

SEL 309 Eletromagnetismo

Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

Forças Magnéticas, Materiais e Indutância

Fonte: “Eletromagnetismo”, Hayt Jr, 8ª Edição, Capítulo 8.

1) Força em uma carga em movimento

Uma carga em movimento em um campo magnético \mathbf{B} experimenta uma força \mathbf{F} que é perpendicular à velocidade \mathbf{v} da carga e a \mathbf{B} , e cuja magnitude é proporcional à carga. O sentido da força é dado pelo unitário que define o sentido de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Logo, a força magnetostática é dada por,

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

Lembre-se da definição da força eletrostática definida na Aula 2, onde temos que,

$$\mathbf{F} = QE \quad (2)$$

Assim, combinando (por superposição) as forças eletrostática e magnetostática, chegamos à força gerada pelos campos elétrico e magnético, ou seja,

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

conhecida como equação de **Força de Lorentz**.

Se desejarmos calcular a força magnética de um elemento diferencial de corrente, então temos,

$$d\mathbf{F} = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4)$$

EP8.1. A carga pontual $Q = 18 \text{ nC}$ tem uma velocidade de $5 \times 10^6 \text{ m/s}$ na direção e sentido $\mathbf{a}_v = 0,60\mathbf{a}_x + 0,75\mathbf{a}_y + 0,30\mathbf{a}_z$. Calcule a intensidade da força exercida na carga pelo campo: (a) $\mathbf{B} = -3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z \text{ mT}$; (b) $\mathbf{E} = -3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z \text{ kV/m}$; (c) \mathbf{B} e \mathbf{E} agindo conjuntamente.

Resp. $660 \mu\text{N}$; $140 \mu\text{N}$; $670 \mu\text{N}$

Agora, observe a figura abaixo. Essa figura ilustra um importante efeito conhecido como **Efeito Hall**. Forças de Coulomb entre elétrons e íons positivos tendem a resistir a qualquer deslocamento imposto pela presença de um campo magnético. Em condutores, a força magnética é muito menor que a força de Coulomb, e o deslocamento dos elétrons é essencialmente imperceptível. No entanto, é possível notar a existência de uma separação de cargas por conta de uma pequena diferença de potencial que **pode ser medida** ao longo do condutor em uma direção perpendicular tanto a \mathbf{B} quanto a \mathbf{v} . É essa diferença de potencial que é denominada de tensão Hall ou **Efeito Hall**.

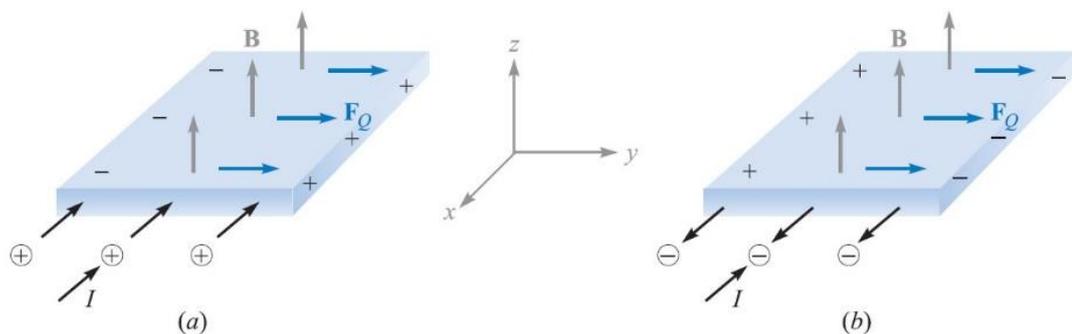
Em (a), onde cargas positivas se movem para dentro ($-\mathbf{a}_x$), temos que

$$\mathbf{F}_Q = Q v_x(-\mathbf{a}_x) \times B_z \mathbf{a}_z = F_y \mathbf{a}_y = Q v_x B_z \mathbf{a}_y$$

fazendo com que as cargas positivas se desloquem para a direita. Enquanto em (b),

$$\mathbf{F}_Q = -Q v_x(+\mathbf{a}_x) \times B_z \mathbf{a}_z = -F_y \mathbf{a}_y = -(-Q v_x B_z \mathbf{a}_y) = Q v_x B_z \mathbf{a}_y$$

Como Q é negativo, a força \mathbf{F}_Q está de novo na direção $+\mathbf{a}_y$. Isso faz com que as cargas positivas se desloquem para a esquerda. Esse efeito permite que correntes de elétrons e de lacunas sejam diferenciadas uma da outra (permite determinar se um semiconductor é tipo n ou p).



O efeito Hall pode ser experimentado em seus *smart phones*. É este o efeito que permite travar ou liberar a tela do celular quando este tem uma capa dobrável equipada com ímãs, e esta capa toca a tela. É também usado para possibilitar que seu celular tenha uma bússola. Permite ainda (embora eu precise confirmar se celulares já estão usando isso) que você digite um texto sem que seu dedo toque a tela.

Já vimos na Aula 5 que,

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$$

e que,

$$dQ = \rho_v dv$$

Assim,

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho_v dv \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho_v \mathbf{v} \times \mathbf{B} dv = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dv \quad (5)$$

Como $\mathbf{J} dv = \mathbf{K} dS = Id\mathbf{L}$,

$$d\mathbf{F} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} dS \quad (6)$$

que é aplicada uma densidade superficial, e

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (7)$$

aplicada a um filamento diferencial de corrente.

Integrando (5)-(7),

$$\mathbf{F} = \int_v \mathbf{J} \times \mathbf{B} dv \quad (8)$$

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{K} \times \mathbf{B} dS \quad (9)$$

$$\mathbf{F} = \oint Id\mathbf{L} \times \mathbf{B} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L} \quad (10)$$

Aplicando (7) ou (10) a um condutor retilíneo submetido a um campo uniforme,

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (11)$$

A magnitude desta força é, então,

$$F = BIL\sin\theta \quad (12)$$

onde θ é o ângulo entre os vetores que representam a direção do fluxo de corrente e a direção da densidade de fluxo magnético.

EXEMPLO 8.1

Como um exemplo numérico dessas equações, considere a Figura 8.2. Temos uma espira quadrada no plano $z = 0$, na qual circula uma corrente de 2 mA no campo de um filamento infinito no eixo y , conforme mostrado. Desejamos a força total na espira.

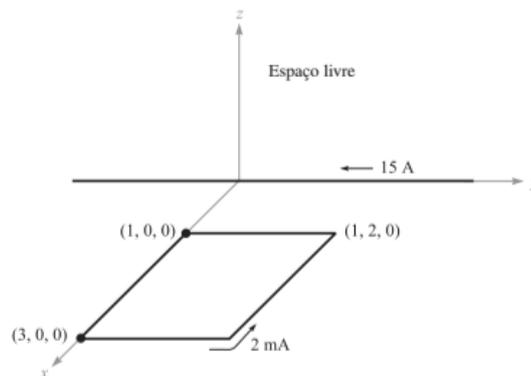


Figura 8.2 Uma espira quadrada no plano xy pela qual passa uma corrente de 2 mA é submetida a um campo \mathbf{B} não uniforme.

EP8.2. O campo $\mathbf{B} = -2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ mT está presente no espaço livre. Encontre o vetor força exercido em um fio retilíneo que conduz uma corrente de 12 A na direção \mathbf{a}_{AB} , dados $A(1, 1, 1)$ e: (a) $B(2, 1, 1)$; (b) $B(3, 5, 6)$.

Resp. $-48\mathbf{a}_y + 36\mathbf{a}_z$ mN; $12\mathbf{a}_x - 216\mathbf{a}_y + 168\mathbf{a}_z$ mN

EP8.3. A amostra de semiconductor mostrada na Figura 8.1 é um silício do tipo n , que possui uma seção reta retangular de 0,9 mm por 1,1 cm e um comprimento de 1,3 cm. Considere as mobilidades dos elétrons e das lacunas 0,13 e 0,03 $\text{m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$, respectivamente, na temperatura de operação. Seja $B = 0,07 \text{ T}$ e a intensidade de campo elétrico na direção de circulação da corrente igual a 800 V/m. Calcule a intensidade de: (a) a tensão ao longo do comprimento da amostra; (b) a velocidade de deriva; (c) a força transversal, por coulomb de carga que se desloca, causada por B ; (d) a intensidade de campo elétrico transversal; (e) a tensão de Hall.

Resp. 10,40 V; 104,0 m/s; 7,28 N/C; 7,28 V/m; 80,1 mV

Solução: $V = Ed$; $v = \mu_e E$; $F_t/Q = vB$; $E_t = F_t/Q$; $V_t = E_t l$

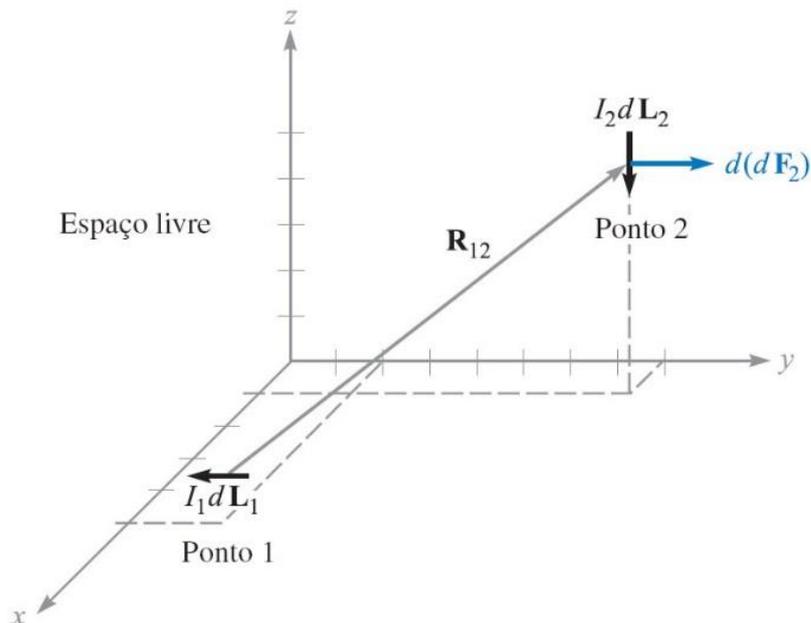
2) Força entre elementos diferenciais de corrente

Esse conceito será explicado com base na figura abaixo. Assim, o campo no ponto 2 produzido por um elemento de corrente no ponto 1 é dado por (Lei de Biot-Savart, ver equação (2) da Aula 7):

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2} \quad (13)$$

A força diferencial nesse caso é expressa como,

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (14)$$



Assim, temos que a quantidade diferencial de força diferencial no elemento 2, definida por $d(d\mathbf{F}_2)$, usando $d\mathbf{B}_2 = \mu_0 d\mathbf{H}_2$ e $d(d\mathbf{F}_2) = I_2 d\mathbf{L}_2 \times d\mathbf{B}_2$ em (13), é dada por,

$$d(d\mathbf{F}_2) = I_2 d\mathbf{L}_2 \times d\mathbf{B}_2 = I_2 d\mathbf{L}_2 \times \mu_0 d\mathbf{H}_2$$

$$d(d\mathbf{F}_2) = \mu_0 I_2 d\mathbf{L}_2 \times \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2}$$

$$d(d\mathbf{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2} d\mathbf{L}_2 \times (d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}) \quad (15)$$

Por isso, para encontramos a força total entre dois circuitos filamentosos temos que integrar duas vezes:

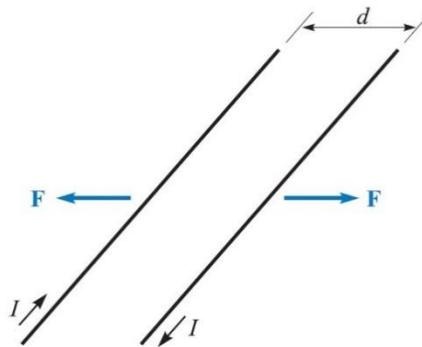
$$\mathbf{F}_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[d\mathbf{L}_2 \times \oint \frac{d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{R_{12}^2} \right]$$

$$\mathbf{F}_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\mathbf{a}_{R12} \times d\mathbf{L}_1}{R_{12}^2} \right] \times d\mathbf{L}_2 \quad (15)$$

EP8.4. Dois elementos diferenciais de corrente, $I_1 \Delta \mathbf{L}_1 = 3 \times 10^{-6} \mathbf{a}_y$, A · m em $P_1(1, 0, 0)$ e $I_2 \Delta \mathbf{L}_2 = 3 \times 10^{-6}(-0,5\mathbf{a}_x + 0,4\mathbf{a}_y + 0,3\mathbf{a}_z)$ A · m em $P_2(2, 2, 2)$, estão posicionados no espaço livre. Encontre o vetor força exercido em: (a) $I_2 \Delta \mathbf{L}_2$ por $I_1 \Delta \mathbf{L}_1$; (b) $I_1 \Delta \mathbf{L}_1$ por $I_2 \Delta \mathbf{L}_2$.

Resp. $(-1,333\mathbf{a}_x + 0,333\mathbf{a}_y - 2,67\mathbf{a}_z)10^{-20}$ N; $(4,67\mathbf{a}_x + 0,667\mathbf{a}_z)10^{-20}$ N

Vamos, agora, encontrar a força de repulsão entre dois condutores filamentosos infinitamente longos e paralelos, como ilustra a figura abaixo.



Uma maneira mais conveniente de encontrar a força entre dois condutores filamentosos é descrita a seguir. Da Lei Circuital de Ampère, Aula 7, temos que,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

Temos que o vetor densidade de fluxo magnético \mathbf{B} no filamento 1 devido a I_1 é dado por (lembre-se que pela regra da mão direita \mathbf{H} está na direção e sentido de \mathbf{a}_ϕ),

$$\int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = I_1$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{I_1}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

Já que

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

Este campo é uniforme e perpendicular ao filamento 1. Logo, a força que ele exerce no filamento 2 (\mathbf{F}_2) é melhor representada como força por unidade de comprimento a ser obtida da relação,

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}_1$$

Supondo que I_2 flui no sentido negativo de z ,

$$\mathbf{F}_2 = I_2 (-\mathbf{a}_z) L \times \mu_0 \frac{I_1}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{F}_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2 L}{2\pi\rho} \mathbf{a}_r$$

Assim, a magnitude da força por unidade de comprimento no filamento 2 para $I_1 = I_2$, é dada por,

$$\frac{F_2}{L} = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi\rho}$$

Calculando, agora, a força no filamento 1 devido à corrente em 2. Logo,

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{F}_1 = I_1 \mathbf{L}_1 \times \mathbf{B}_2$$

Seguindo a nossa orientação, I_1 flui no sentido positivo de z , assim,

$$\mathbf{F}_1 = I_1 (+\mathbf{a}_z) L \times \mu_0 \frac{I_2}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{F}_1 = -\mu_0 \frac{I_1 I_2 L}{2\pi\rho} \mathbf{a}_r$$

A magnitude da força por unidade de comprimento no filamento 1 é dada por,

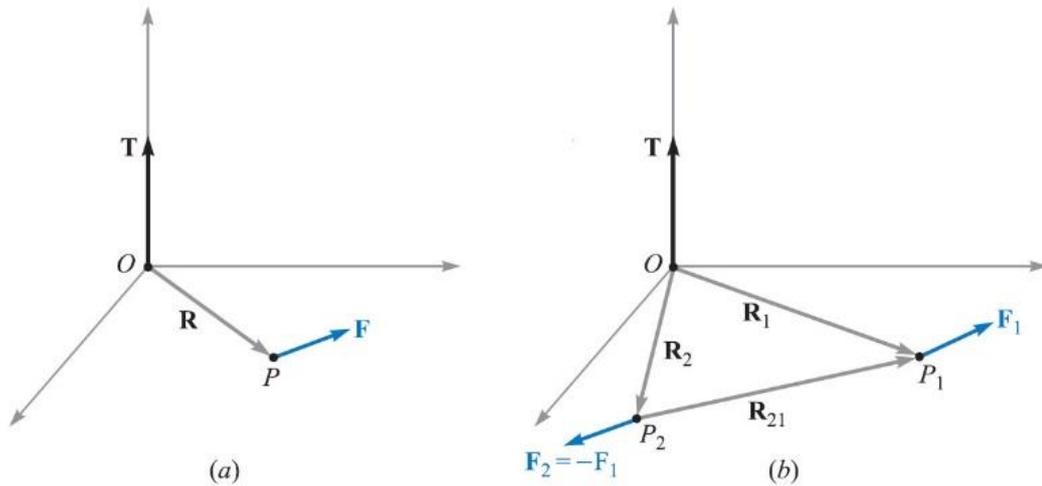
$$\frac{F_1}{L} = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi\rho}$$

Veja que \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 estão em sentidos opostos, mas possuem a mesma magnitude. Com isso, temos que a **força é repulsiva**. Caso as correntes estivessem na mesma direção, a força seria de atração.

3) Força e torque em um circuito fechado

O torque (ou momento de uma força) em torno de um ponto específico é o produto vetorial entre um “braço de alavanca” fixado naquele ponto e a força, veja figura abaixo. A alavanca, em nosso caso, é a distância \mathbf{R} entre a origem e o ponto (P) de aplicação da força, como ilustrado em (a). Matematicamente,

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} \quad (16)$$



Assim, podemos ver que o torque é normal tanto a \mathbf{R} quanto a \mathbf{F} . No caso de duas forças serem aplicadas, como ilustrado em (b), temos que o torque será,

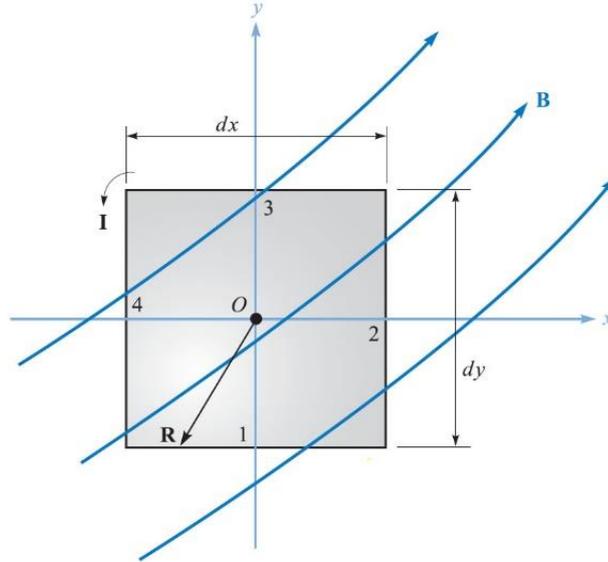
$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2 \quad (16)$$

Sempre que a força total for zero ($\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$), como em (b) que mostra o caso para um objeto fixo que não sofre translação, temos que,

$$\mathbf{T} = (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_1 \quad (17)$$

onde $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$. Com isso, o torque é independente da escolha da origem do problema.

Agora, a título de exemplo, considere o esquema mostrado na figura abaixo, que mostra uma espira mergulhada em um campo magnético \mathbf{B} . A espira está no plano xy , e possui lados de comprimento d_x e d_y .



No centro da espira, a densidade de fluxo magnético é \mathbf{B}_0 . Assim, no lado 1 da figura,

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

$$d\mathbf{F}_1 = Idx\mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_0 = Idx\mathbf{a}_x \times (B_{0x}\mathbf{a}_x + B_{0y}\mathbf{a}_y + B_{0z}\mathbf{a}_z)$$

$$d\mathbf{F}_1 = Idx(B_{0y}\mathbf{a}_z - B_{0z}\mathbf{a}_y)$$

O braço de alavanca para esse lado é,

$$\mathbf{R}_1 = -\frac{1}{2}dya_y$$

$$d\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 = -\frac{1}{2}dya_y \times Idx(B_{0y}\mathbf{a}_z - B_{0z}\mathbf{a}_y)$$

$$d\mathbf{T}_1 = -\frac{1}{2}dxdyIB_{0y}\mathbf{a}_x$$

A contribuição do lado 3 é a mesma,

$$d\mathbf{F}_3 = Idx(-\mathbf{a}_x) \times \mathbf{B}_0 = -Idx\mathbf{a}_x \times (B_{0x}\mathbf{a}_x + B_{0y}\mathbf{a}_y + B_{0z}\mathbf{a}_z)$$

$$d\mathbf{F}_3 = -Idx(B_{0y}\mathbf{a}_z - B_{0z}\mathbf{a}_y)$$

$$\mathbf{R}_3 = \frac{1}{2}dya_y$$

$$d\mathbf{T}_3 = \mathbf{R}_3 \times d\mathbf{F}_3 = \frac{1}{2}dya_y \times [-Idx(B_{0y}\mathbf{a}_z - B_{0z}\mathbf{a}_y)]$$

$$d\mathbf{T}_3 = -\frac{1}{2}dxdyIB_{0y}\mathbf{a}_x = d\mathbf{T}_1$$

No lado 2, temos,

$$d\mathbf{F}_2 = Idy\mathbf{a}_y \times \mathbf{B}_0 = Idy\mathbf{a}_y \times (B_{0x}\mathbf{a}_x + B_{0y}\mathbf{a}_y + B_{0z}\mathbf{a}_z)$$

$$d\mathbf{F}_2 = Idy(-B_{0x}\mathbf{a}_z + B_{0z}\mathbf{a}_x)$$

$$\mathbf{R}_2 = \frac{1}{2}dx\mathbf{a}_x$$

$$d\mathbf{T}_2 = \mathbf{R}_2 \times d\mathbf{F}_2 = \frac{1}{2}dx\mathbf{a}_x \times Idy(-B_{0x}\mathbf{a}_z + B_{0z}\mathbf{a}_x)$$

$$d\mathbf{T}_2 = \frac{1}{2}dxdyIB_{0x}\mathbf{a}_y$$

O lado 4 produz resultado similar, logo,

$$d\mathbf{T}_4 = \frac{1}{2}dxdyIB_{0x}\mathbf{a}_y = d\mathbf{T}_2$$

O torque total é então,

$$d\mathbf{T}_T = d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_3 + d\mathbf{T}_4 = 2d\mathbf{T}_1 + 2d\mathbf{T}_2$$

$$d\mathbf{T}_T = -dxdyIB_{0y}\mathbf{a}_x + dxdyIB_{0x}\mathbf{a}_y$$

$$d\mathbf{T}_T = Idxdy(B_{0x}\mathbf{a}_y - B_{0y}\mathbf{a}_x)$$

Representando o termo entre parêntesis vetorialmente, temos,

$$d\mathbf{T}_T = Idxdy(\mathbf{a}_z \times \mathbf{B})$$

$$d\mathbf{T}_T = Id\mathbf{S} \times \mathbf{B} \quad (18)$$

Com isso, podemos definir agora o momento de dipolo magnético diferencial $d\mathbf{m}$, que é o produto da corrente da espira pela sua área vetorial. Logo,

$$d\mathbf{m} = Id\mathbf{S} \quad (19)$$

Assim, simplificando a notação para $d\mathbf{T}_T = d\mathbf{T}$,

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (20)$$

Estendendo esse resultado para o caso de dipolo elétrico diferencial, temos que o torque produzido pelo campo elétrico é,

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (21)$$

As equações (18) e (20) valem para qualquer formato de espira. No caso de um campo \mathbf{B} constante (uniforme), o torque em uma espira plana diferencial de tamanho e formato arbitrários torna-se,

$$\mathbf{T} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (22)$$

EP8.5. Um triângulo condutor filamental une os pontos $A(3, 1, 1)$, $B(5, 4, 2)$ e $C(1, 2, 4)$. Pelo segmento AB passa uma corrente de 0,2 A na direção \mathbf{a}_{AB} . Está presente um campo magnético $\mathbf{B} = 0,2\mathbf{a}_x - 0,1\mathbf{a}_y + 0,3\mathbf{a}_z$ T. Calcule: (a) a força no segmento BC ; (b) a força na espira triangular; (c) o torque na espira em relação a uma origem em A ; (d) o torque na espira em relação a uma origem em C .

Resp. $-0,08\mathbf{a}_x + 0,32\mathbf{a}_y + 0,16\mathbf{a}_z$ N; 0; $-0,16\mathbf{a}_x - 0,08\mathbf{a}_y + 0,08\mathbf{a}_z$ N · m; $-0,16\mathbf{a}_x - 0,08\mathbf{a}_y + 0,08\mathbf{a}_z$ N · m

4) Magnetização e permeabilidade magnética

Antes de entrarmos nesse assunto, segue uma breve descrição dos seguintes materiais:

a) *Diamagnéticos*

É uma forma fraca de magnetismo induzida pelo movimento dos elétrons em suas órbitas e pelo spin eletrônico que se combinam e produzem um campo líquido igual a zero. É também o material em que o momento magnético permanente \mathbf{m}_0 de cada átomo é zero. A magnitude do momento magnético induzido se opõe ao do campo aplicado. [A permeabilidade magnética relativa é ligeiramente \$< 1\$.](#)

b) *Paramagnéticos*

Materiais que apresentam uma tendência dos dipolos magnéticos se alinharem com um campo magnético externo. Materiais com essa tendência se tornam ímãs temporários. [A permeabilidade magnética relativa é ligeiramente \$> 1\$.](#)

c) *Ferromagnéticos*

São aqueles em que os efeitos descritos para materiais diamagnéticos não se cancelam totalmente (mas o momento magnético médio é nulo). Uma vez magnetizado, as partículas se comportam como ímãs permanentes. [A permeabilidade magnética relativa varia com a intensidade do campo.](#)

d) *Antiferromagnéticos*

Os elétrons dentro do material não se alinham entre si como a mesma polaridade magnética. O material não mostra qualidades magnéticas. É o oposto do ferromagnético. [A permeabilidade magnética relativa é \$> 1\$.](#)

e) *Ferrimagnéticos*

É uma forma de antiferromagnetismo em que alguma magnetização permanece abaixo de uma temperatura crítica. Os momentos magnéticos de íons vizinhos são antiparalelos e de magnitude desigual.

f) *Superparamagnéticos*

Materiais que apresentam magnetização apenas na presença de um campo magnético externo. A magnetização desaparece quando o campo magnético é retirado.

Antes de começarmos, é preciso deixar claro que o campo magnético aqui, embora tenha a mesma dimensão de \mathbf{H} , é chamado de magnetização \mathbf{M} , e que a corrente é a corrente de cargas ligadas. A magnetização é definida em termos do momento de dipolo magnético \mathbf{m} . Assim,

$$\mathbf{m} = I_b d\mathbf{S}$$

Se existem n dipolos magnéticos por unidade de volume Δv , então

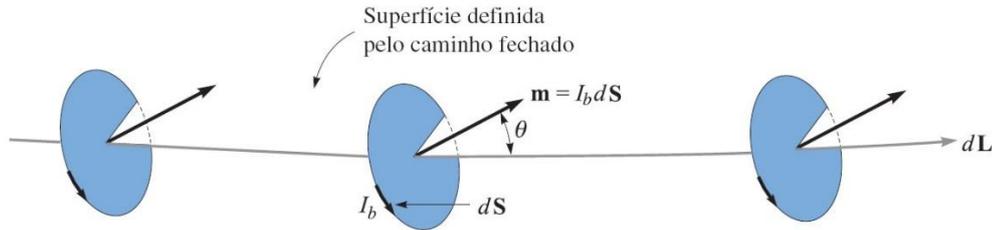
$$\mathbf{m}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i \quad (23)$$

Assim, a magnetização é definida matematicamente como,

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i \quad (23)$$

de onde concluímos que \mathbf{M} tem a mesma unidade de \mathbf{H} .

O próximo passo consiste em encontrarmos uma relação que nos permita relacionar o vetor \mathbf{B} com \mathbf{H} e \mathbf{M} . Assim, considere um efeito de alinhamento de dipolos ao longo de um caminho parcialmente fechado como ilustra a figura abaixo, onde são mostrados vários momentos de dipolo \mathbf{m} que fazem um ângulo θ com $d\mathbf{L}$.



As correntes ligadas I_b podem ser escritas em termos dos momentos magnéticos da seguinte forma,

$$I_b = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} \quad (24)$$

Agora, recorrendo à Lei Circuital de Ampère para a corrente total,

$$I_T = \oint \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{L} \quad (25)$$

onde $I_T = I_B + I$, onde I é a corrente livre total envolvida pelo caminho fechado (esta é de fato a corrente que aparece nas equações de Maxwell). Combinando estas equações, temos,

$$I = I_T - I_B = \oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{L} \quad (26)$$

Assim,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (27)$$

De onde obtemos que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ no espaço livre onde $\mathbf{M} = 0$. Portanto,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (28)$$

Logo, de (26), temos que a corrente livre é dada por,

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (29)$$

que é a Lei Circuital de Ampère para correntes livres.

Com isso, podemos escrever as seguintes expressões para densidades de corrente,

$$I_B = \int \mathbf{J}_B \cdot d\mathbf{S}$$

$$I_T = \int_s \mathbf{J}_T \cdot d\mathbf{S}$$

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

As equações (24), (25) e (29) podem ser rescritas com o auxílio do Teorema de Stokes da seguinte forma,

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_B$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_T$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (30)$$

O que faremos agora é simplificar a relação entre \mathbf{B} , \mathbf{H} , e \mathbf{M} para meios isotrópicos e lineares com o auxílio da susceptibilidade magnética χ_m ,

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (31)$$

Com isso,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

de onde concluímos que,

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (32)$$

Com isso, a permeabilidade magnética é definida como,

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (33)$$

A permeabilidade de um material anisotrópico, assim como no caso dos dielétricos anisotrópicos, é dada em termos de um tensor permeabilidade $\bar{\mu}$,

$$\mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H} \quad (34)$$

onde,

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Expandindo, por conveniência, temos,

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}$$

$$B_x = \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z$$

$$B_y = \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z$$

$$B_z = \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z$$

EP8.6. Encontre a magnetização em um material magnético onde: (a) $\mu = 1,8 \times 10^{-5}$ H/m e $H = 120$ A/m; (b) $\mu_r = 22$, no qual existem $8,3 \times 10^{28}$ átomos/m³ e cada átomo tem um momento de dipolo de $4,5 \times 10^{-27}$ A · m²; (c) $B = 300 \mu\text{T}$ e $\chi_m = 15$.

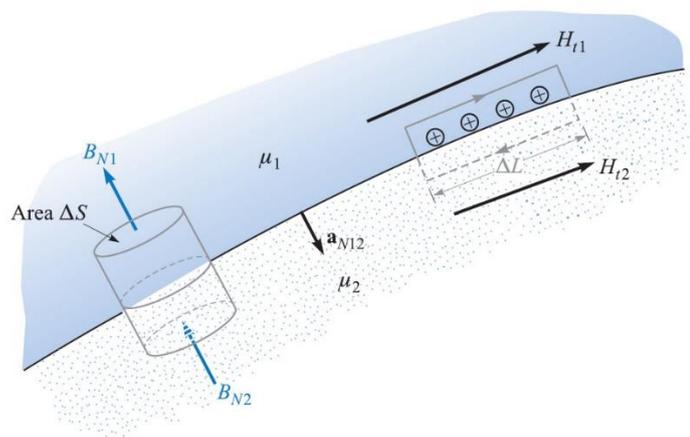
Resp. 1.599 A/m; 374 A/m; 224 A/m

EP8.7. A magnetização em um material magnético para o qual $\chi_m = 8$ é dada em certa região como $150z^2\mathbf{a}_x$ A/m. Em $z = 4$ cm, calcule a intensidade de: (a) \mathbf{J}_T ; (b) \mathbf{J} ; (c) \mathbf{J}_B .

Resp. 13,5 A/m²; 1,5 A/m²; 12 A/m²

5) Condições de fronteira magnéticas

Iremos, agora, aplicar as condições de fronteira para os campos \mathbf{B} , \mathbf{H} , e \mathbf{M} para uma interface entre dois meios magnéticos, como ilustra a figura abaixo.



Da lei de Gauss, temos que,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Assim, usando uma superfície Gaussiana cilíndrica, temos que,

$$B_{N1}\Delta S - B_{N2}\Delta S = 0$$

$$B_{N1}\Delta S = B_{N2}\Delta S$$

$$B_{N1} = B_{N2}$$

(36)

$$\mu_1 H_{N1} = \mu_2 H_{N2}$$

$$H_{N2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{N1} \quad (37)$$

Observe que (36) mostra que as componentes normais de \mathbf{B} são contínuas. Por outro lado, (37) mostra que as componentes normais de \mathbf{H} são descontínuas, e a descontinuidade é a razão μ_1/μ_2 .

Para \mathbf{M} , iremos recorrer à equação (31), onde $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$. Assim, de (37),

$$M_{N2} = \chi_{m2} \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{N1} = \frac{\chi_{m2} \mu_1}{\chi_{m1} \mu_2} M_{N1} \quad (38)$$

Para as componentes tangenciais, usaremos a Lei Circuital de Ampère,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

e aplicamos esta Lei ao longo do caminho fechado mostrado na figura acima. No sentido horário, e supondo uma corrente superficial \mathbf{K} ao longo da superfície, temos que,

$$H_{t1} \Delta L - H_{t2} \Delta L = K \Delta L$$

$$H_{t1} - H_{t2} = K \quad (39)$$

Vetorialmente,

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{N12} = \mathbf{K}$$

onde \mathbf{a}_{N12} é o unitário normal à fronteira direcionado do meio 1 para o meio 2. De forma equivalente, temos que,

$$\mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} = \mathbf{a}_{N12} \times \mathbf{K}$$

Finalmente, para a componente tangencial de \mathbf{B} , temos que de (39),

$$\frac{B_{t1}}{\mu_1} - \frac{B_{t2}}{\mu_2} = K \quad (40)$$

e para \mathbf{M} ,

$$M_{t2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{t1} - \chi_{m2} K \quad (38)$$

EP8.8. Considere a permissividade $5 \mu\text{H/m}$ na região A onde $x < 0$ e $20 \mu\text{H/m}$ na região B onde $x > 0$. Se existe uma densidade superficial de corrente $\mathbf{K} = 150\mathbf{a}_y - 200\mathbf{a}_z \text{ A/m}$ em $x = 0$, e se $\mathbf{H}_A = 300\mathbf{a}_x - 400\mathbf{a}_y + 500\mathbf{a}_z \text{ A/m}$, calcule: (a) $|\mathbf{H}_{tA}|$; (b) $|\mathbf{H}_{nA}|$; (c) $|\mathbf{H}_{tB}|$; (d) $|\mathbf{H}_{nB}|$.

Resp. 640 A/m; 300 A/m; 695 A/m; 75 A/m

6) Circuito magnético (basicamente, um resumo do que já vimos)

Aqui iremos discutir a aplicação dos conceitos na solução de problemas magnéticos. Veremos agora uma pequena revisão dos conceitos, já que as equações abaixo já foram derivadas. Assim, para o potencial eletrostático,

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

enquanto o potencial magnético é dado por,

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

A diferença de potencial, por sua vez, é

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

no caso de potencial elétrico, e

$$V_{mAB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

no caso de potencial magnético. A Lei de Ohm é escrita como,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

A densidade de fluxo magnético,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

E utilizamos a relação,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

para encontramos a corrente total, e a seguinte integral,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

para encontramos o fluxo magnético. Por fim, definimos a relação,

$$V = RI$$

Agora definiremos uma nova quantidade denominada **relutância** (\mathfrak{R}), que é um análogo à resistência elétrica, dada por,

$$\mathfrak{R} = \frac{V_m}{\Phi} \text{ Ae/Wb} \quad (39)$$

onde Ae = ampère-espiras. No caso de um material magnético homogêneo, de comprimento d , seção reta S , e permeabilidade μ , a relutância é escrita como,

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{\mu S} \quad (40)$$

Da Lei Circuital de Ampère, considerando uma corrente circulando por N espiras, temos que,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI \quad (41)$$

EP8.9. Dado o circuito magnético da Figura 8.13, considere $B = 0,6$ T no ponto médio da perna esquerda e calcule: (a) $V_{m, ar}$; (b) $V_{m, aço}$; (c) a corrente necessária em uma bobina de 1.300 espiras enrolada na perna esquerda.

Resp. 3.980 Ae; 72 Ae; 3,12 A

EP8.10. A curva de magnetização para o material X sob condições normais de operação pode ser aproximada pela expressão $B = (H/160)(0,25 + e^{-H/320})$, onde H está em A/m e B está em T. Se um circuito magnético contém o material X com 12 cm de comprimento, assim como um *gap* de ar de 0,25 mm, considere uma seção reta uniforme de $2,5$ cm² e calcule a fmm total necessária para produzir um fluxo de: (a) 10 μ Wb; (b) 100 μ Wb.

Resp. 8,58 Ae; 86,7 Ae

7) Energia potencial e forças em materiais magnéticos

Nós já obtivemos uma expressão para energia de um campo eletrostático, reescrita aqui por conveniência,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (42)$$

onde a equação (42) pressupõe uma relação linear entre \mathbf{D} e \mathbf{E} .

A energia total armazenada em um campo magnetostático, supondo uma relação linear entre \mathbf{B} e \mathbf{H} , é dada por,

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (43)$$

Usando a relação $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, temos que,

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dv$$

ou que,

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \mu H^2 dv \quad (44)$$

Também podemos usar,

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \frac{B^2}{\mu} dv \quad (45)$$

EP8.11. (a) Qual é a força que está sendo exercida nas faces junto ao *gap* do circuito descrito no Exercício Proposto 8.9 e na Figura 8.13? (b) A força está tentando abrir ou fechar o *gap* de ar?

Resp. 1.194 N; como Wilhelm Eduard Weber responderia, *schliessen**, ou seja, a força está tentando fechar o *gap* de ar.

8) Indutância e indutância mútua

A definição de indutância faz uso do conceito de enlace de fluxo. O **enlace de fluxo** é definido como o produto de N espiras pelo fluxo Φ , ou seja $N\Phi$. Assim, a indutância é definida como,

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (46)$$

Do ponto de vista de energia, a indutância pode ser escrita como,

$$L = \frac{2W_H}{I^2} \quad (47)$$

onde I é a corrente que flui no caminho fechado e W_H é a energia do campo magnético produzida pela corrente.

A indutância mútua entre dois circuitos 1 e 2, M_{12} , leva em conta os enlaces de fluxos mútuos, assim,

$$M_{12} = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} = M_{21} \quad (48)$$

onde Φ_{12} é o fluxo produzido por I_1 , que envolve o caminho da corrente filamental I_2 , e N_2 é o número de espiras do circuito 2.

EP8.12. Calcule a indutância própria de: (a) 3,5 m de cabo coaxial com $a = 0,8$ mm e $b = 4$ mm, preenchido com material para o qual $\mu_r = 50$; (b) uma bobina toroidal de 500 espiras, enrolada em uma fibra de vidro que possui seção reta quadrada de $2,5 \times 2,5$ cm e um raio interno de 2 cm; (c) um solenoide que possui 500 espiras em torno de um núcleo cilíndrico de 2 cm de raio no qual $\mu_r = 50$ para $0 < \rho < 0,5$ cm e $\mu_r = 1$ para $0,5 < \rho < 2$ cm. O comprimento do solenoide é de 50 cm.

Resp. 56,3 μ H; 1,01 mH; 3,2 mH

EP8.13. Um solenoide tem 50 cm de comprimento, 2 cm de diâmetro e contém 1.500 espiras. O núcleo cilíndrico tem um diâmetro de 2 cm e uma permeabilidade relativa de 75. Essa bobina é coaxial com um segundo solenoide, também de 50 cm de comprimento, mas com um diâmetro de 3 cm e 1.200 espiras. Calcule: (a) L para o solenoide interno; (b) L para o solenoide externo; (c) M entre os dois solenoides.

Resp. 133,2 mH; 192 mH; 106,6 mH