SEL 309 Eletromagnetismo

Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

Capacitância

Fonte: “Eletromagnetismo”, Hayt Jr, 8ª Edição, Capítulo 6.

1) Definição

É importante saber que dois corpos condutores separados, seja pelo espaço livre ou outro material dielétrico, apresentam uma capacitância entre eles. Quando uma tensão é aplicada, o resultado é o surgimento de uma carga +Q em um condutor e uma -Q no outro. Assim, a razão entre o valor absoluto da carga pelo valor absoluto da diferença de tensão é definida como capacitância,

$$C = \frac{Q}{V} \quad (F) \tag{1}$$

Onde 1 farad (F) equivale a 1 C/V.

De modo geral, a capacitância pode ser escrita como,

$$C = \frac{\oint_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_-^+ \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \tag{2}$$

Nota: em sistemas lineares, a capacitância é independente do potencial e da carga total, já que a razão entre eles é constante.

2) Capacitor de placas paralelas

Considere a estrutura mostrada na figura abaixo, que apresenta uma lâmina uniforme de densidade de carga superficial $\pm\rho_S$ e um campo elétrico uniforme. Logo,

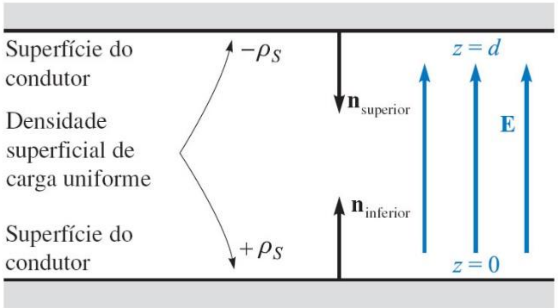
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\varepsilon}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{D} = \rho_S \mathbf{a}_z$$

Tente obter o resultado acima para **D** aplicando diretamente as condições de contorno discutidas na Aula 5.

A diferença de potencial entre os dois planos é, portanto,

$$V_0 = -\int_{superior}^{inferior} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_{d}^{0} \frac{\rho_s}{\varepsilon} dz = \frac{\rho_s}{\varepsilon} d$$



Se a carga em cada plano é infinita, assim também será a capacitância. Se limitarmos nosso problema a planos de área S com dimensões >> d, as distribuições de carga serão quase uniformes longe das bordas. Logo,

$$Q = \rho_s S$$

$$V_0 = \frac{\rho_s}{\varepsilon} d$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\varepsilon}{d} S \qquad (3)$$

3) Tipos de capacitância

a) *Cabo coaxial*, ou capacitor coaxial, de comprimento L, raio interno a, e raio externo b.

A diferença de potencial já foi discutida na Aula 4, e é dada por,

$$V_{ab} = -\int_{b}^{a} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{L} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\rho_L L}{V_{ab}}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon L}{ln(b/a)} \qquad (4)$$

b) *Capacitor esférico*

Formado por duas cascas condutoras esféricas concêntricas de raios a e b, $b > a$. Neste caso, a expressão para o campo elétrico vem da Lei de Gauss,

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

E a diferença de potencial,

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Assim,

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

Supondo a esfera externa com raio infinito,

$$C = 4\pi\varepsilon a \qquad (5)$$

Por exemplo, ainda supondo a esfera externa com raio infinito, e revestindo a esfera interna com $\varepsilon = \varepsilon_1$, de $r = a$ até $r = r_1$, com $\varepsilon = \varepsilon_0$ para $r > r_1$,

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \quad (a < r < r_1)$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r_1 < r)$$

A diferença de potencial torna-se,

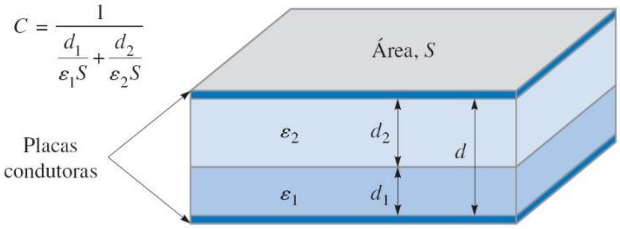
$$V_a - V_\infty = -\int_{r_1}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} dr - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_a - V_\infty = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0 r_1}\right]$$

Com isso,

$$C = \frac{4\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0 r_1}} \qquad (6)$$

Agora, para aprofundarmos a discussão, considere o capacitor de placas paralelas de área S e espaçamento d, da figura abaixo. A capacitância é $\varepsilon_1 S/d$ se o dielétrico entre as placas á apenas ε_1. Se adicionarmos um segundo dielétrico ε_2, podemos inferir que temos agora dois capacitores em série.



Supondo campo elétrico uniforme entre as placas, a diferença de potencial passa a ser,

$$V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

Das condições de fronteira para a componente normal de **D**, temos,

$$D_{N1} = D_{N2}$$
$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$$

Assim, isolando E_1 e eliminando E_2,

$$E_1 = \frac{V_0}{d_1 + d_2(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}$$

Na placa inferior, a densidade de carga superficial é,

$$\rho_{s1} = D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{V_0}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$$

Sabendo que $D_1 = D_2$, temos que $\rho_{s1} = \rho_{s2}$.

Assim, a capacitância torna-se,

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_s S}{V_0} = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S}}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

onde,

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1}$$

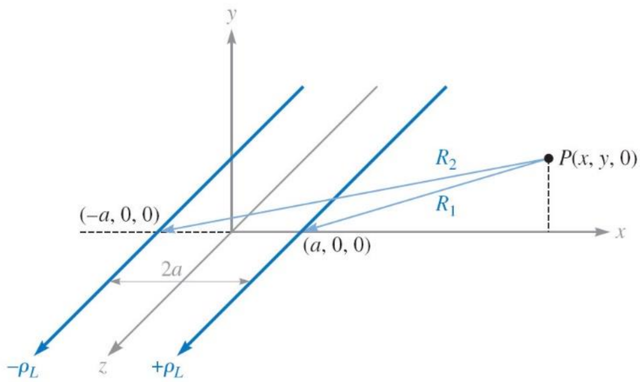
$$C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{d_2}$$

O livro do Hayt Jr oferece também uma solução alternativa ligeiramente mais simples que eu sugiro como leitura adicional.

4) Capacitância de uma linha de dois fios

A configuração deste problema é mostrada na figura abaixo, e consiste de dois cilindros condutores paralelos de seção reta circular no plano *xy*. Uma das linhas encontra-se em $x = a$ e a outra em $x = -a$.

<u>É importante ressaltar que esta configuração é clássica, e é encontrada em problemas de linhas de transmissão.</u>



O potencial de uma linha de carga com zero de referência em um raio R_0 é dado por,

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{R_0}{R}\right)$$

Assim, combinando os campos, temos,

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{R_{10}}{R_1}\right) - \ln\left(\frac{R_{20}}{R_2}\right)\right]$$

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}\right)$$

No caso de $R_{10} = R_{20}$, com o zero de referência a distâncias iguais em relação a cada linha, e substituindo R_1 e R_2 por *x* e *y*, respectivamente, temos,

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\ln\left[\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}\right] \qquad (7)$$

Para reconhecermos as superfícies potenciais, escolheremos uma superfície equipotencial $V = V_1$, e definiremos K_1 como parâmetro adimensional que é uma função de V_1,

$$K_1 = e^{4\pi\varepsilon V_1/\rho_L}$$

Assim,

$$K_1 = \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

Rearranjando,

$$x^2 - 2ax\frac{K_1+1}{K_1-1} + y^2 + a^2 = 0$$

Completando o quadrado,

$$\left(x - a\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2$$

Esta equação mostra que $V = V_1$ não é função de *z* (ou é um cilindro) e intercepta o plano *xy* em um círculo de raio *b*, centrado em *x* = *h*, *y* = 0. Logo,

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$$

$$h = a\frac{K_1+1}{K_1-1}$$

Considere, agora, um problema prático de um plano condutor em *x* = 0, e um condutor cilíndrico de raio *b* e potencial V_0, e eixo posicionado a uma distância h do plano. Das expressões acima, é possível chegarmos ao seguinte parâmetro de simplificação,

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

De onde obtemos,

$$\sqrt{K_1} = e^{2\pi\varepsilon V_0/\rho_L} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

Você deverá encontrar as expressões para a, b, h, K_1, e ρ_L. A da capacitância é:

$$C = \frac{\rho_L L}{V_0} = \frac{4\pi\varepsilon L}{\ln{(K_1)}} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln{(\sqrt{K_1})}}$$

Ou,

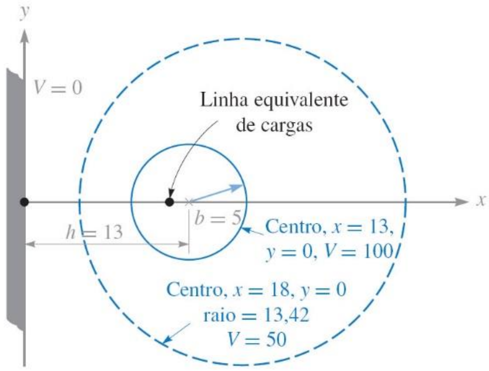
$$C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left[\frac{\left(h + \sqrt{h^2 - b^2}\right)}{b}\right]} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\cosh^{-1}\left(\frac{h}{b}\right)} \qquad (8)$$

A <u>capacitância entre dois fios paralelos</u> é a metade da capacitância entre um fio e um plano por representar uma conexão de <u>dois capacitores idênticos em série</u>.

$$C = \frac{\pi\varepsilon L}{\cosh^{-1}\left(\frac{h}{b}\right)}$$

onde h é a metade da separação entre os condutores.

Com base na figura abaixo, você deverá encontrar os seguintes valores para uma seção reta de um cilindro de 5 m de raio em um potencial de 100 V no espaço livre, com seu eixo a 13 m de distância de um plano que está no potencial zero.



Com isso, você deverá encontrar:

$$b = 5 \text{ m}$$
$$h = 13 \text{ m}$$
$$V_0 = 100\, V$$
$$a = 12 \text{ m}$$
$$K_1 = 25$$
$$\rho_L = 3.46 \text{ nC/m}$$
$$C = 34.6 \text{ pF/m}$$

Para a superfície equipotencial de 50 V

$$K_1 = 5$$
$$b = 13.42 \text{ m}$$
$$h = 18 \text{ m}$$

A intensidade de campo elétrico é obtida da seguinte forma (veja equação (7) para o potencial *V*):

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\left(\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\ln\left[\frac{(x^2 + a^2) + y^2}{(x^2 - a^2) + y^2}\right]\right)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2(x+a)\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{2(x-a)\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y}{(x-a)^2 + y^2}\right)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{(x+a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{(x-a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{(x-a)^2 + y^2}\right)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{2\pi}\left(\frac{(x+a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{(x-a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{(x-a)^2 + y^2}\right)$$

Calculando D_x em *x* = *h* – *b*, *y* = 0, podemos encontrar $\rho_{s,max}$:

$$\rho_{s,max} = D_{x,x=h-b,y=0} = \frac{\rho_L}{2\pi}\left[\frac{h-b+a}{(h-b+a)^2} - \frac{h-b-a}{(h-b-a)^2}\right]$$

Nesse caso,

$$\rho_{s,max} = 0.165 \text{ nC/m}^2$$

De maneira similar, podemos encontrar $\rho_{s,min}$:

$$\rho_{s,min} = D_{x,x=h+b,y=0} = \frac{\rho_L}{2\pi}\left[\frac{h+b+a}{(h+b+a)^2} - \frac{h+b-a}{(h+b-a)^2}\right]$$

$$\rho_{s,min} = 0.073 \text{ nC/m}^2$$

Assim,

$$\rho_{s,max} = 2.25\rho_{s,min}$$

Usando a equação (8), e um condutor onde $b << h$, temos,

$$\ln\left[\frac{\left(h+\sqrt{h^2-b^2}\right)}{b}\right] \doteq \ln\left[\frac{(h+h)}{b}\right] \doteq \ln\left(\frac{2h}{b}\right)$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left(\frac{2h}{b}\right)}$$

Exemplo:

1) [Hayt Jr] Um condutor cilíndrico de raio de 1 cm e em um potencial de 20 V é paralelo a um plano condutor que está no potencial zero. O plano está distante 5 cm do eixo do cilindro. Se os condutores estiverem imersos em um dielétrico perfeito para o qual ε_r = 4.5, calcule: (a) a capacitância por unidade de comprimento entre o cilindro e o plano; (b) $\rho_{s,max}$ no cilindro.
   Respostas: 109.2 pF/m; 42.6 nC/m^2

5) Utilização de esboços de campos para estimar a capacitância em problemas bidimensionais

Este assunto é tratado no item 6.5 do Hayt Jr, 8ª Edição, e não será discutido aqui. Fica, portanto, como recomendação para estudo individual.

6) **Equações de Poisson e de Laplace**

O que fizemos até agora, foi calcular a capacitância por meio de uma distribuição conhecida de cargas em condutores a partir da diferença de potencial definida pela carga em questão. A capacitância era, então, obtida da razão Q/V.

O que faremos agora é começar com os potenciais em cada condutor, para depois calcularmos a carga, para finalmente obtermos $C=Q/V$.

Para que isso seja possível, precisaremos desenvolver o conceito das equações de Poisson e de Laplace e suas condições de fronteira.

A equação de Poisson é obtida da Lei de Gauss (Aula 3),

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

Sabemos que $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ e que $\mathbf{E} = -\nabla V$, logo, por substituição, temos,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\varepsilon\nabla V) = \rho_v$$

Logo, a equação de Poisson pode ser escrita como,

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{9}$$

válida para uma região onde ε é constante.

Equação de Poisson em coordenadas retangulares **(**expandindo $\nabla \cdot \nabla$**)**:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla \cdot \nabla \mathrm{V} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

Logo,

$$\nabla \cdot \nabla \mathrm{V} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

Como sabemos, $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, assim, a equação de Poisson torna-se,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{10}$$

Caso $\rho_v = 0$, temos uma densidade volumétrica de carga nula. Mas isso não impede que tenhamos cargas pontuais, linhas de cargas e densidades superficiais de cargas em localizações singulares como fontes de campo. Assim,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 V = 0 \tag{11}$$

A equação (11) é a equação de Laplace. O operador ∇^2 é denominado <u>*Laplaciano*</u>.

O Laplaciano em <u>**coordenadas cilíndricas**</u> é,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Em <u>**coordenadas esféricas**</u>:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\mathrm{r}^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\mathrm{r}^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{r}^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Exemplo:

1) [Hayt Jr] Calcule os valores numéricos de V e ρ_v no ponto P, no espaço livre, se:
   (a) $V = \frac{4yz}{x^2+1}$, em $P(1, 2, 3)$;
   (b) $V = 5\rho^2 \cos(2\phi)$, em $P(\rho = 3, \varphi = \pi/3, z = 2)$;
   (c) $V = \frac{2\cos(\phi)}{r^2}$, em $P(r = 0.5, \theta = 45°, \varphi = 60°)$.

   Respostas: 12 V, −106.2 pC/m^3; −22.5 V, 0; 4 V, 0

2) [Hayt Jr] Supondo $V = Ax + B$, determine a capacitância de um capacitor de placas paralelas e área S, separação entre as placas igual a d, e diferença de potencial V_0 entre as placas.

Se V = 0 em x = 0 e $V = V_0$ em $x = d$, temos

$$A = \frac{V_0}{d}$$

$$B = 0$$

e

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

Agora precisaremos encontrar a distribuição de carga, para depois encontramos a capacitância. Com as condições de fronteira já definidas, seguiremos os seguintes passos:

1- Sabendo V, use $\mathbf{E} = -\nabla V$ e encontre $\mathbf{E}$
2- Use $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ para encontrar $\mathbf{D}$
3- Calcule $\mathbf{D}$ em uma das placas do capacitor, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_S = D_N\mathbf{a}_N$
4- Admita que $\rho_s = D_N$
5- Encontre Q via integral de superfície sobre a placa do capacitor, ou seja,

$$Q = \int_S \rho_s dS$$

Portanto,

$$V = \frac{V_0 x}{d}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{D} = -\varepsilon\frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{D}_S = \mathbf{D}|_{x=0} = -\varepsilon\frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$$
$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_x$$

$$D_N = -\varepsilon \frac{V_0}{d} = \rho_s$$

$$Q = -\int_S \varepsilon \frac{V_0}{d} dS = -\varepsilon \frac{V_0 S}{d}$$

Assim, a capacitância é, portanto,

$$C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{\varepsilon S}{d}$$