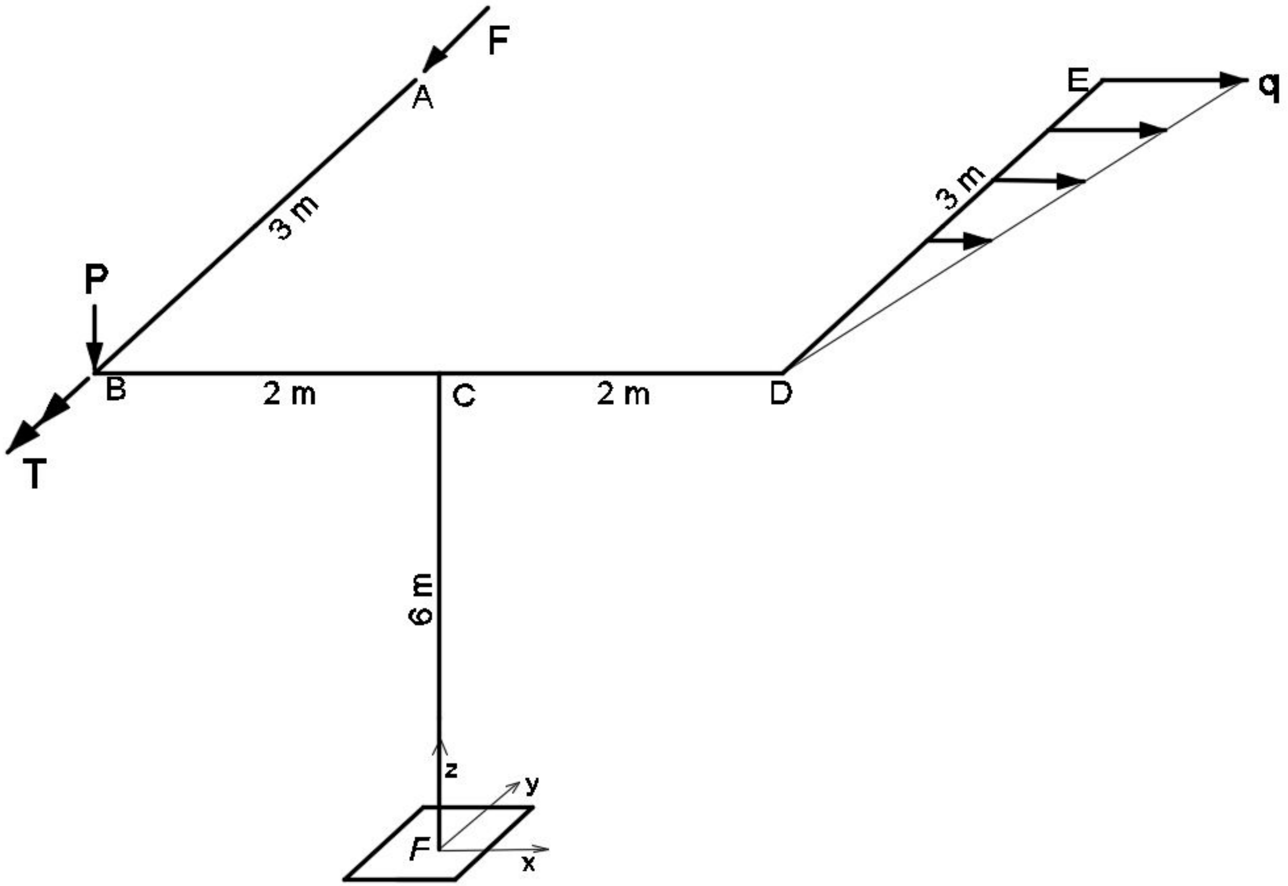


E
D
1,5 m
40 kN
3 m
30 kN/m
C
2 m
A_x=7,5 kN
20 kN/m
C_z=60 kN
A_y=45 kN
A
2 m
2 m
B
B_x=32,5 kN
B_z=18,75 kN
A_z=1,25 kN

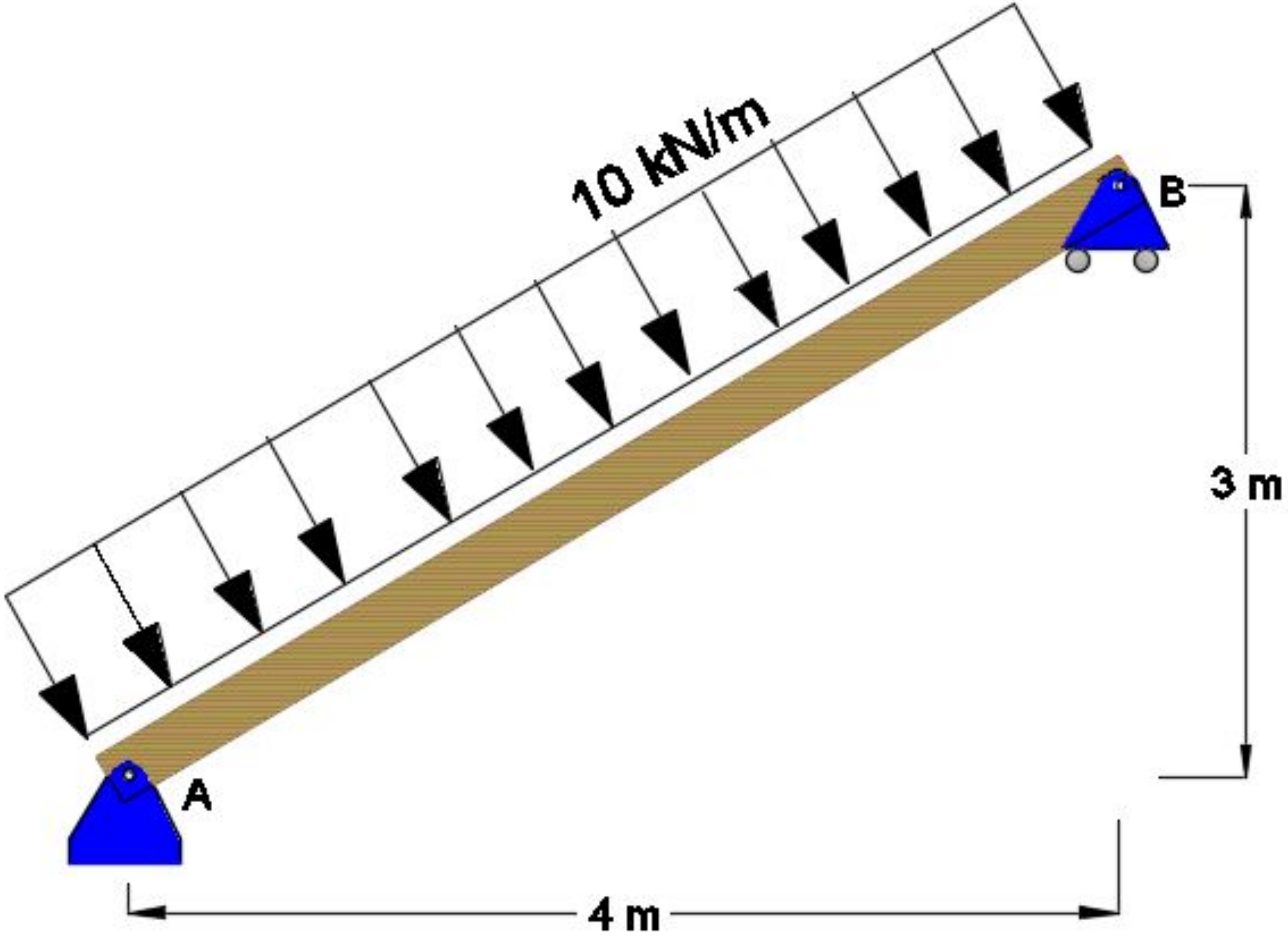
Nº USP:___________________Nome:____

1ª Questão (3,0 ptos) Para a estrutura espacial da figura, as barras AB e DE estão paralelas ao eixo y, a barra BD é paralela ao eixo x e a barra CF está paralela ao eixo z. A força concentrada F e o momento de torção concentrado T estão na direção y. A força concentrada P atua na direção z e o carregamento linearmente distribuído com valor q em E e nulo em D, atuando em toda a barra DE, está na direção x.
Considere: F = 17 kN, P = 18 kN, T = 8 kN.m e q = 10 kN/m. Obtenha as reações no engaste em F.



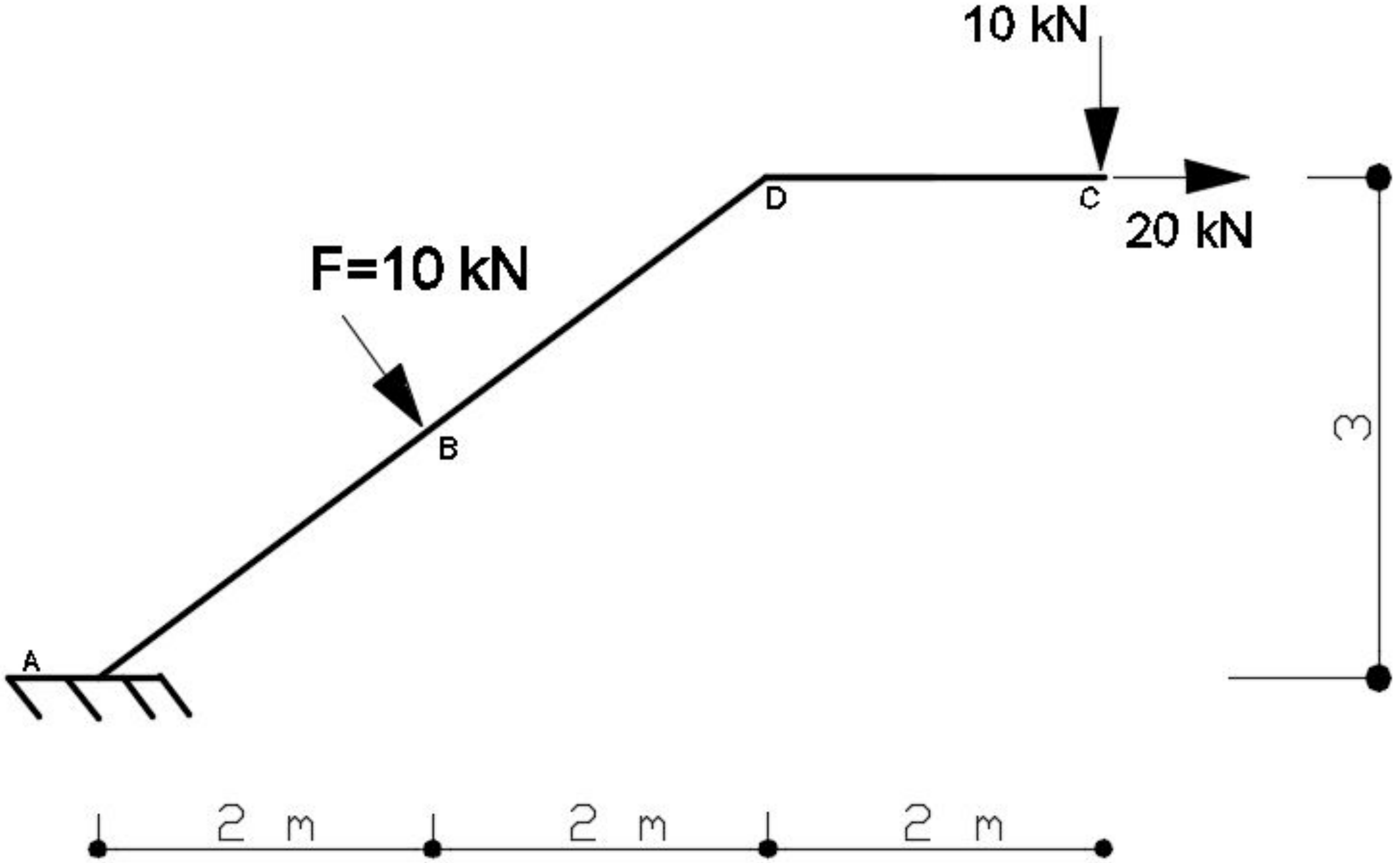

F
A
3 m
P
B
T
2 m
C
2 m
D
E
q
3 m
6 m
z
y
F
x

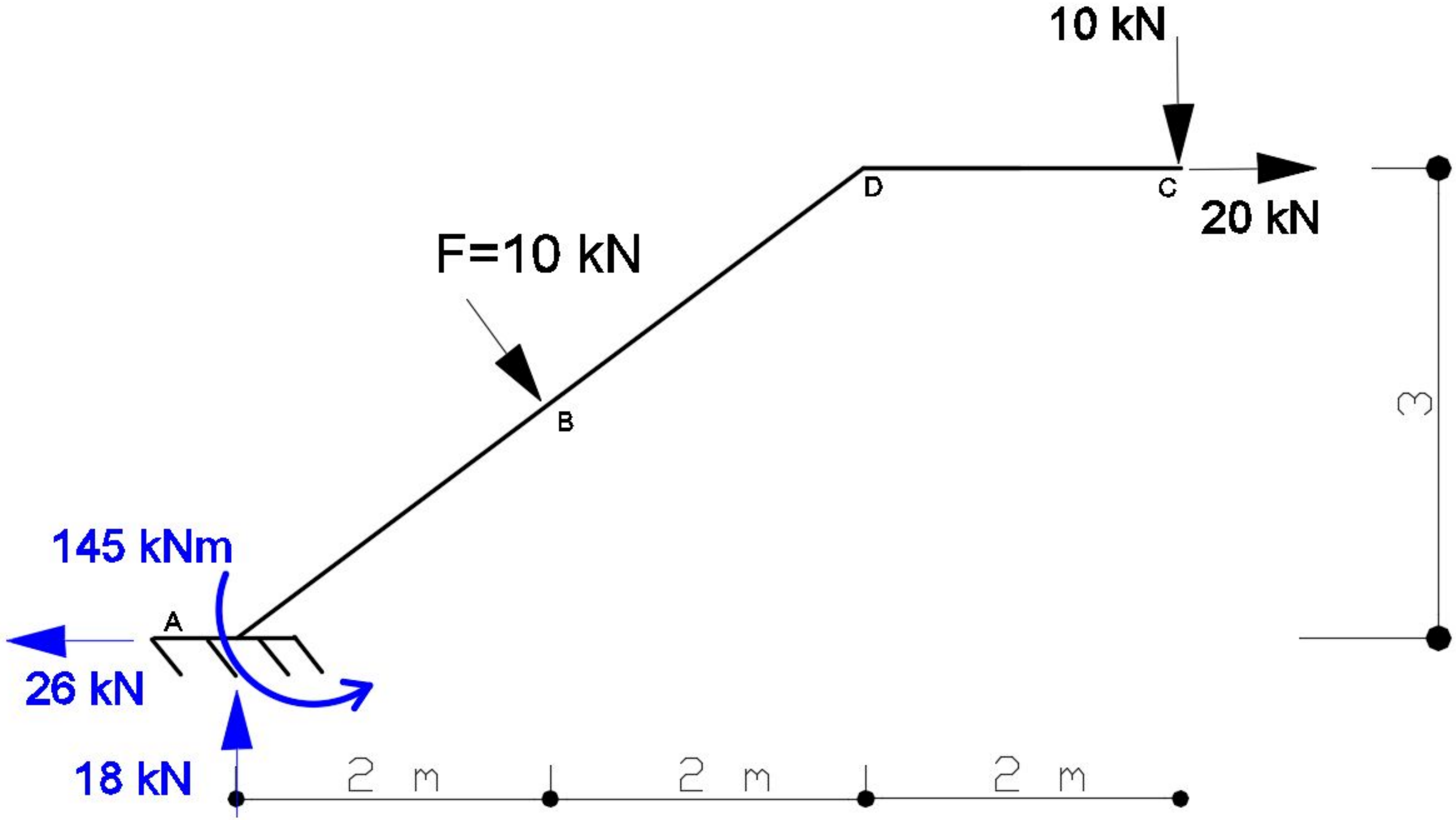
Calcular as reações a seguir.



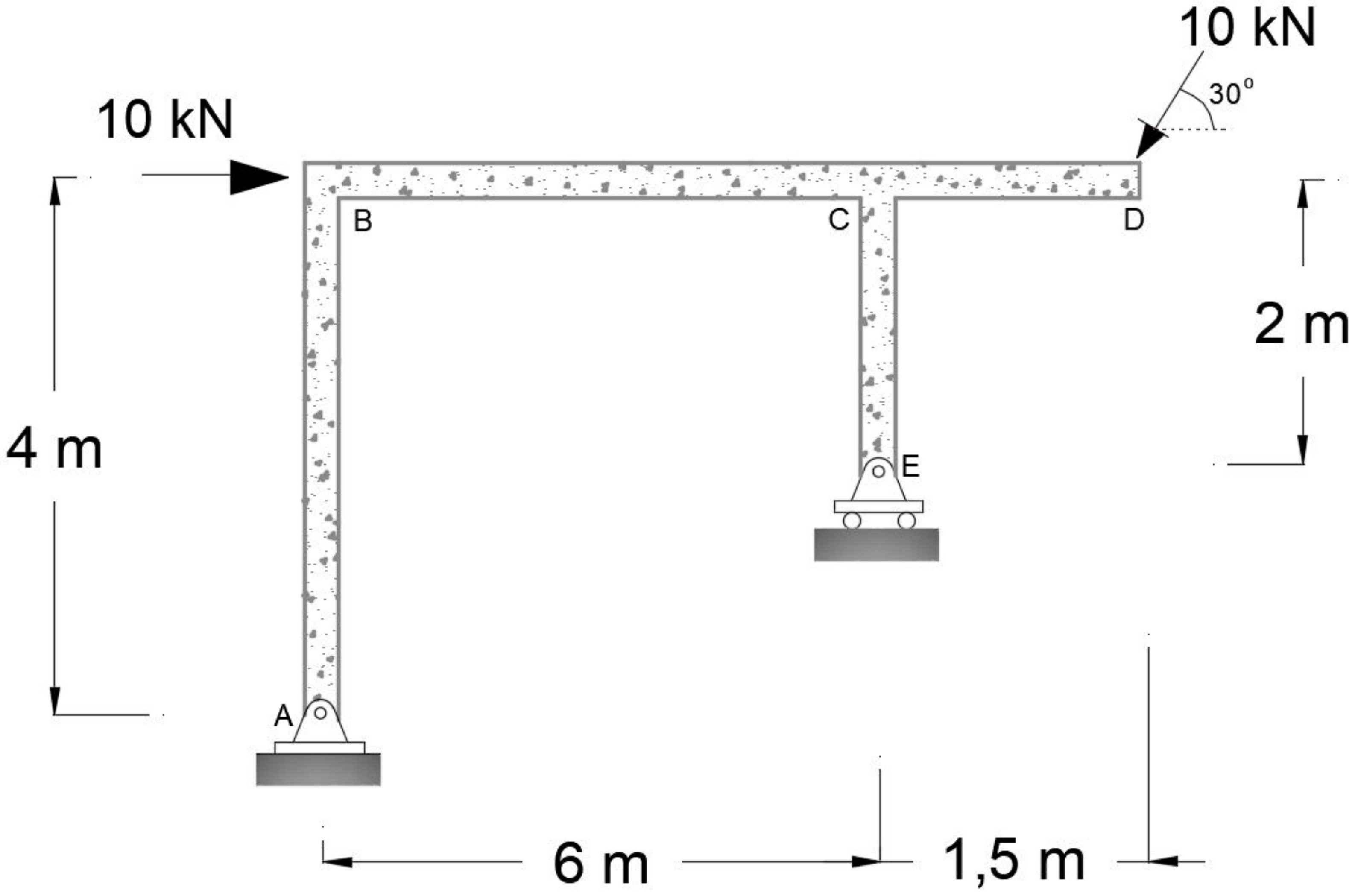
By = 31,25 kN (↑)
Ay = 8,75 kN (↑)
Ax = 30 kN (←)

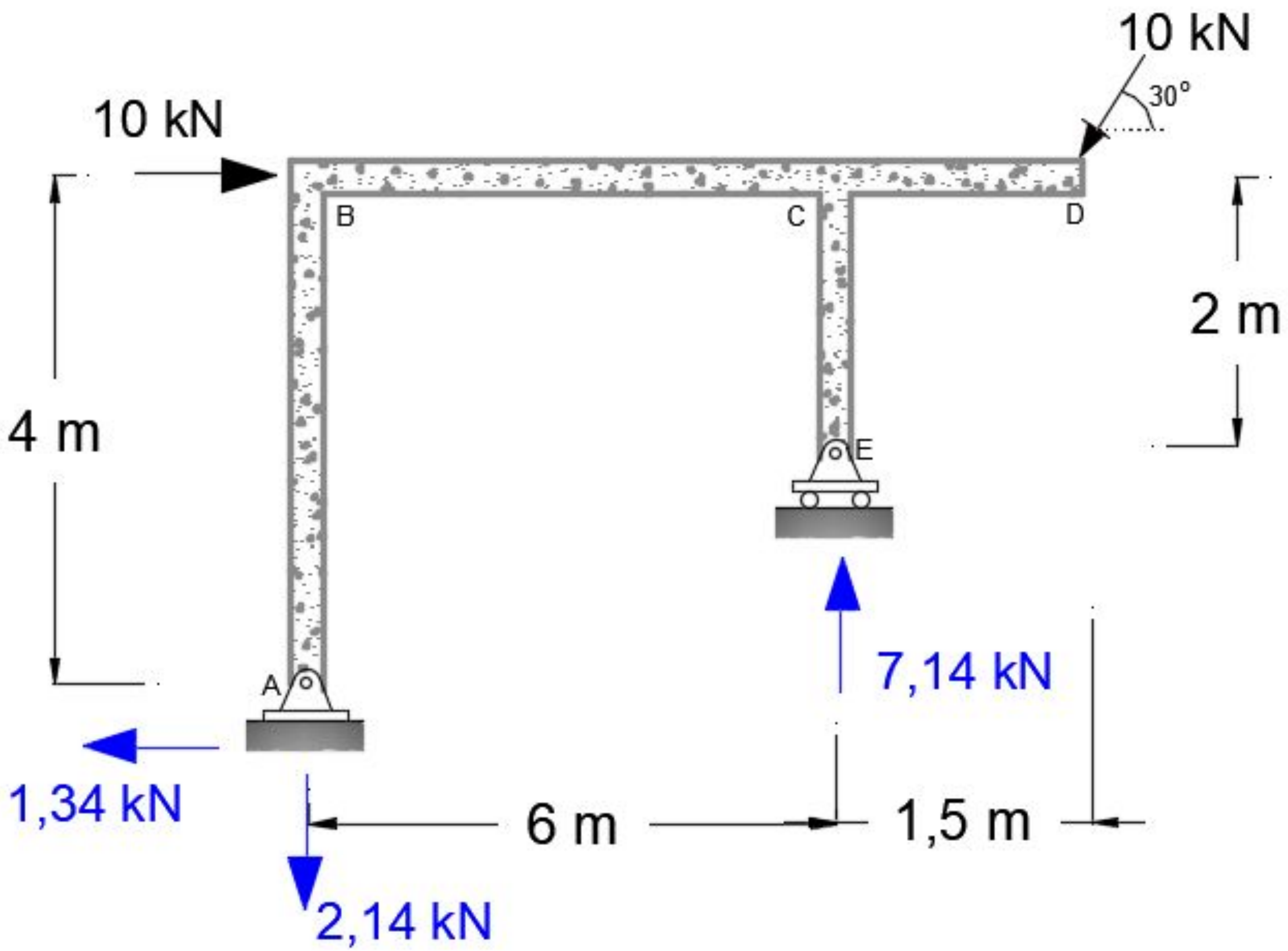
Exemplo: Calcule as reações da estrutura. F é perpendicular a barra AD.



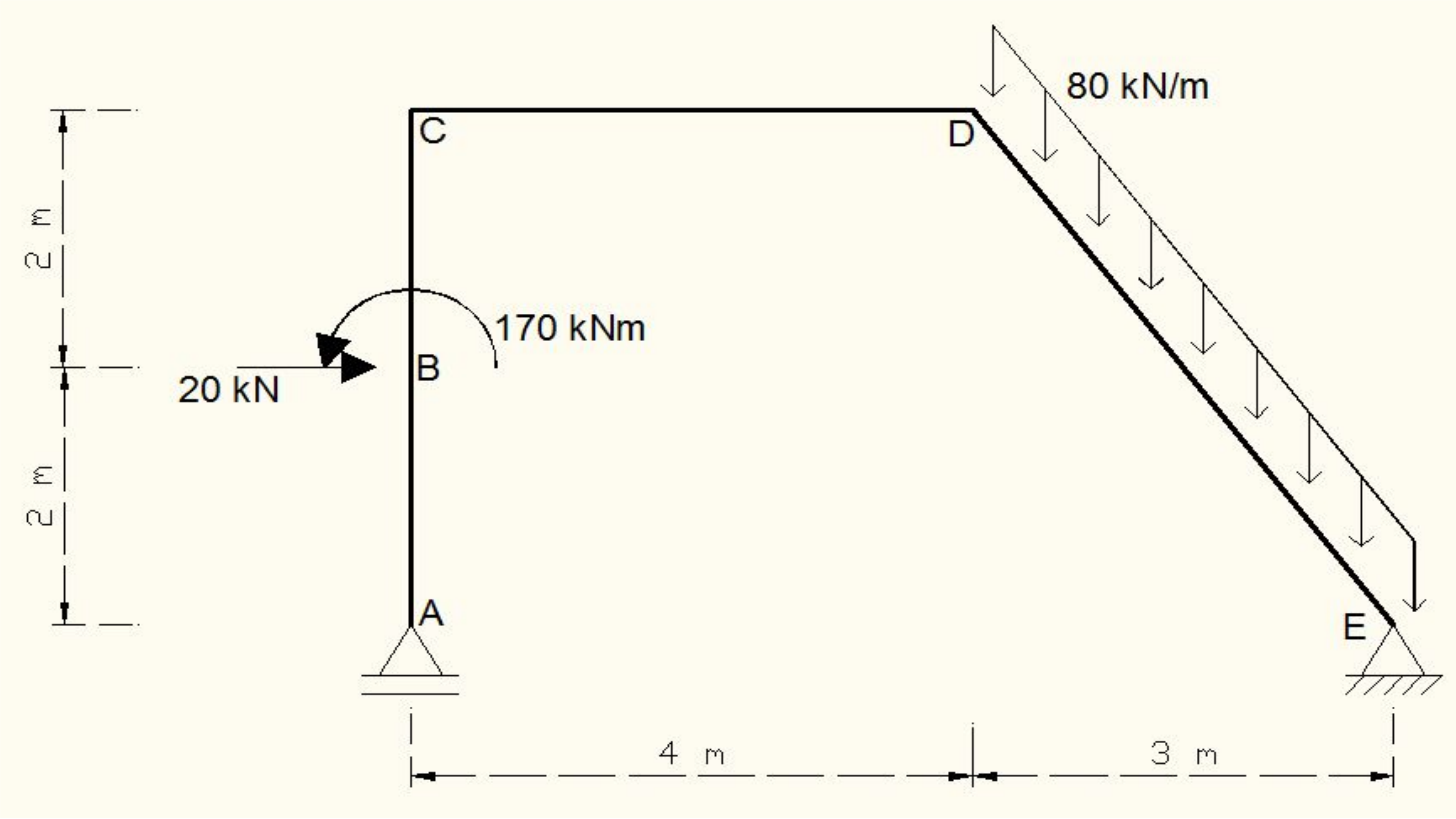

10 kN
D
C
20 kN
F=10 kN
B
3
145 kNm
A
26 kN
18 kN
2 m
2 m
2 m

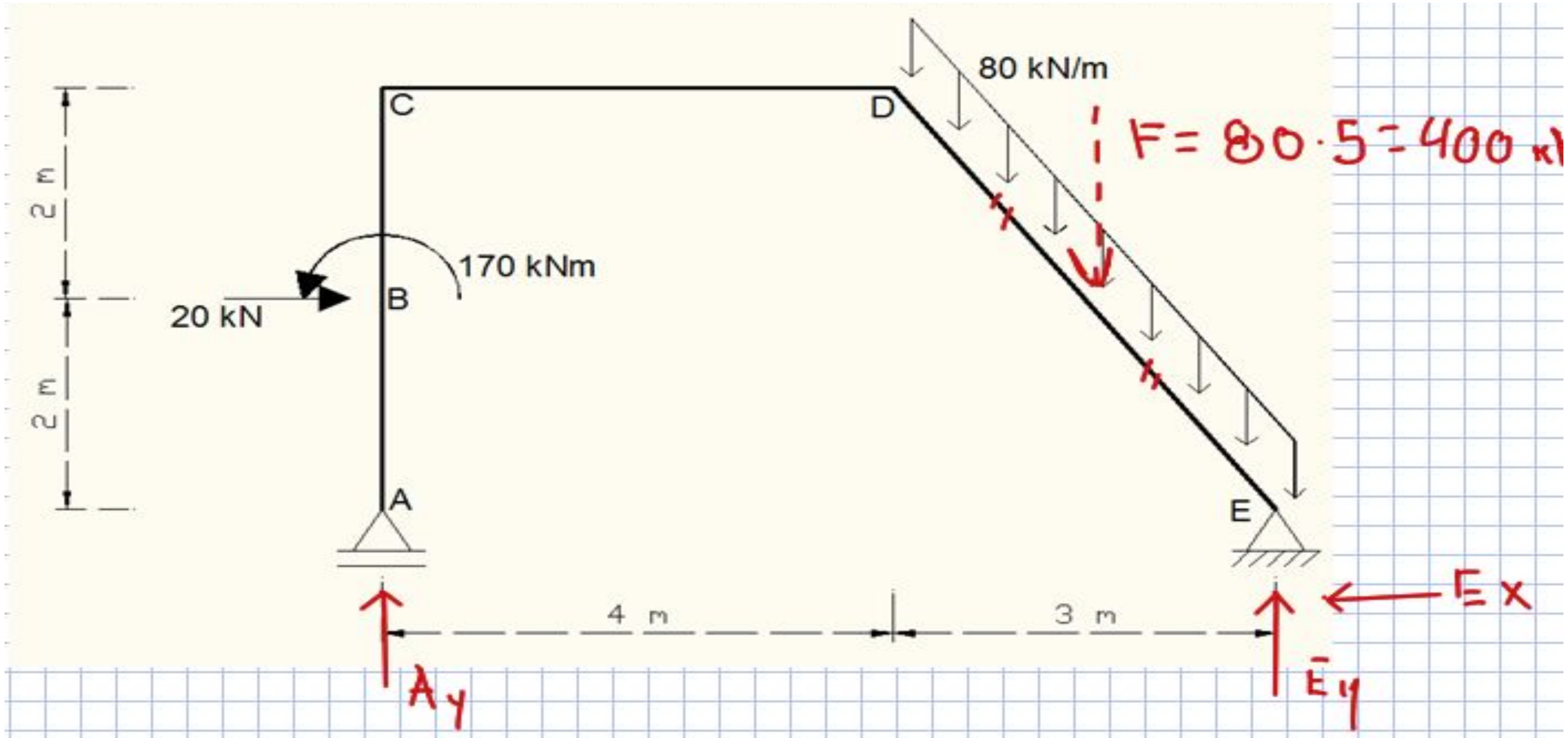
Exemplo: Calcule as reações da estrutura.




10 kN
30°
10 kN
B
C
D
2 m
4 m
E
A
7,14 kN
1,34 kN
6 m
1,5 m
2,14 kN

Exemplo: Calcule as reações da estrutura.





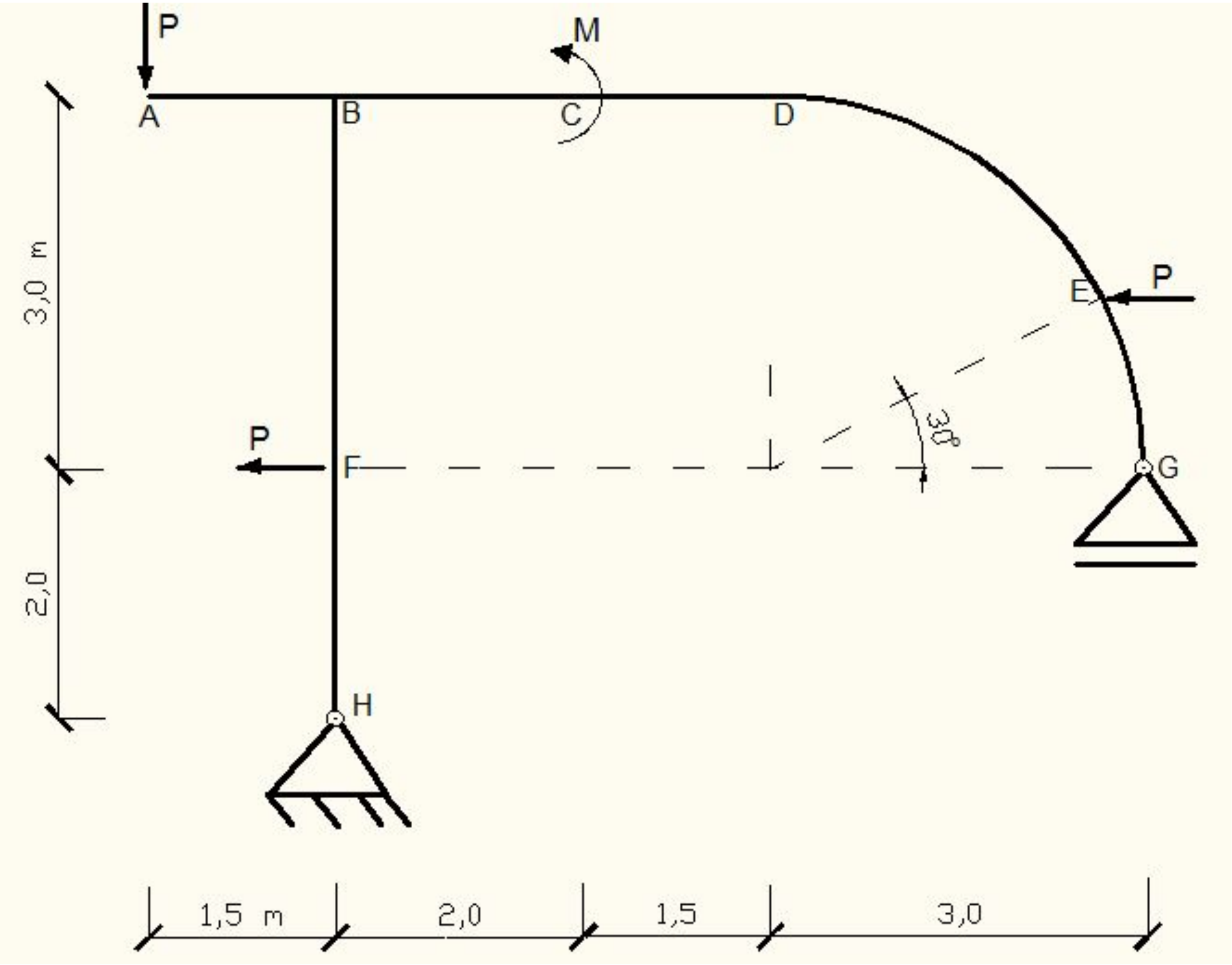
$$\Sigma M_A = 0: \quad E_y \cdot 7 + 170 = 20 \cdot 2 + 400 \cdot 5{,}5$$

$$E_y = 295{,}71 \text{ kN}$$

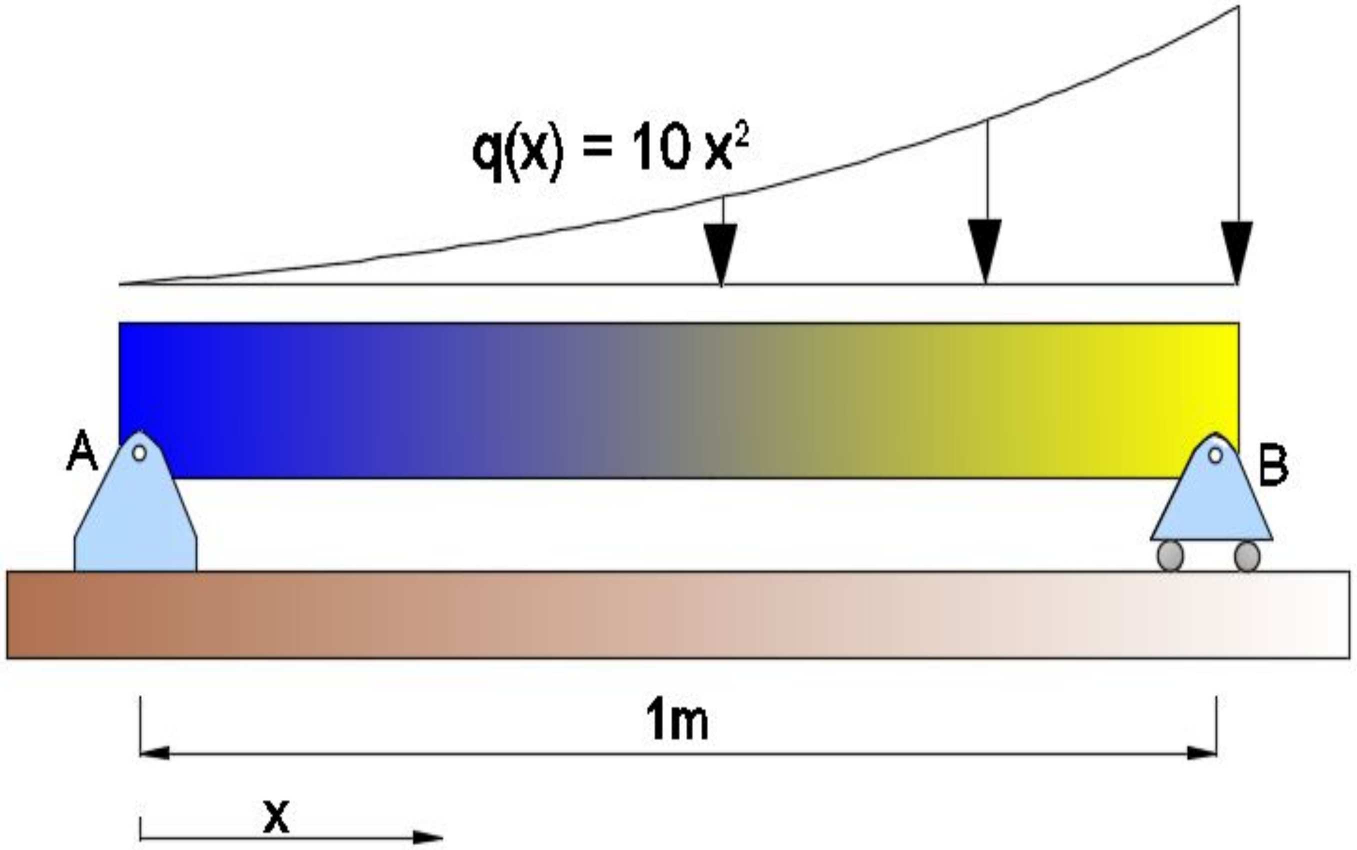
$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + E_y = 400 \rightarrow A_y = 104{,}29 \text{ kN}$$

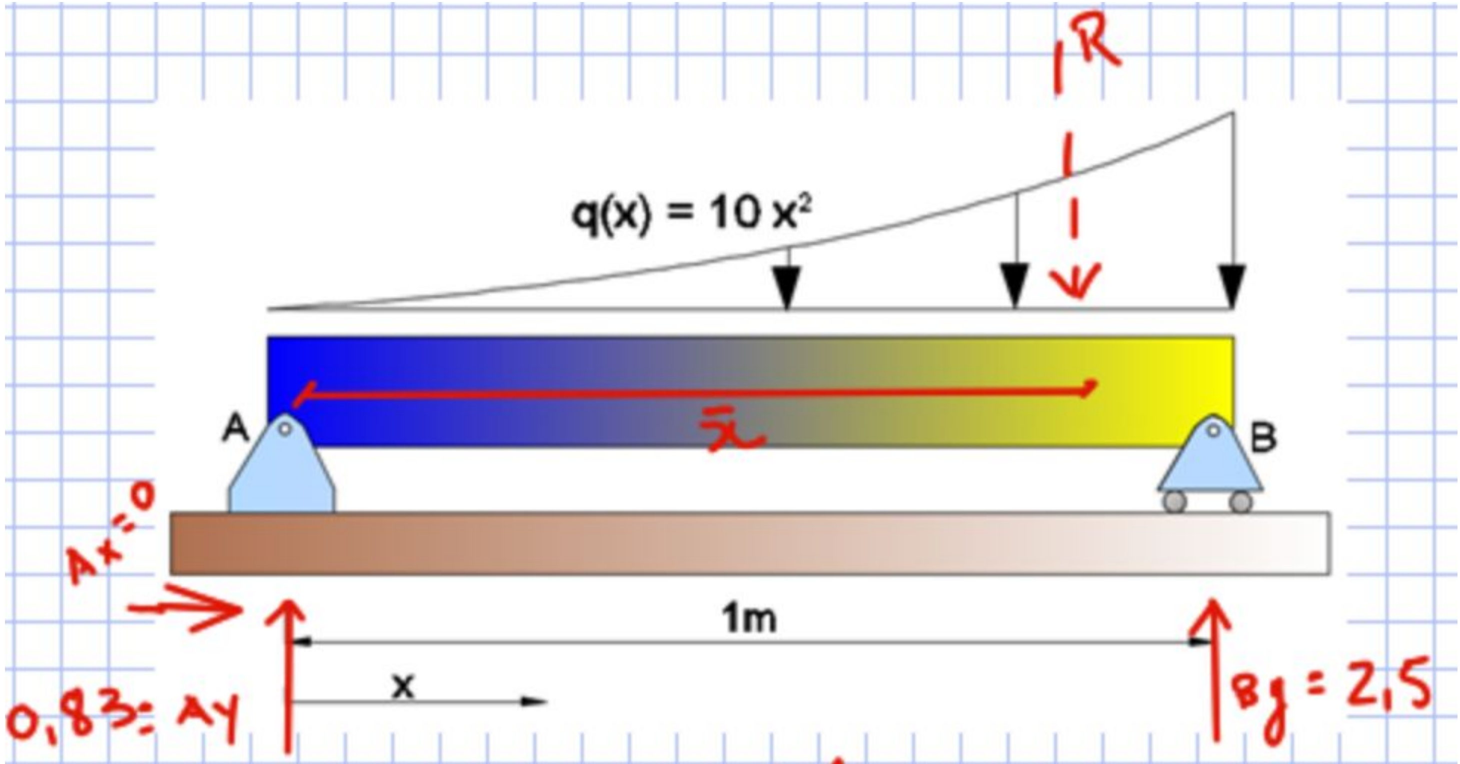
$$\Sigma F_x = 0: \quad E_x = 20 \text{ kN}$$

Para a estrutura da figura a seguir, onde o trecho DG é circular de raio 3 m, sabendo-se que a força concentrada vale P = 40 kN e o momento concentrado aplicado no ponto C tem valor de M = 20 kN.m, pede-se as reações.



Exemplo: Calcule as reações da estrutura.





Por definição: $R=\int_0^{L=1m} q(x)\,dx$

$R=\int_0^1 10x^2\,dx = \frac{10\cdot x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{10}{3}$ (kN)

$\bar{x} = \frac{\int_0^1 q(x)\,x\,dx}{R} = \frac{\int_0^1 (10x^2)\,x\,dx}{10/3} = \frac{\int_0^1 10x^3}{10/3} =$

$\bar{x} = \frac{10x^4}{4}\cdot 3/10\,\Big|_0^1 = \frac{10}{4}\cdot\frac{3}{10} = 0,75\,m$

$\Sigma M_A = 0$: $B_y\cdot 1 = \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{2} \rightarrow B_y = 2,5\,kN$

$\Sigma F_y = 0$: $A_y + B_y = \frac{10}{3} \rightarrow A_y = \frac{10}{3} - 2,5 = \frac{5}{6} = 0,83\,kN$