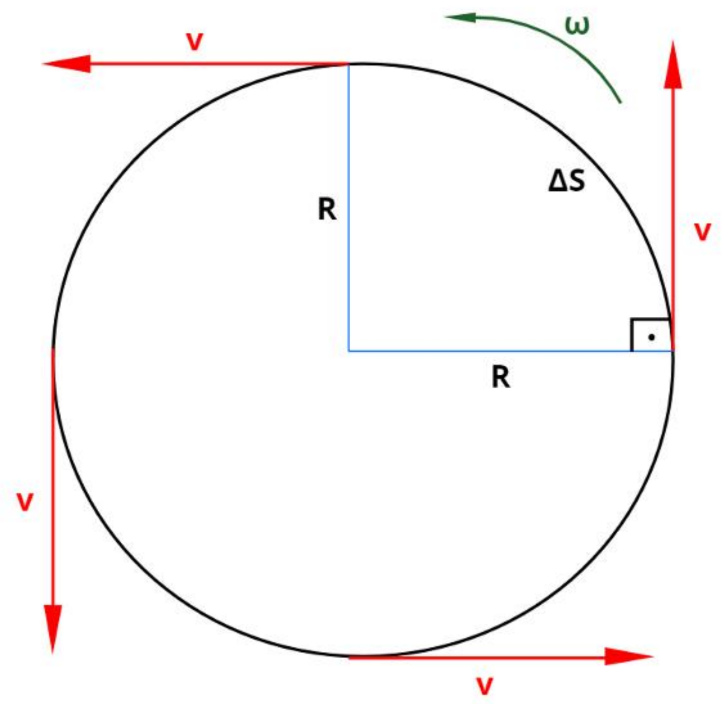
Física I (4302111)
Turma T2 - noturno

Profa. Luciana V. Rizzo

Movimento circular

Movimento circular

A trajetória possui uma curvatura (círculo, elipse ou fragmentos).



Trajetória: linha preta

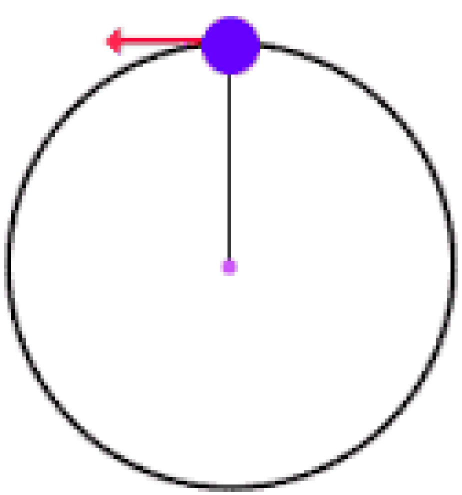
Vetor velocidade: em vermelho (tangentes à trajetória)

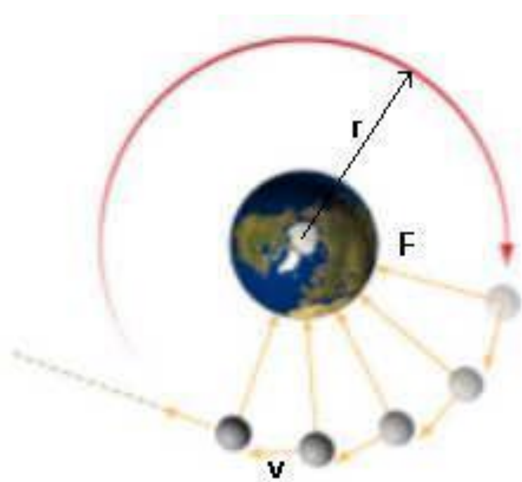
Movimento circular periódico

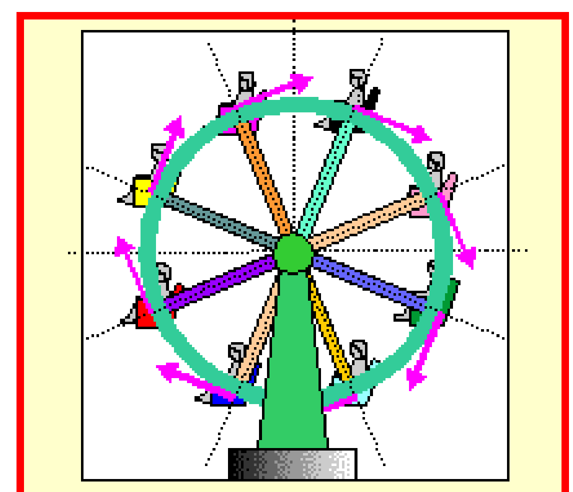
Movimento circular que se repete em intervalos de tempos iguais

Período (T, em s): tempo para completar 1 ciclo $$T = \frac{2\pi R}{v}$$

Frequência (f, em Hz): número de ciclos completos em 1 segundo $$f = \frac{1}{T}$$

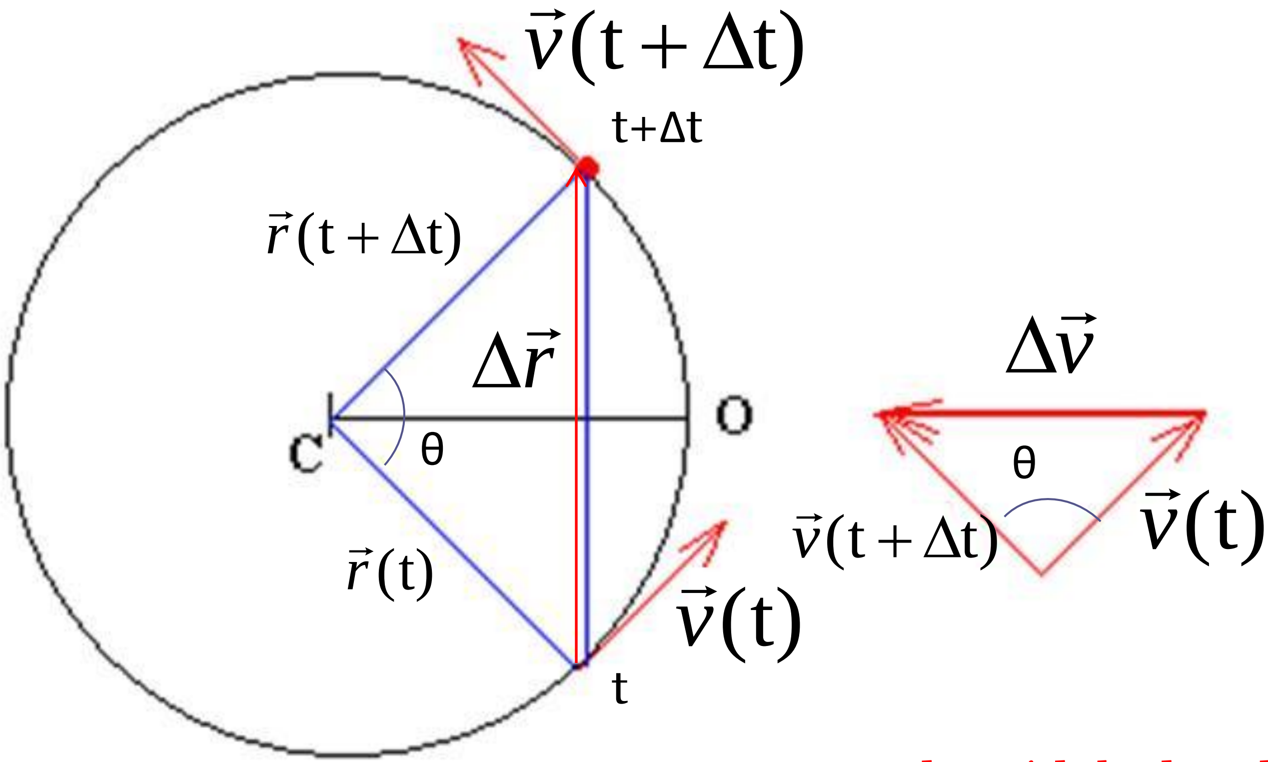






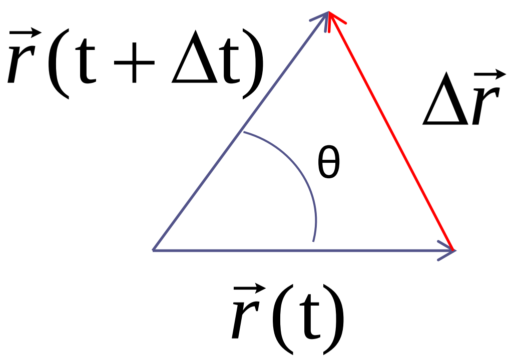
Movimento circular uniforme (MCU)

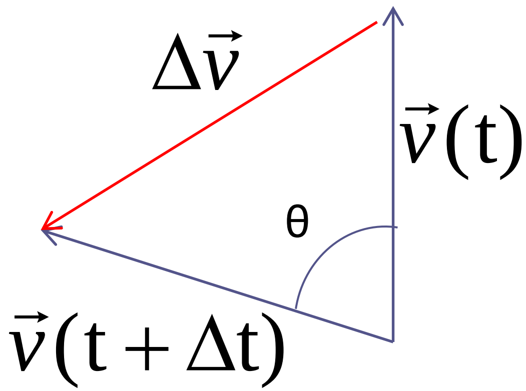
- Trajetória circular; módulo da velocidade constante



Apesar do módulo da velocidade permanece constante, sua direção varia ao longo do tempo. Logo, há ação de uma aceleração (centrípeta), que atua na mudança de direção do vetor velocidade.

Aceleração centrípeta





Por semelhança de triângulos:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|}=\frac{|\vec{v}|}{|\vec{r}|}\quad\Rightarrow|\Delta\vec{v}|=|\Delta\vec{r}|\frac{v}{R}\quad\Rightarrow\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}\frac{v}{R}$$

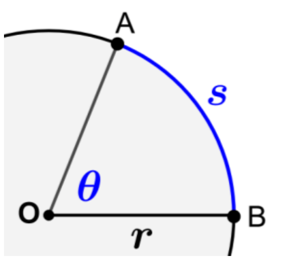
No limite para Δt→0: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=|\vec{a}|\quad e\quad \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=|\vec{v}|$

Logo, $\boxed{a=v\dfrac{v}{R}=\dfrac{v^2}{R}}$

A aceleração centrípeta sempre aponta para o centro da trajetória circular.

Funções horárias no MCU em termos do ângulo θ

Relação entre comprimento de arco (s) e ângulo central (θ):



$$\boldsymbol{s = \theta r}$$

Podemos descrever a posição de um ponto P em um círculo utilizando o ângulo θ:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

(em analogia com o MRU)

θ_0: Ângulo inicial

ω: Velocidade angular (constante no MCU): $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$

$$\boxed{v = \omega r}$$

v: m/s

ω: rad/s

Exercício 1

Em seu movimento de rotação, o planeta Terra gira em torno de si mesmo. Considere um ponto na linha do Equador. Considere o raio da Terra como 6370 km.

a) Que tipo de movimento circular esse ponto descreve? A velocidade é constante ou não?

MCU. A velocidade tem módulo constante e direção variável.

b) Qual é o período deste movimento?

24 h

c) Calcule a velocidade linear desse ponto?

$v \cong 1670\ km/h$

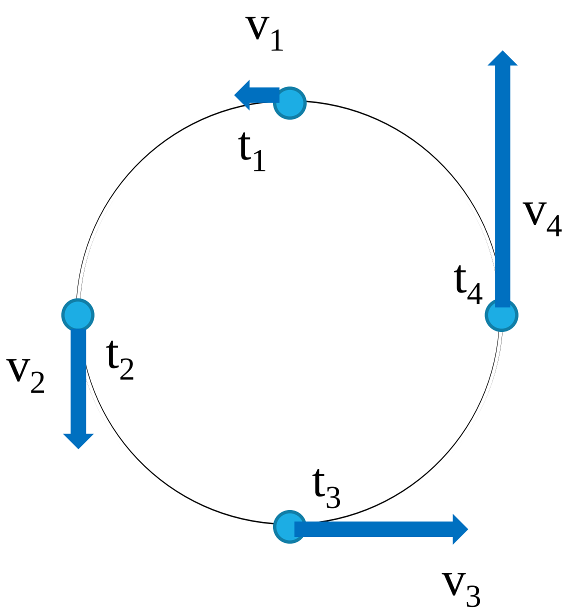
d) Calcule a velocidade angular desse ponto.

$\omega = 15°/h$

e) Calcule a aceleração centrípeta desse ponto.

$$a_{cp} \cong 438\ km/h^2 \cong 0{,}034 \frac{m}{s^2} \cong 0{,}0034\ g$$

Movimento circular uniformemente variado

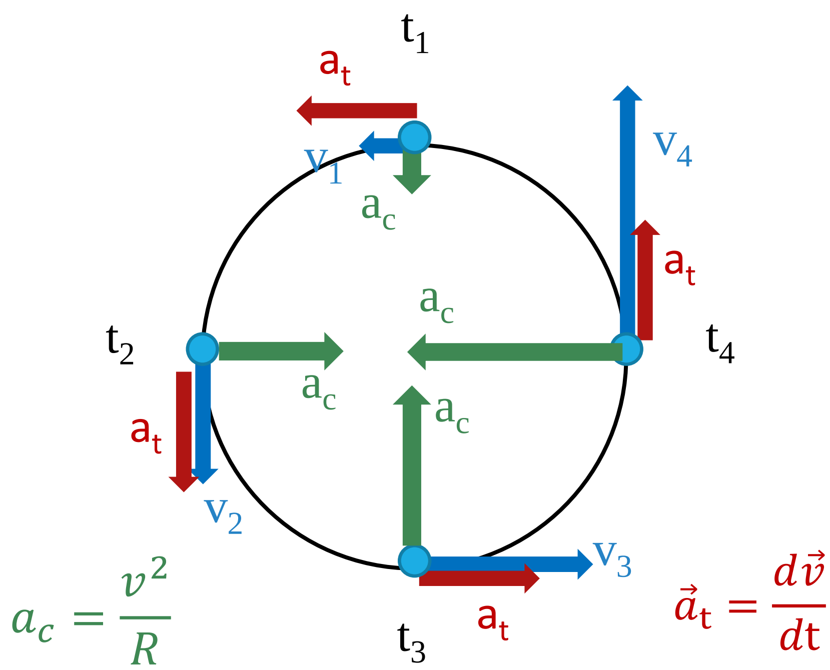


Trajetória circular

Velocidade varia em módulo e direção

Atuação de uma aceleração <u>tangencial</u> de módulo constante

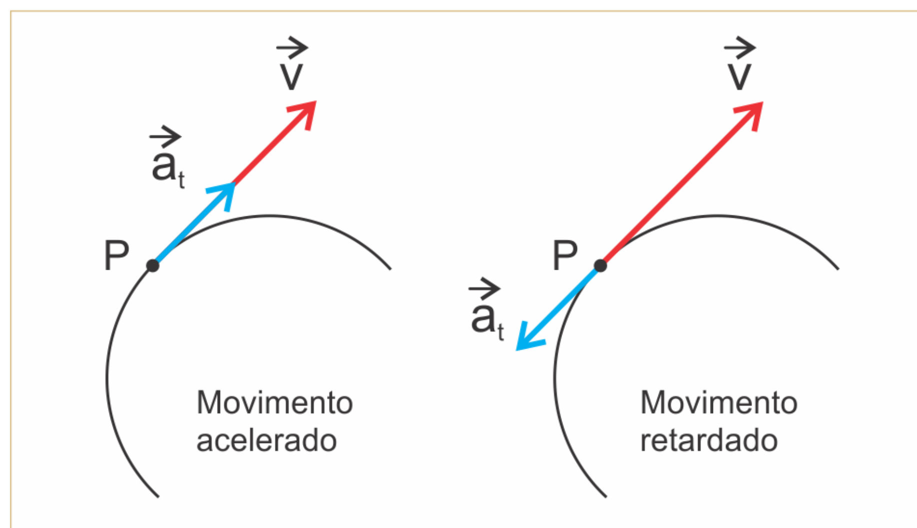
Movimento circular uniformemente variado



Velocidade varia em módulo e direção

Atuação de uma aceleração <u>tangencial</u> (a_t) de módulo constante, tangencial à trajetória

Se a_t apontar no mesmo sentido de v, o movimento é <u>acelerado</u>.
Se a_t apontar no sentido contrário ao de v, o movimento é <u>desacelerado</u> ou retardado.



Movimento circular com aceleração tangencial

A direção e o módulo de $\vec{v}$ variam.

Aceleração Centrípeta: altera a direção de de $\vec{v}$.

Aceleração Tangencial: altera o módulo de $\vec{v}$.

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

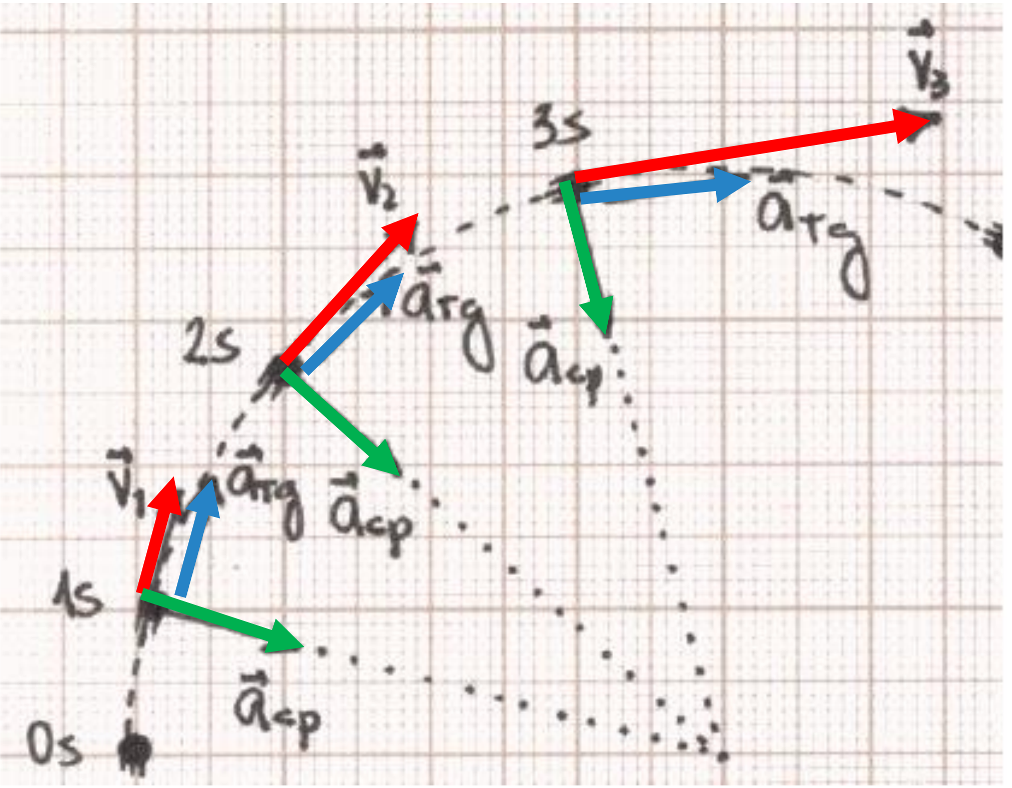
Aceleração total

Aceleração centrípeta

$$\left|\vec{a}_c\right| = \frac{v^2}{R}$$

Aceleração tangencial

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Movimento circular uniformemente variado (aceleração tangencial constante)

Como descrever esse tipo de movimento?

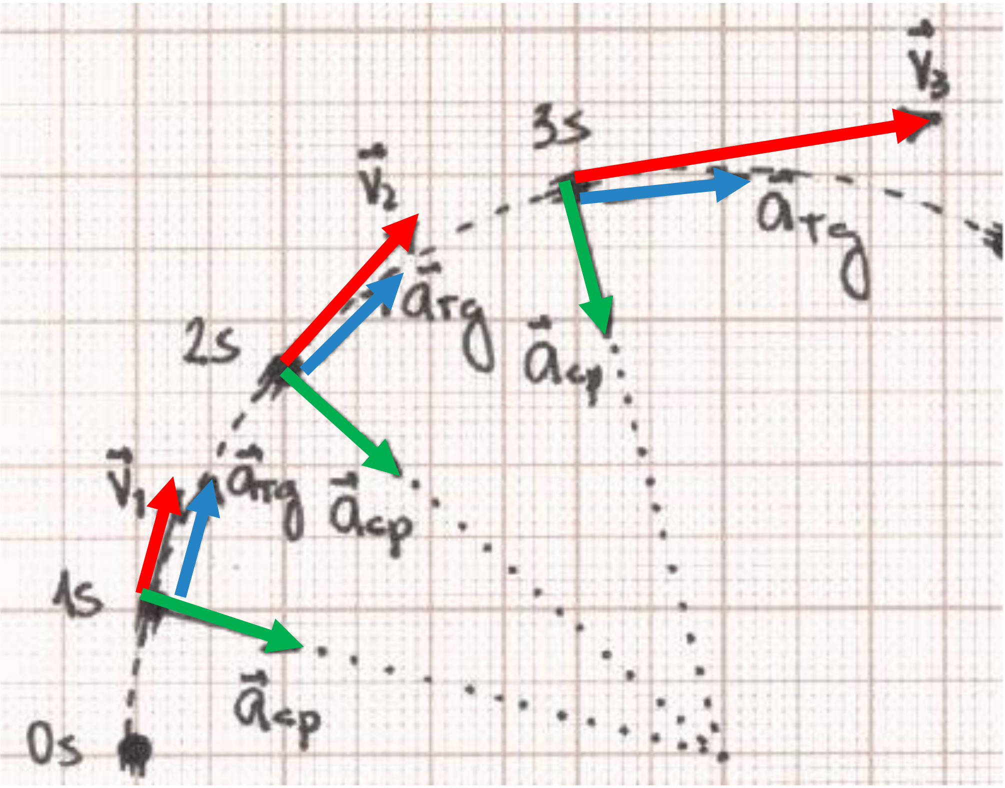
Analogia com MUV:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\alpha(t) = \text{constante}$$

Aceleração angular: $a = r.\alpha$



Aceleração total

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

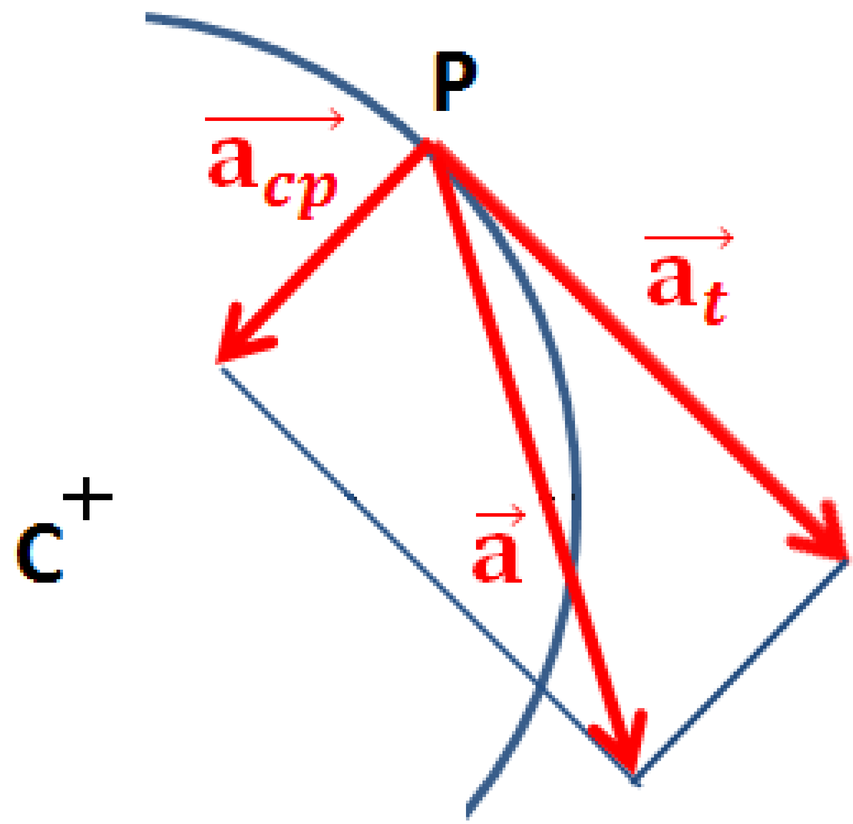
Aceleração total

Aceleração centrípeta

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$$

Aceleração tangencial

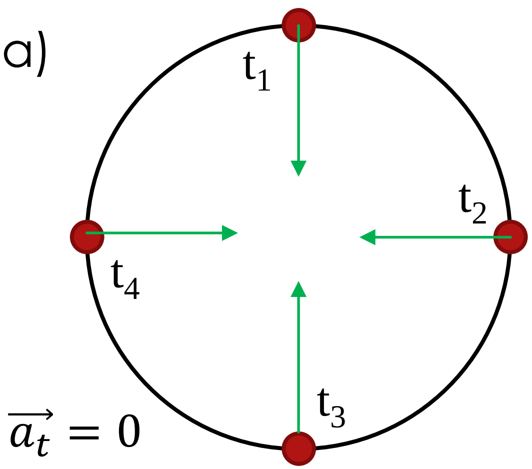
$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Exercício conceitual

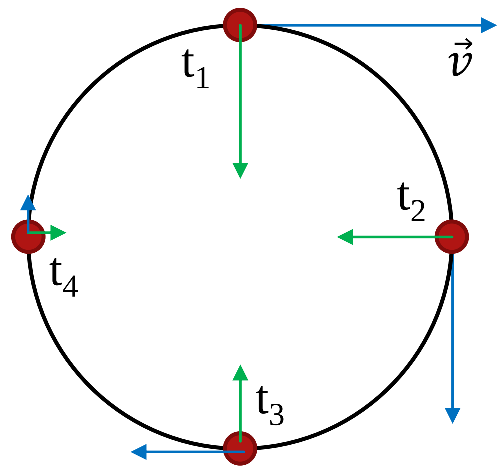
Com base nas figuras abaixo, classifique os movimentos circulares como: uniforme, acelerado ou desacelerado. Em cada uma delas, desenhe o vetor que está faltando: $\vec{v}$, $\overrightarrow{a_c}$ ou $\overrightarrow{a_t}$

a)



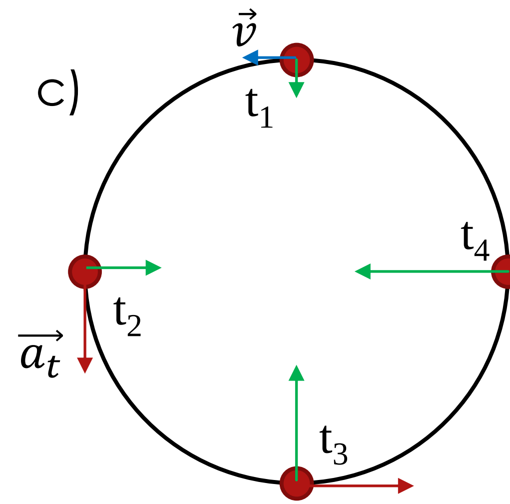
Desenhe os vetores $\vec{v}$

b)



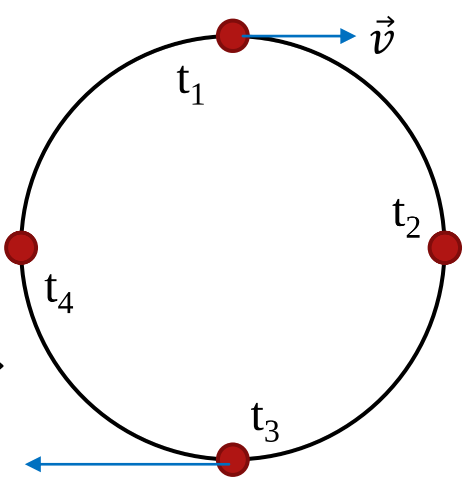
Desenhe os vetores $\overrightarrow{a_t}$

c)



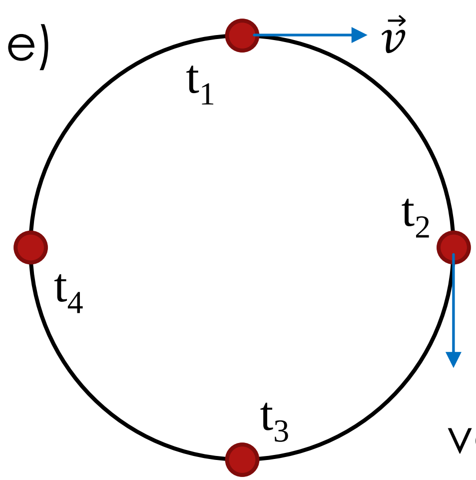
Desenhe os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{a_t}$.

d)



Desenhe os vetores $\vec{v}$, $\overrightarrow{a_t}$ e $\overrightarrow{a_c}$

e)

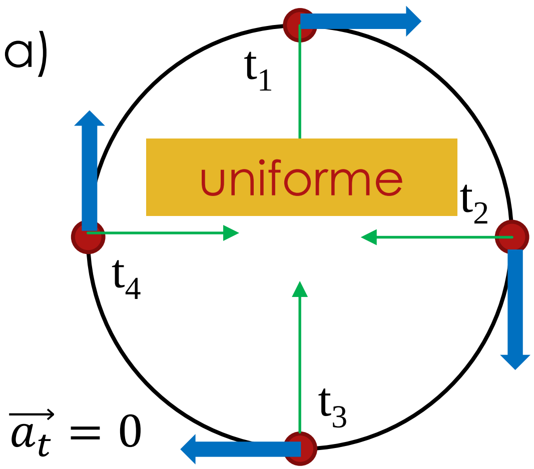


$|\vec{v}|$ é constante

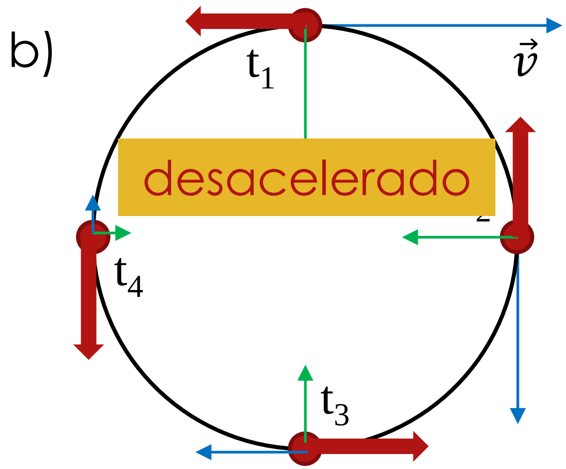
Desenhe os vetores $\vec{v}$, e $\overrightarrow{a_c}$

Exercício conceitual

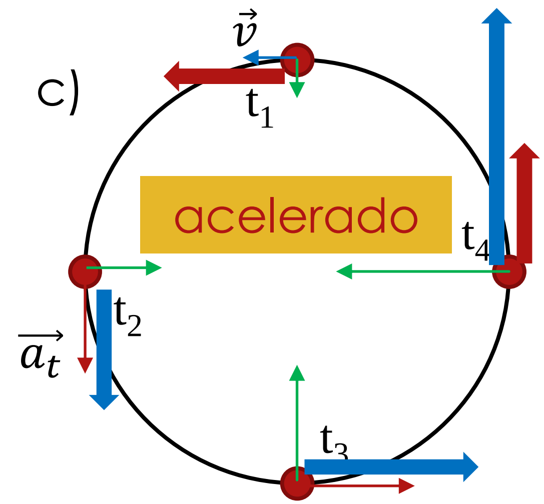
Com base nas figuras abaixo, classifique os movimentos circulares como: uniforme, acelerado ou desacelerado. Em cada uma delas, desenhe o vetor que está faltando: $\vec{v}$, $\overrightarrow{a_c}$ ou $\overrightarrow{a_t}$



Desenhe os vetores $\vec{v}$

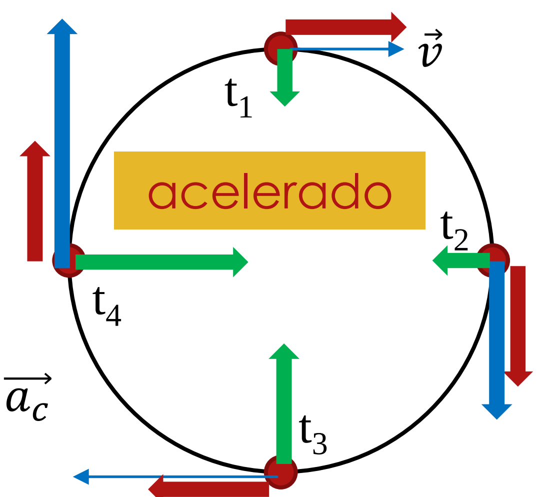


Desenhe os vetores $\overrightarrow{a_t}$

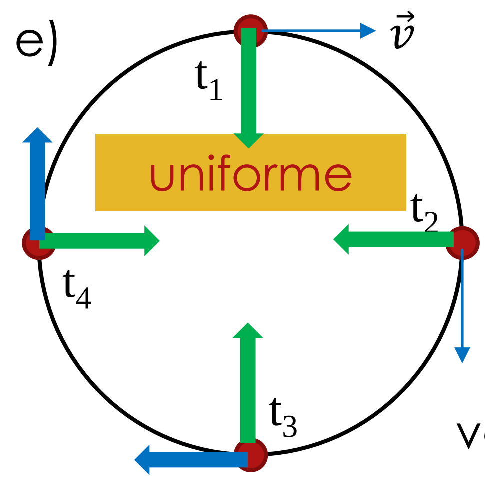


Desenhe os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{a_t}$.

d)



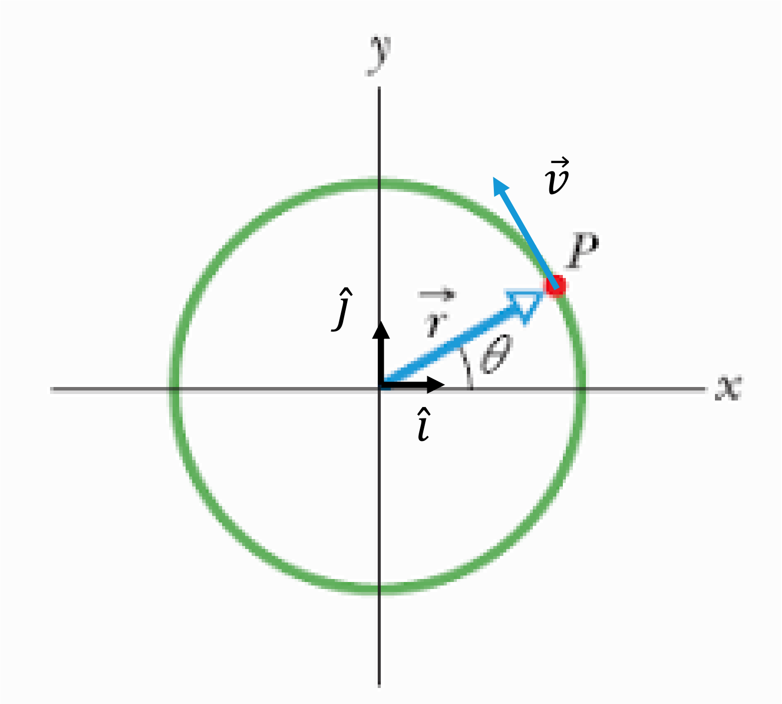
Desenhe os vetores $\vec{v}$, $\overrightarrow{a_t}$ e $\overrightarrow{a_c}$



$|\vec{v}|$ é constante

Desenhe os vetores $\vec{v}$, e $\overrightarrow{a_c}$

Descrição do movimento circular em um sistema de coordenadas cartesianas

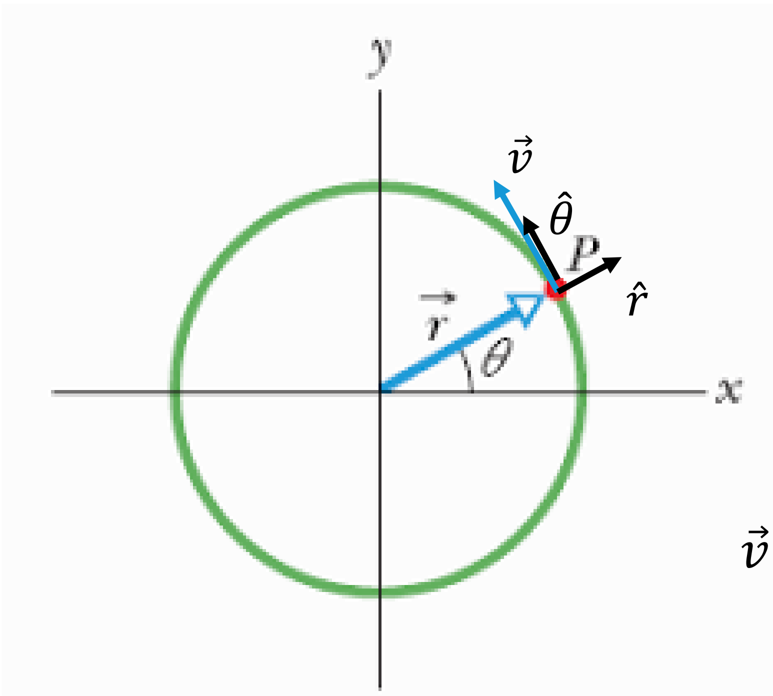


Vetor posição em coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$$

Nesse sistema de coordenadas, há um acoplamento nas direções x e y, ou seja, os movimentos nessas direções não são independentes.

Descrição do movimento circular em um sistema de coordenadas polares



Versor $\hat{r}$:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\theta(t)\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta(t)\,\hat{\jmath}$$

O versor $\hat{\theta}$ tem a mesma direção do vetor velocidade:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\hat{r}}{dt} = -r\operatorname{sen}\theta\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{}\hat{\imath} + r\cos\theta\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{}\hat{\jmath}$$

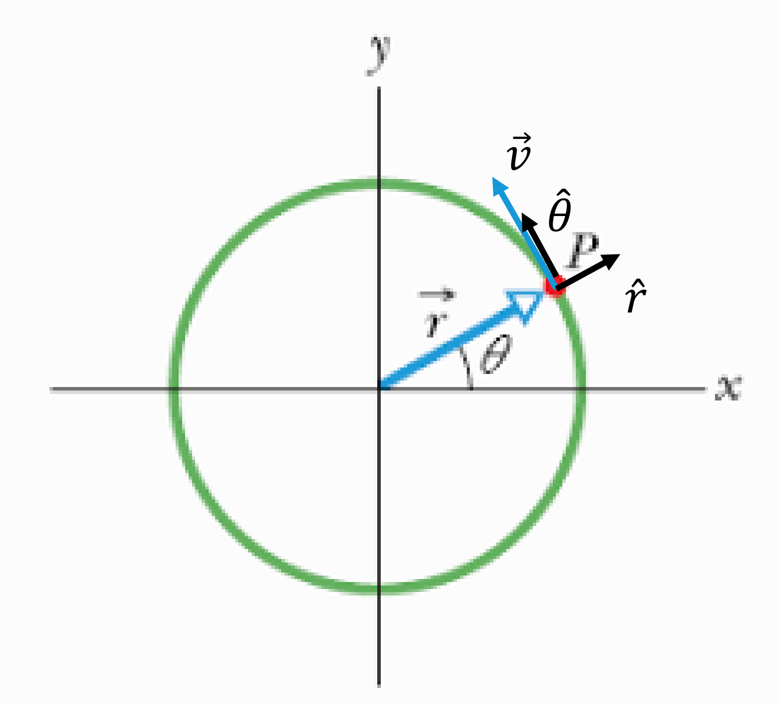
$= \omega$ (velocidade angular)

$$\hat{\theta} = \frac{\vec{v}}{v} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

★
Aqui utilizamos novas regras de derivação:
Derivada de seno e cosseno
Regra da cadeia
(ver últimos slides)

Note que $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ são ortogonais, pois:
$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$

Descrição do movimento circular em um sistema de coordenadas polares



Podemos descrever o movimento circular em termos dos versores $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$:

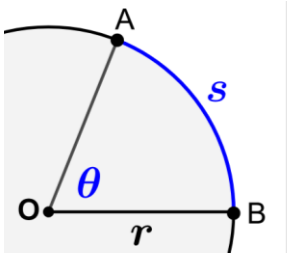
$$\vec{r}(t) = r\hat{r} + r\theta\hat{\theta} \quad (r = cte)$$

$$\vec{v}(t) = v\hat{\theta} = r\omega\hat{\theta}$$

onde $v = r\omega$.

Relação entre velocidade linear (v, m/s) e velocidade angular (ω, rad/s).

E a aceleração?



$$s = \theta r$$

Descrição do movimento circular em um sistema de coordenadas polares

E a aceleração?

$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{\theta} = r\frac{d}{dt}\underbrace{(\omega\hat{\theta})}_{\text{produto de duas funções}} = r\frac{d\omega}{dt}(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) + r\omega\frac{d}{dt}(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$$

produto de duas funções ★

$$\vec{a}(t) = r\frac{d\omega}{dt}(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) + r\omega\left(-\cos\theta\overbrace{\frac{d\theta}{dt}}^{=\,\omega}\hat{\imath} - \operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{a}(t) = r\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{=\,\alpha}\underbrace{[-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}]}_{=\,\hat{\theta}} + r\omega^2\underbrace{[-\cos\theta\,\hat{\imath} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}]}_{=\,-\hat{r}}$$

$$r\omega^2 = r.\frac{v^2}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = r\alpha\hat{\theta} - \frac{v^2}{r}\hat{r}}$$

Aceleração tangencial na direção de $\hat{\theta}$

Aceleração centrípeta na direção $-\hat{r}$ (aponta para o centro)

Aqui utilizamos outra regra de derivação:
Regra do produto
(ver últimos slides) ★

Outras regras de derivação

Derivada de funções trigonométricas

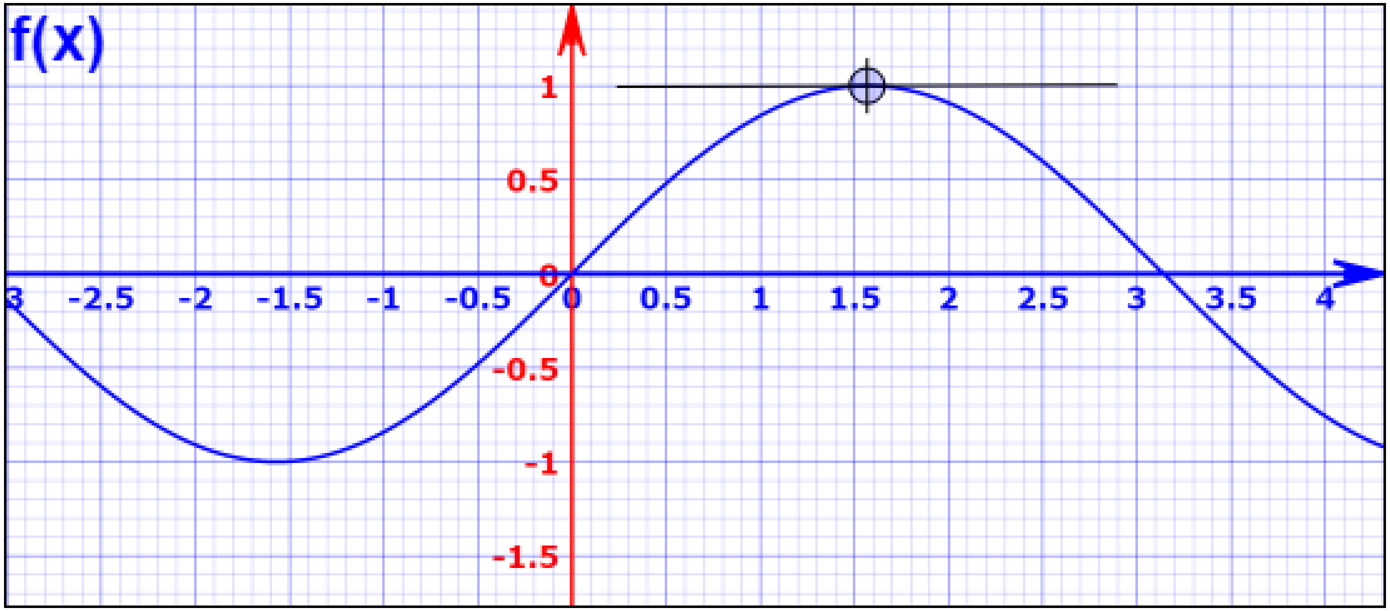
$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} x\right) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos x\right) = -\operatorname{sen} x$$

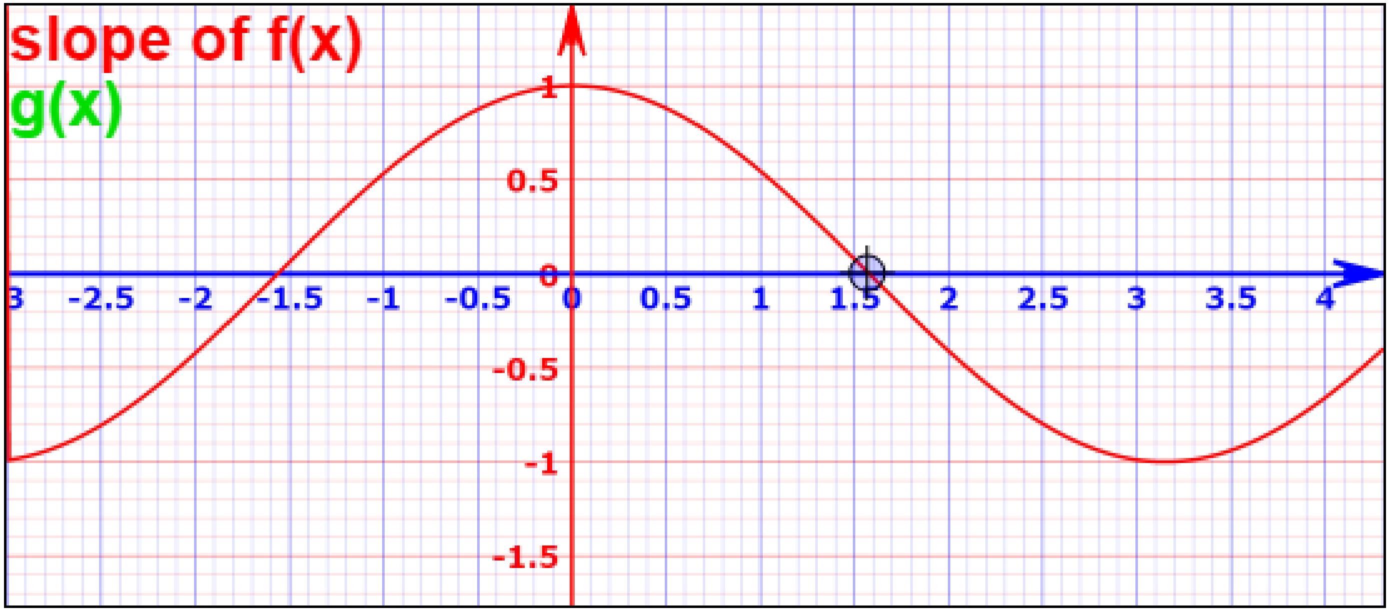
As derivadas das demais funções trigonométricas podem ser obtidas a partir dessas derivadas.

Demonstração na seção 3.4 do Stewart.

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

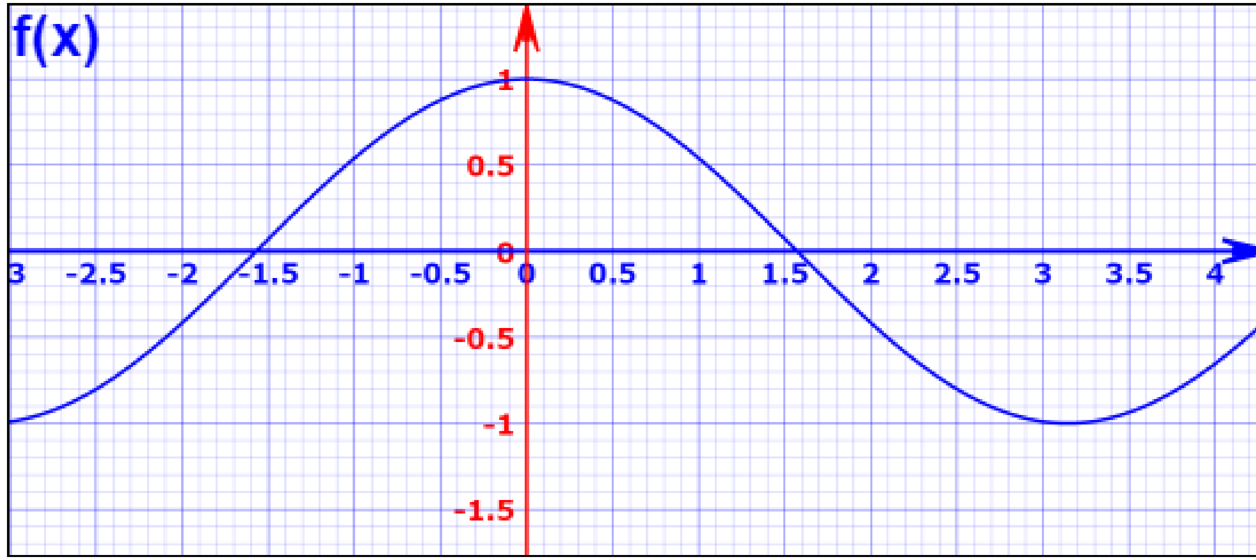


$$f'(x) = \cos x$$

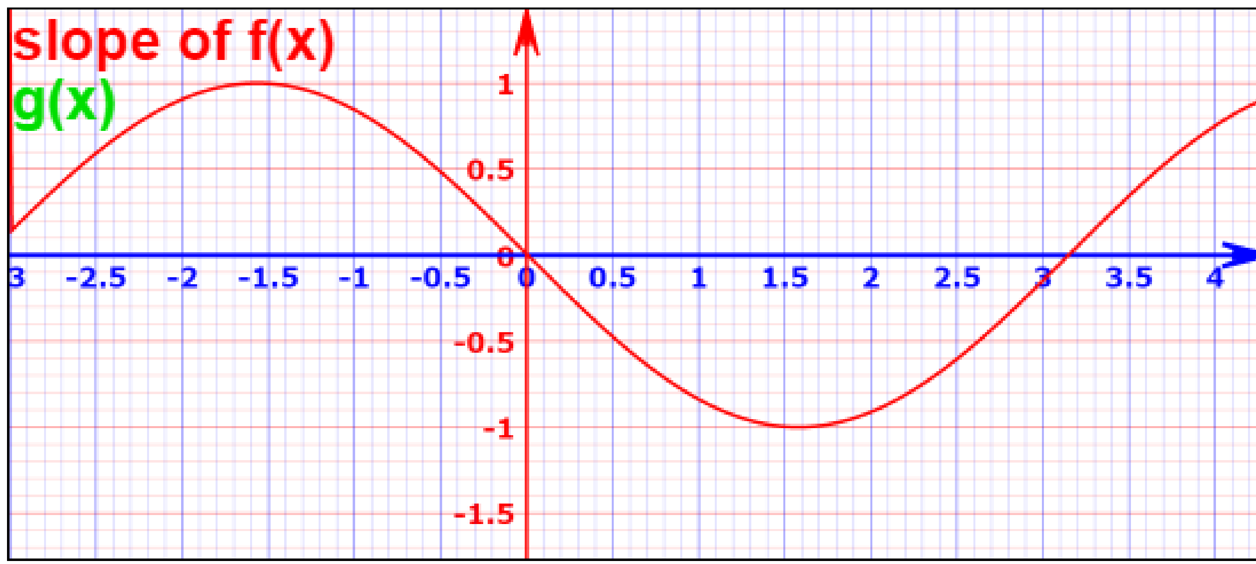


https://www.mathsisfun.com/calculus/derivative-plotter.html

$$f(x) = \cos x$$



$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$



https://www.mathsisfun.com/calculus/derivative-plotter.html

Regra do produto

Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x \,.\, x^2] = (\operatorname{sen} x)'.(x^2) + (\operatorname{sen} x).(x^2)' =$$

$$= \cos x \,.\, (x^2) + (\operatorname{sen} x).2x$$

Demonstração na seção 3.2 do Stewart.

Regra da cadeia

Sejam duas funções diferenciáveis, $y(u)$ e $u(x)$. Então, a derivada da função composta $y(u(x))$ é dada pelo produto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Derivada da função "de fora"

Derivada da função "de dentro"

Exemplo: $f(x) = \sqrt{x+1}$

Função "de dentro": $u(x) = x + 1$

Função "de fora": $y(u) = \sqrt{u}$

$$f'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{2} . u^{-\frac{1}{2}}\right) . \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{2} . u^{-\frac{1}{2}}\right) . (1) =$$

$$= \frac{1}{2} . (x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Demonstração na seção 3.5 do Stewart.