

SEL 309 Eletromagnetismo

Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

Lei de Coulomb e Intensidade de Campo Elétrico

- 1) Primeira aula: livros do W. Hayt Jr, “Engineering Electromagnetics”, 2nd Edition, e J. Krauss, “Electromagnetics”, 4th Edition

1.1 Lei de Coulomb

Há uma força entre duas cargas que é diretamente proporcional à magnitude das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. Esta é a definição da Lei de Coulomb, desenvolvida a partir de pequenos corpos carregados em uma delicada balança de torção. Mas é importante ressaltar que a Lei de Coulomb só vale para cargas em repouso. Esta lei é expressa da seguinte forma (pode também ser colocada na forma vetorial),

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1)$$

onde Q_1 e Q_2 são quantidades de carga positivas ou negativas (nomes usados pela primeira vez por Benjamin Franklin¹), r é a separação, e k é uma constante de proporcionalidade. No Sistema Internacional (SI) de unidades, Q é medido em coulombs (C), r é em metros (m), e a força em newtons (N). Para que isso seja possível, a constante de proporcionalidade k deve ser escrita da seguinte forma,

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2)$$

Assim, temos que a força F é escrita como,

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3)$$

para cargas no vácuo (razão do ϵ_0 no denominador). O fator 4π é introduzido na Lei de Coulomb para que ele não tenha que aparecer nas equações de Maxwell.

A constante ϵ_0 é denominada permissividade do vácuo e é dada por,

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \quad \left(\frac{C^2}{N \cdot m^2} = \frac{F}{m} \right)$$

A permissividade de um material é definida como sendo sua habilidade em armazenar energia potencial elétrica quando sob a influência de um campo elétrico medido pela razão da

¹ Fonte J. Krauss: “B. Franklin chamou arbitrariamente o bastão de vidro carregado de positivo e o bastão de borracha carregado de negativo. Como esta definição persistiu até os dias de hoje, dizemos que elétrons arrancados do bastão de vidro são negativos. Caso B. Franklin tivesse chamado o bastão de vidro de positivo, toda a nomenclatura de sinais seria reversa e nós diríamos hoje que elétrons têm carga positiva.”

capacitância de um dado capacitor feito com este material pela capacitância quando o material do capacitor é o vácuo.

Agora, considere uma situação em que temos uma carga Q_1 em (1,0,3) e uma carga Q_2 em (0,2,1). A força \mathbf{F}_2 na carga 2 está na direção do vetor \mathbf{r}_{12} (de Q_1 para Q_2). Logo, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. A direção de \mathbf{r}_{12} é dada pelo vetor unitário,

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|} \quad (4)$$

Escrevendo a Lei de Coulomb como uma equação vetorial, temos que a força na carga 2 devido à carga 1 é dada por,

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \mathbf{a}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (N) \quad (5)$$

Vale ressaltar que a Lei de Coulomb tem a mesma forma da lei de gravitação universal de Newton, que pode ser escrita neste caso como,

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GM_1 M_2}{r_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (N) \quad (6)$$

onde G é constante de gravitação universal ($6.7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$), r_{12} é a distância entre as massas, M_1 e M_2 são as magnitudes das massas, e \mathbf{a}_{12} é o unitário ao longo da linha que conecta as massas. A grande diferença entre essas leis é que a de Newton é sempre atrativa, daí o sinal negativo.

Por exemplo, considere o uso da Lei de Coulomb na forma vetorial para uma carga de $Q_1 = 3 \times 10^{-4} \text{ C}$ em $P(1,2,3)$ e uma carga $Q_2 = -10^{-4} \text{ C}$ em $Q(2,0,5)$ no vácuo. Logo,

$$\mathbf{r}_{12} = (2 - 1)\mathbf{a}_x + (0 - 2)\mathbf{a}_y + (5 - 3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3 \times 10^{-4} (-10^{-4})}{4\pi\epsilon_0 \times 9} \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right)$$

$$\mathbf{F}_2 = -30 \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \quad (N) \quad (7)$$

É importante notar que a Lei de Coulomb é linear, ou seja, se a carga Q_1 for multiplicada por um fator n a força em Q_2 será multiplicada pelo mesmo fator.

Igualmente, a força em uma carga Q_1 na presença de várias outras cargas é o somatório das forças naquela carga devido a cada uma das outras cargas. Matematicamente, temos:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \mathbf{a}_{21} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{31}^2} \mathbf{a}_{31} + \frac{Q_1 Q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{41}^2} \mathbf{a}_{41} + \dots = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=2}^n \frac{Q_k}{r_{k1}^2} \mathbf{a}_{k1} \quad (N) \quad (7)$$

No caso de termos uma distribuição contínua de cargas em uma dada região, basta substituir a soma vetorial acima por uma integral vetorial.

A força em uma região com uma carga isolada Q é esféricamente simétrica. Isto é feito localizando a carga na origem de um sistema de coordenadas esféricas, de modo que o vetor de posição \mathbf{r} saindo de Q até uma carga de teste $Q_t \ll Q$, é simplesmente $r\mathbf{a}_r$, ou seja,

$$\mathbf{F}_t = \frac{Q_t Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r, \quad (8)$$

o que mostra que em uma superfície esférica $r=\text{constante}$, $|\mathbf{F}_t|=\text{constante}$, e \mathbf{F}_t é radial.

Exemplos:

- 1) [Hayt Jr] Sendo $Q_2=121\times 10^{-9}$ C em $P_2(-0.03, 0.01, 0.04)$. Encontre a força em Q_2 devido a:
 - a) $Q_1=110$ μ C em $P_1(0.03, 0.08, -0.02)$
 - b) $Q_3=110$ μ C em $P_3(-0.09, -0.06, 0.10)$
 - c) Q_1 e Q_3

Respostas: $5.4\mathbf{a}_x + 6.3\mathbf{a}_y - 5.4\mathbf{a}_z; -5.4\mathbf{a}_x - 6.3\mathbf{a}_y + 5.4\mathbf{a}_z; 0$ (N)

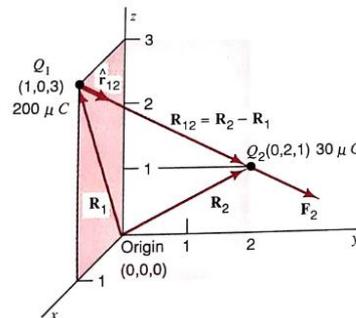
- 2) Encontre a força em Q_1 (20 μ C), localizada em $P_1(0,1,2)$, devido a Q_2 (-300 μ C), localizada em $P_2(2,0,0)$.

Resposta:

$$\mathbf{F}_1 = 6 \left(\frac{2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \quad (N)$$

Observe que a força é atrativa.

- 3) [J. Krauss] Encontre a força \mathbf{F}_2 em Q_2 (30 μ C), localizada em $P_2(0,2,1)$, produzida pela carga Q_1 (200 μ C), localizada em $P_1(1,0,3)$, ambas no vácuo, como ilustrado na figura abaixo.



Resposta:

$$\mathbf{F}_2 = 6 \left(\frac{-\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \quad (N)$$

Expressando \mathbf{F}_2 como três componentes de força, temos:

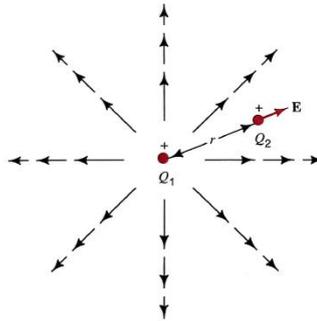
$$\mathbf{F}_2 = -2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z \quad (N)$$

1.2 Intensidade de campo elétrico

Dimensionalmente, a intensidade de campo elétrico é definida como sendo força por unidade de carga, ou seja,

$$\frac{\mathbf{F}}{Q} = \frac{\text{força}}{\text{carga}} \quad (9)$$

Se uma carga Q_1 é fixada na origem de um sistema de coordenadas esféricas, e uma segunda carga é colocada em sua vizinhança, esta segunda carga será afetada por uma força. Esta força é dirigida radialmente para fora, e torna-se maior à medida que a segunda carga se aproxima da primeira. Por isso, é possível afirmar que Q_1 tem um campo em seu entorno que exerce uma força em uma outra carga. Portanto, **um campo elétrico é a região onde esta força atua**, como ilustra a figura abaixo.



Assim, se chamarmos esta segunda carga de Q_2 , a força sobre ela de acordo com a Lei de Coulomb é:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (N). \quad (10)$$

Se escrevermos esta equação como uma **força por unidade de carga**, temos

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_2}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (N/C). \quad (11)$$

A expressão acima é denominada de intensidade do campo elétrico (\mathbf{E}). No caso de uma carga pontual no vácuo, temos

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (N/C). \quad (12)$$

Em coordenadas cartesianas, esta expressão torna-se:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_r = \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_z \right) \quad (N/C).$$

A equação acima é um bom exemplo do porquê devemos nos ater ao sistema de coordenadas mais adequado ao problema. Veja como a complexidade do problema aumentou em relação à solução em coordenadas esféricas.

Caso a carga não esteja na origem do sistema de coordenadas, o campo não possuirá mais simetria esférica (e nem cilíndrica, a menos que a carga esteja no eixo z), e podemos usar coordenadas cartesianas. Para uma carga Q localizada em,

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_x + b\mathbf{a}_y + c\mathbf{a}_z$$

O campo na posição $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ torna-se,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (N/C) \quad (13)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x-a)\mathbf{a}_x + (y-b)\mathbf{a}_y + (z-c)\mathbf{a}_z}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} \quad (N/C) \quad (14)$$

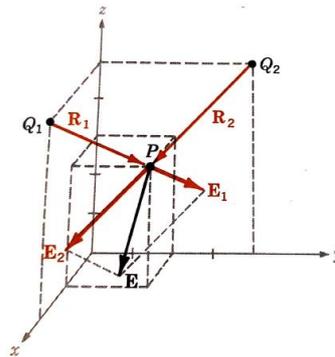
Podemos agora calcular o campo devido a n cargas pontuais. Isso pode ser feito porque a Lei de Coulomb é linear, e o princípio da superposição se aplica. Assim,

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{a}_2 + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3^2} \mathbf{a}_3 + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \mathbf{a}_n \quad (N/C) \quad (15)$$

Na forma de somatório, temos:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{r_m^2} \mathbf{a}_m \quad (16)$$

A figura abaixo mostra a adição vetorial da intensidade de campo elétrico em um ponto P devido às cargas Q_1 e Q_2 via linearidade da Lei de Coulomb.



Exemplo:

- 1) Encontre o campo \mathbf{E} em $(0,3,4)$ m em coordenadas cartesianas devido a uma carga pontual $Q=0.5\mu\text{C}$ localizada na origem.
Neste caso, $\mathbf{r} = 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$, e $r = |\mathbf{r}| = 5$

$$\mathbf{a}_r = \frac{3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{0.5 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 5^2} (0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z) \text{ (N/C)}$$

Assim, $|\mathbf{E}| = 180 \text{ V/m}$ na direção $\mathbf{a}_r = 0.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z$

- 2) [Hayt Jr.] Cargas pontuais de 3 nC, 1 nC, e -1 nC são localizadas nos três vértices de um triângulo equilátero de 1m de lado, no ar. Encontre a magnitude total do campo \mathbf{E} em cada vértice produzida pelas cargas nos dois vértices opostos.

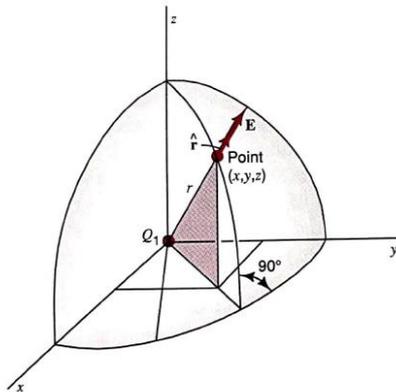
Respostas: 9; 23.8; 32.4 V/m

- 3) [J. Krauss] Uma carga de -10 nC está situada no ar, na origem. Calcule a magnitude do campo elétrico em um ponto a 3m da origem.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10 \times 10^{-9}}{3^2} \mathbf{a}_r = -10\mathbf{a}_r \text{ } \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ (ou } \frac{\text{V}}{\text{m}})$$

Assim, a magnitude do campo \mathbf{E} é de 10 N/C (ou V/m), e está na direção negativa de \mathbf{r} .

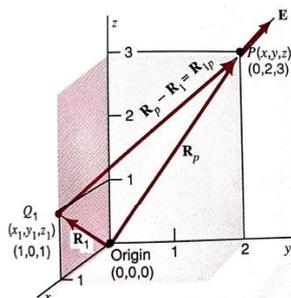
Este exemplo foi resolvido em coordenadas esféricas. Lembrando que apenas uma coordenada esférica aparece na solução (r), não apresentando dependência em ϕ e θ . Como fica esta solução em coordenadas retangulares em um ponto (x,y,z) a uma distância r da origem?



$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)} \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{Q_1(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(\frac{\text{N}}{\text{C}}\right)$$

Em azul temos a magnitude de \mathbf{E} , e em amarelo o vetor unitário.

- 4) [J. Krauss] Encontre o campo elétrico em $(0,2,3)$ devido a uma carga $Q_1 = 10 \text{ nC}$ em $(1,0,1)$, no ar. Note que a carga não está na origem.



$$\mathbf{r}_p = 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1 = -\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\mathbf{E} = |\mathbf{E}|\mathbf{a}_r = \frac{10 \times 10^{-9} (-\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 3^2} = 10 \frac{(-\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)}{3}$$

$$\mathbf{E} = -3.33\mathbf{a}_x + 6.67\mathbf{a}_y + 6.67\mathbf{a}_z \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

- 5) Encontre a expressão para o campo elétrico em P devido a uma carga pontual Q em (x_1, y_1, z_1) . Repita com a carga colocada na origem.

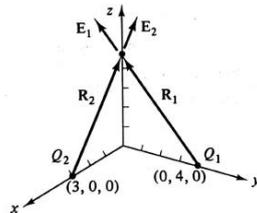
$$\mathbf{r} = (x - x_1)\mathbf{a}_x + (y - y_1)\mathbf{a}_y + (z - z_1)\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - x_1)\mathbf{a}_x + (y - y_1)\mathbf{a}_y + (z - z_1)\mathbf{a}_z}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

Para a carga na origem,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

- 6) Encontre \mathbf{E} em $(0,0,5)m$ devido a $Q_1 = 0.35 \mu C$ em $(0,4,0)m$ e $Q_2 = -0.55 \mu C$ em $(3,0,0)m$



$$\mathbf{r}_1 = -4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \quad r_1 = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41} \quad r_1^2 = 41$$

$$\mathbf{r}_2 = -3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z \quad r_2 = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34} \quad r_2^2 = 34$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{0.35 \times 10^{-6} (-4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 41} = -48\mathbf{a}_y + 60\mathbf{a}_z \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{-0.55 \times 10^{-6} (-3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0 34} = 74.9\mathbf{a}_x - 124\mathbf{a}_z \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

Assim, o campo total é:

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 74.9\mathbf{a}_x - 48\mathbf{a}_y - 64.9\mathbf{a}_z \left(\frac{V}{m}\right)$$

1.3 Distribuições de carga

O somatório de cargas discretas na equação (16) pode ser estendido para nos dar o campo de uma distribuição contínua de cargas. Para isso, precisamos apresentar o conceito de densidade de cargas. Assim, se uma carga Q é uniformemente distribuída em um volume v , a densidade de carga é dada por,

$$\rho = \frac{Q}{v} \quad (17)$$

Para definirmos ρ em um ponto P , precisamos considerar a razão entre a carga diferencial ΔQ e o volume Δv , e tomar o limite desta razão tendendo a zero, ou seja,

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad (18)$$

A carga total é, então, obtida integrando todo o volume,

$$Q = \int_{vol} dQ = \int_{vol} \rho dv \quad (19)$$

Por exemplo, encontre a carga total em um cilindro de raio $r=10\text{cm}$ e altura $h=30\text{cm}$ se a densidade de carga é dada por,

$$\rho = 100e^{-z}(x^2 + y^2)^{-1/4} \text{ C/m}^3 \quad (\text{em coordenadas retangulares})$$

Em coordenadas cilíndricas (use as tabelas da Aula 1), a expressão acima torna-se,

$$\rho = \frac{100e^{-z}}{\sqrt{r}} \text{ C/m}^3$$

$$Q = \int_0^{0.3} \int_0^{2\pi} \int_0^{0.1} \frac{100e^{-z}}{\sqrt{r}} r dr d\phi dz$$

$$Q = \int_0^{0.3} \int_0^{2\pi} 100e^{-z} \frac{2}{3} r^{3/2} \Big|_0^{0.1} d\phi dz$$

$$Q = \int_0^{0.3} \int_0^{2\pi} 2.11e^{-z} d\phi dz$$

$$Q = \int_0^{0.3} 13.25e^{-z} dz$$

$$Q = 3.43 \text{ C}$$

O contribuição incremental para a intensidade do campo elétrico $\Delta \mathbf{E}$ produzida por uma carga incremental ΔQ é,

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r = \frac{\rho \Delta v}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (20)$$

Somando todas as contribuições,

$$\mathbf{E} = \sum_{m=1}^n \frac{\rho \Delta v}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (21)$$

No limite que o volume tende a zero,

$$\mathbf{E} = \int_{vol} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (22)$$

Exemplo:

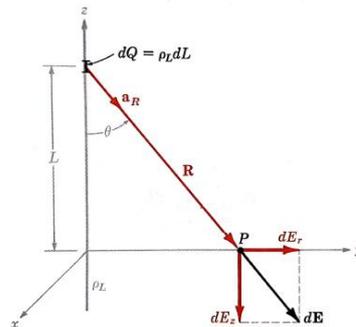
- 1) [Hayt Jr.] Encontre a carga total no volume especificado
 - a) Um cubo com bordas de 2m de comprimento e eixos paralelos, situado no primeiro quadrante com um vértice na origem; $\rho = \frac{2xy}{z+1}$.
 - b) Uma cunha cilíndrica limitada pelas superfícies $z=-1$, $z=2$, com setor variando de $\phi=30^\circ$ a $\phi=60^\circ$, $r=3$; $\rho = r \sin(2\phi)$.
 - c) Uma esfera com raio de 2m centrada na origem; $\rho = 2r(1 + \cos \theta) \sin(\frac{1}{2}\phi)$

Respostas: 8.8; 13.5; 64 C

1.4 Linha de carga

No item anterior, tínhamos uma densidade volumétrica de carga (C/m^3), mas agora iremos considerar uma distribuição filamental de carga (como em um feixe em tubo de raios catódicos ou em um condutor carregado, mas com um raio muito fino). Neste caso, a densidade de carga é dada em termos de C/m (densidade linear de carga).

Assim, suponha uma linha reta de carga se estendendo ao longo do eixo z ($-\infty$ a $+\infty$) em um sistema de coordenadas cilíndricas, como mostrado na figura abaixo. Queremos calcular a intensidade de campo elétrico \mathbf{E} em qualquer ponto devido à distribuição linear ρ_L .



Em problemas como esse, é sempre bom levar em conta sua simetria, com isso, podemos checar com quais coordenadas o campo não varia e quais componentes de campo não estão presentes.

Primeiramente, a linha é simétrica em torno de ϕ , com isso, nenhuma componente de campo pode variar na direção azimutal (ϕ). Sabemos, ainda, que o problema não muda ao caminharmos ao longo de z . Essa simetria axial nos leva a obter campos que não são função de z . Finalmente, se mudarmos r , o campo muda. Portanto, os campos devem ser função de r .

Sabendo disso, quais componentes de campo estarão presentes na solução? Cada incremento de carga age como uma carga pontual, e produz uma contribuição incremental em \mathbf{E} (a direção dependerá do tipo de carga, negativa ou positiva). Nenhum elemento de carga produz uma componente ϕ de \mathbf{E} ($E_\phi = 0$). No entanto, cada elemento produz uma componente em r e z (E_r e E_z). Mas é importante notar que as contribuições para E_z dos elementos acima e abaixo do ponto onde determinamos o campo, cancelam uns aos outros. Portanto, só nos resta a componente E_r .

Assim, com base na figura acima, escolhamos um ponto P no eixo y onde queremos determinar o campo. Assim, o campo incremental em P devido a $dQ = \rho_L dL$ torna-se,

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_r \quad (23)$$

$$dE_r = \frac{\rho_L dL \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{y}{R} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \quad (24)$$

Substituindo R^2 por $L^2 + r^2$ e integrando, temos,

$$E_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L r dL}{4\pi\epsilon_0 (L^2 + r^2)^{3/2}} \quad (25)$$

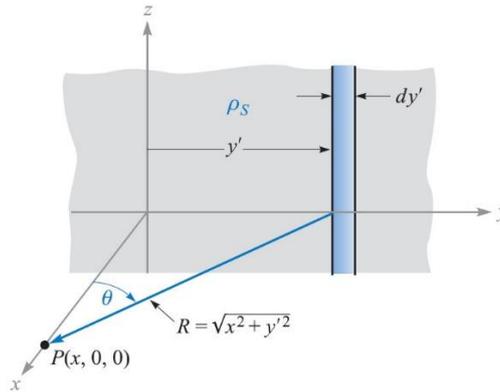
Integrando, resulta em,

$$E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (25)$$

1.5 Plano infinito de carga

Aqui nós consideramos um plano infinito de carga com densidade uniforme ρ_s C/m², como ilustra a figura abaixo.

Da simetria do problema, vemos que o campo não varia com y ou z , e que os campos vindos de elementos diferenciais simetricamente localizados com respeito ao ponto de observação cancelam uns aos outros (as componentes se cancelam devido à contribuição resultante ser zero). Portanto, só teremos a componente E_x .



Nesta figura, temos um plano de cargas no plano yz , um ponto P no eixo x , e uma faixa de carga diferencial (largura dy) usada para determinar o campo em P , dada por $d\mathbf{E} = \frac{\rho_s dy \mathbf{a}_R}{2\pi\epsilon_0 R}$.

Existe mais de uma maneira de resolver este problema. Uma delas é dividindo o plano em faixas de carga de largura dy , como na figura acima, cuja carga é $\rho_L = \rho_s dy$, e cuja distância do ponto P é $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, temos que

$$dE_x = \frac{\rho_s dy}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \cos(\theta) = \frac{\rho_s x dy}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)}$$

Somando o efeito de todas as faixas,

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \left[\text{atan} \left(\frac{y}{x} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

Se o ponto P estivesse no eixo x negativo, então

$$E_x = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

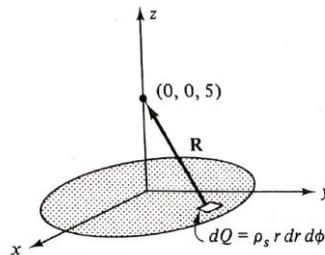
Exemplo:

- 1) Cargas são distribuídas uniformemente em um plano em $z = 10$ cm com uma densidade $\rho_s = \frac{1}{3\pi}$ nC/m². Encontre \mathbf{E} .

$$|\mathbf{E}| = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = \frac{\frac{1}{3\pi} \times 10^{-9}}{2\epsilon_0} = 6 \text{ V/m}$$

Se $z > 10$ cm, $\mathbf{E} = 6\mathbf{a}_z$ V/m; e para $z < 10$ cm, $\mathbf{E} = -6\mathbf{a}_z$ V/m

- 2) Encontre a força em uma carga pontual de $50\mu\text{C}$ em $(0,0,5)$ m devido a uma carga de 500π μC uniformemente distribuída em um disco circular de $r \leq 5$ m, $z = 0$.



A densidade de carga é,

$$\rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{500\pi \times 10^{-6}}{\pi(5)^2} = 0.2 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$$

Uma vez que este problema apresenta simetria cilíndrica, temos,

$$\mathbf{r} = -r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z$$

Logo, cada carga diferencial produz um diferencial de força,

$$d\mathbf{F} = \frac{50 \times 10^{-6} \rho_s r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0(r^2 + 25)} \left(\frac{-r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + 25}} \right)$$

Devido à simetria do problema, as componentes radiais cancelam umas às outras, e \mathbf{a}_z é constante. Portanto,

$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \frac{50 \times 10^{-6} (0.2 \times 10^{-4}) 5r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + 25)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{F} = 90\pi \int_0^5 \frac{r dr}{(r^2 + 25)^{3/2}} \mathbf{a}_z = 90\pi \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 + 25}} \right]_0^5 \mathbf{a}_z = 16.56\mathbf{a}_z \text{ (N)}$$

Resolvendo, agora, este problema para um disco de 2 m de diâmetro, temos:

A redução do raio causa dois efeitos: primeiro, a densidade de carga aumenta por um fator de

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(5)^2}{(2)^2} = 6.25$$

depois, a integral sobre r produz,

$$\int_0^2 \frac{r dr}{(r^2+25)^{3/2}} = 0.0143 \quad \text{ao invés de} \quad \int_0^5 \frac{r dr}{(r^2+25)^{3/2}} = 0.0586$$

Logo, a força resultante é,

$$\mathbf{F} = (6.25) \left(\frac{0.0143}{0.0586} \right) (16.56 \mathbf{a}_z) = 25.27 \mathbf{a}_z \quad (\text{N})$$