Cálculo III - Poli - 2023

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

28 de março de 2023

Referências Sugeridas para o Curso

- T. M. APOSTOL, *Calculus. Vol. II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability*, Second edition, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1969.
- H. GUIDORIZZI, *Um curso de cálculo*, v. 3, LTC, 2013.

Referência Complementar

W. RUDIN, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 3rd ed., 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

Software de Apoio

: Maxima, a Computer Algebra System

: SageMath

Integral de Riemann na Reta (revisão)

Definição (Partições e Pontilhamentos)

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

- Uma *partição* de $[a, b]$ é um subconjunto finito $P \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$.
- Dada $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ partição de $[a, b]$:
  - $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, chama-se *i-ésimo intervalo* de P;
  - $|P| := \max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$ chama-se *norma* de P;
  - uma *n*-upla $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ tal que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ chama-se *pontilhamento* de P.

Definição (Integrabilidade no sentido de Riemann)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- Dados $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ partição de $[a, b]$ e $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ pontilhamento de P, a *soma de Riemann* de f com respeito a (P, ξ) é

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- f diz-se *Riemann-integrável* se existir o limite das somas de Riemann de f, i.e. se a seguinte condição for satisfeita:

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partição de } [a, b] \text{ com } |P| < \delta,$$
$$\forall \xi \text{ pontilhamento de } P, \quad \left| S(f, P, \xi) - \ell \right| < \epsilon.$$

  Caso afirmativo, diz-se que ℓ é limite das somas de Riemann de f.

Proposição

O limite das somas de Riemann de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, caso exista, é único.

Definição (Integral de Riemann)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for Riemann-integrável, chamamos o limite das suas somas de Riemann de *integral de Riemann* de f.

Notação

$\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Condições Suficientes para Integrabilidade

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua, então f é integrável.

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for limitada e o conjunto dos pontos de descontinuidade de f for finito, então f é integrável.

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema (TFC, parte I)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrável. Suponha que exista* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[a, b]$*, derivável em* (a, b) *e tal que* $F' = f$ *em* (a, b)*. Então*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema (TFC, parte II)

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua. Defina $F : I \to \mathbb{R}$ por, para todo $x \in I$,

$$F(x) := \int_a^x f.$$

Então F é derivável e $F' = f$.

Corolário

Toda função contínua definida num intervalo admite uma antiderivada.

Integrais Duplas

Definição (Retângulos)

Um *retângulo* ou *itervalo bidimensional* é um produto $I_1 \times I_2$, onde $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ são intervalos.

Definição (Partições e Pontilhamentos)

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo compacto.

- Uma *partição* de R é um produto $P = P_1 \times P_2$ onde $P_1 = \{a = x_0 < \cdots < x_m = b\}$ é uma partição de $[a, b]$ e $P_2 = \{c = y_0 < \cdots < y_n = d\}$ é uma partição de $[c, d]$.
- Um *pontilhamento* da partição $P = P_1 \times P_2$ é um produto $\xi = \xi_1 \times \xi_2$ onde ξ_1 é pontilhamento de P_1 e ξ_2 é um pontilhamento de P_2.

Partições e Pontilhamentos (cont.)

Definição (Partições e Pontilhamentos)

- Os *retângulos* ou *subintervalos* da partição P são os produtos $P_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.
- A *norma* da partição P é $|P| := \max\{|P_1|, |P_2|\}$.

Definição (Integrabilidade no sentido de Riemann)

Sejam $R = [a,b] \times [c,d]$ e $f : R \to \mathbb{R}$.

- Dados $P = \{(x_i, y_j) \mid 0 \le i \le m, 0 \le j \le n\}$ partição de R e $\{\xi_{i,j} = (\xi_i, \xi_j) \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ pontilhamento de P, a *soma de Riemann* de f com respeito a (P, ξ) é

$$S(f,P,\xi) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_{i,j}) \underbrace{(x_i - x_{i-1})(y_j - x_{j-1})}_{\text{área do } (i,j)\text{-ésimo retângulo de } P} .$$

- f diz-se *Riemann-integrável* se existir o limite das somas de Riemann de f, i.e. se a seguinte condição for satisfeita:

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partição de } R \text{ com } |P| < \delta,$$
$$\forall \xi \text{ pontilhamento de } P, \quad \big|S(f,P,\xi) - \ell\big| < \epsilon.$$

Caso afirmativo, diz-se que ℓ é limite das somas de Riemann de f.

Proposição

O limite das somas de Riemann de $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$*, caso exista, é único.*

Definição (Integral de Riemann)

Se $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ for Riemann-integrável, chamamos o limite das suas somas de Riemann de *integral de Riemann* de f.

Notação

- $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\,\mathrm{d}A(x, y)$ ou $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f\,\mathrm{d}A$ ou $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$;
- $\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\,\mathrm{d}A(x, y)$ ou $\int_{[a,b]\times[c,d]} f\,\mathrm{d}A$ ou $\int_{[a,b]\times[c,d]} f$.

Teorema (uma condição suficiente para integrabilidade)

Se $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *for contínua, então* f *é integrável.*

Interpretação Geométrica

Interpretação Geométrica

Seja $R := [a, b] \times [c, d]$. Se $f : R \to \mathbb{R}$ for Riemann-integrável e maior ou igual a zero, interpretamos $\int_R f \, \mathrm{d}A$ como o *volume* da região do espaço

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Propriedades da Integral Dupla

- Essencialmente, valem as mesmas propriedades da integral de Riemann na reta.
- Seja $Q = [a, b] \times [c, d]$. Então $\{f : Q \to \mathbb{R} \mid f \text{ integrável}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^Q$, e a integral de Riemann é linear.
- Se $f \leq g$ são ambas integráveis em Q, então $\int_Q f \leq \int_Q g$.
- Desigualdade triangular: se f e $|f|$ forem ambas integráveis em Q, então

$$\left|\int_Q f \, \mathrm{d}A\right| \leq \int_Q |f| \, \mathrm{d}A.$$

Teorema de Fubini

Teorema (Fubini)

Sejam $Q = [a, b] \times [c, d]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ integrável.

- *Se existirem as integrais iteradas $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$, então*
$$\int_Q f\,\mathrm{d}A = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

- *Se existirem as integrais iteradas $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$, então*
$$\int_Q f\,\mathrm{d}A = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

Teorema de Fubini

Interpretação Geométrica

Com a notação do teorema anterior, se $f \geq 0$:

- $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ é a integral em $[a,b]$ da função que associa $x \in [a,b]$ à área da seção ortogonal ao eixo Ox passando por x da região $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.
- $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ é a integral em $[c,d]$ da função que associa $y \in [c,d]$ à área da seção ortogonal ao eixo Oy passando por y da região $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.

Conjuntos de Medida Nula

Definição (Conjuntos de Medida Nula)

Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^2$ é um *conjunto de medida nula* se, para todo $\epsilon > 0$, existir uma coleção enumerável de retângulos $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) < \epsilon$, onde $m(Q_i)$ denota a área do retângulo Q_i.

Observação

- $\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i)$ denota o limite da sequência $n \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{i=1}^{n} m(Q_i)$.
- É equivalente, na definição acima, usar bolas no lugar de retângulos.
- Conjuntos de *conteúdo* nulo: mesma definição com “finita” no lugar de “enumerável”.

Condição Necessária e Suficiente para Integrabilidade

Teorema (critério de Lebesgue)

Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é integrável se, e somente se, o conjunto $D_f \subset [a,b] \times [c,d]$ dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula.

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Medida Nula

1. Conjuntos enumeráveis têm medida nula.
2. A união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
3. Um subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula.
4. A imagem de um conjunto de medida nula por movimentos rígidos é um conjunto de medida nula.
5. Retas têm medida nula.
6. O gráfico de uma função contínua $[a, b] \to \mathbb{R}$ tem medida nula.
7. Imagens de curvas de classe C^1 têm medida nula.

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Medida Nula

Interpretação Geométrica

Um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tem medida nula se, intuitivamente, for um conjunto de “área” nula.

Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados

Notação

Seja f uma função definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^2$. Denotamos por $\widetilde{f}$ a extensão por 0 de f, i.e. a função $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\widetilde{f}(x) = f(x)$ se $x \in A$ e 0 caso contrário.

Definição (Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados)

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado e $f : A \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é integrável em A se $\widetilde{f}$ for integrável em algum retângulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ que contenha A. Caso afirmativo, definimos

$$\int_A f := \int_Q \widetilde{f}.$$

Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados

Observação

- Em vista do critério de Lebesgue, f limitada é integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade da extensão $\widetilde{f}$ tiver medida nula.
- Em particular, se $f : A \to \mathbb{R}$ for limitada, ∂A tiver medida nula e o conjunto D_f dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula, então f é integrável.

Exemplos

Exemplo

Sejam $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas com $g \leq h$ e $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Então A é limitado e ∂A tem medida nula. Tomando $Q = [a, b] \times [c, d]$ contendo A, se $f : A \to \mathbb{R}$ for limitada e descontínua num conjunto enumerável, então f é Riemann integrável e

$$\int_A f = \int_Q \widetilde{f} \overset{Fubini}{=} \int_a^b \int_c^d \widetilde{f}(x, y)\, \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x.$$

Analogamente, trocando o papel das variáveis x e y, se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y)\}$, então

$$\int_A f = \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

A integral não enxerga conjuntos de medida nula

Proposição

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ integráveis.

- *Se A tem medida nula, $\int_A f = 0$.*
- *Se $\{(x, y) \in A \mid f(x, y) \neq g(x, y)\}$ tem medida nula, então $\int_A f = \int_A g$.*
- *Se f for integrável em $B \subset \mathbb{R}^2$ e $A \cap B$ tiver medida nula, então f é integrável em $A \cup B$ e*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Integrabilidade de Funções a Valores Vetoriais

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ limitado e $f : A \to \mathbb{R}^k$ com componentes $f_1, \ldots, f_k : A \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é integrável se cada uma das suas componentes o for; caso afirmativo, a integral de f em A é o vetor de $\mathbb{R}^k$ dado por

$$\int_A f := \left(\int_A f_1, \ldots, \int_A f_k\right).$$

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (revisão)

Definição (Diferenciabilidade no Sentido de Fréchet)

Sejam f uma função real definida num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Diz-se que f é *derivável (no sentido de Fréchet)* em (x_0, y_0) se existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \overbrace{[a(x-x_0) + b(y-y_0)]}^{=T\cdot(x-x_0,y-y_0)}}{\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}_{=\|(x-x_0,y-y_0)\|}} = 0.$$

Caso afirmativo, $a, b \in \mathbb{R}$ são únicos, f admite derivadas direcionais em (x_0, y_0) com respeito a todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\partial_v f(x_0, y_0) = av_1 + bv_2$. Em particular,

$$a = \partial_x f(x_0, y_0), \quad b = \partial_y f(x_0, y_0).$$

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (revisão)

Definição (Diferenciabilidade no Sentido de Fréchet (bis))

Sejam f uma função real definida num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Diz-se que f é *derivável (no sentido de Fréchet)* em (x_0, y_0) se existir $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - T \cdot (x - x_0, y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

Caso afirmativo,

- T é única e $(\forall v \in \mathbb{R}^2)\, \exists \partial_v f(x_0, y_0) = T \cdot v$. Em particular,

$$[T]_c = \begin{bmatrix} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

- Chamamos T de *derivada de Fréchet* de f em (x_0, y_0). Notação: $\mathrm{D}f(x_0, y_0)$ ou $f'(x_0, y_0)$.

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definição (Diferenciabilidade no Sentido de Fréchet)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in \mathcal{U}$. Diz-se que f é *derivável (no sentido de Fréchet)* em x_0 se existir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Proposição

Com a notação acima, se f for derivável em $x_0 \in \mathcal{U}$, então existe a derivada direcional de f em x_0 com respeito a todo $v \in \mathbb{R}^n$, a qual é dada por

$$\partial_v f(x_0) = T \cdot v.$$

Em particular, T é única, e sua matriz na base canônica é dada por

$$[T]_c = \begin{bmatrix} \partial_1 f(x_0) & \partial_2 f(x_0) & \cdots & \partial_n f(x_0) \end{bmatrix}$$

i.e a matrix $m \times n$ cuja i-ésima coluna é a derivada parcial de f em x_0 com respeito a i-ésima coordenada.

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definição (Derivada de Fréchet)

Com a notação acima, se f for derivável em x_0:

- a transformação linear T chama-se *derivada de Fréchet* de f em x_0, denotada por $\mathrm{D}f(x_0)$ ou $f'(x_0)$;
- a matriz da derivada na base canônica, $[\mathrm{D}f(x_0)]$, chama-se *matriz Jacobiana* de f em x_0;
- a função linear afim $P_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

  $$P_1(h) := f(x_0) + \mathrm{D}f(x_0) \cdot h$$

  chama-se *polinômio de Taylor de ordem 1* de f centrado em x_0.

Diferenciabilidade de Funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definição (Jacobiano)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ derivável em x_0. O determinante da matriz $[\mathrm{D}f(x_0)]$ chama-se *jacobiano* de f em x_0, denotado por $\mathrm{J}f(x_0)$.

Se f tiver componentes $f_1, \ldots, f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, também é usual denotar $\mathrm{J}f(x_0) = \det[\mathrm{D}f(x_0)]$ por

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x_0).$$

Exemplos

Exemplo

- Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ for uma função constante, então f é derivável em todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{D}f(x_0)$ é a transformação linear nula $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
- Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ for uma transformação linear, então f é derivável em todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{D}f(x_0) = f$.

Propriedades da Derivada de Fréchet

Proposição

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ deriváveis em $x_0 \in \mathcal{U}$. Então:

- *f é contínua em x_0.*
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *$\alpha f + \beta g$ é derivável em x_0 e* $\mathrm{D}(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha \mathrm{D}f(x_0) + \beta \mathrm{D}g(x_0)$.

Proposição

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1. Então f é derivável em todo $x_0 \in U$.

Propriedades da Derivada de Fréchet

Exemplo (coordenadas polares)

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por, para todo $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(r, \theta) := (r \cos\theta, r \sin\theta).$$

Então $\varphi \in \mathrm{C}^1$, logo é derivável em todo $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ e

$$[\mathrm{D}\varphi(r, \theta)] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\mathrm{J}\varphi(r, \theta) = r$.

Regra da Cadeia para a Derivada de Fréchet

Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *aberto,* $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ *aberto,* $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ *derivável em* $x_0 \in \mathcal{U}$*,* $\operatorname{Im} g \subset V$ *e* $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^k$ *derivável em* $g(x_0)$*.*
Então $f \circ g$ *é derivável em* x_0 *e*
$\mathrm{D}(f \circ g)(x_0) = \mathrm{D}f\big(g(x_0)\big) \circ \mathrm{D}g(x_0)$*.*
Em particular,

$$\big[\mathrm{D}(f \circ g)(x_0)\big] = \big[\mathrm{D}f\big(g(x_0)\big)\big]\big[\mathrm{D}g(x_0)\big].$$

Alguma Intuição Geométrica para o TMV

- Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 injetiva, $R \subset \mathcal{U}$ e $S = \varphi(R) \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que tanto R como S sejam limitados com fronteiras de medida nula e que $f : S \to \mathbb{R}$ seja contínua.
- Queremos calcular a integral $\int_S f(x, y)\,\mathrm{d}A(x, y)$ fazendo-se a mudança de variáveis $(x, y) = \varphi(u, v)$, imitando o TMV para a integral de Riemann na reta.
- Ou seja, queremos escrever uma igualdade da forma

$$\int_S f(x, y)\,\mathrm{d}A(x, y) = \int_R f\big(\varphi(u, v)\big)\,\mathrm{d}(...)$$

  onde "$\mathrm{d}(...)$" é aquilo em que se transforma o "elemento de área" $\mathrm{d}A(x, y)$ ao fazer a referida mudança de variáveis.

Alguma Intuição Geométrica para o TMV

- Para simplificar, suponha que R seja um retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Seja P uma partição de R e $\{P_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$ os retângulos de P. Tome $\xi = \{\xi_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$ pontilhamento de P.
- Para $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$, seja $Q_{i,j} := \varphi(P_{i,j})$. Se $|P|$ for suficientemente pequena, é intuitivo que $\int_S f \,\mathrm{d}A$ seja aproximada pela soma

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f \circ \varphi(\xi_{i,j}) m(Q_{i,j}),$$

  onde $m(Q_{i,j})$ denota a área de $Q_{i,j}$.
- Aproximando φ numa vizinhança de $\xi_{i,j}$ pelo seu polinômio de Taylor de ordem 1 centrado em $\xi_{i,j}$, $Q_{i,j} = \varphi(P_{i,j})$ fica aproximado por $\varphi(\xi_{i,j}) + \mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j}) \cdot [P_{i,j} - \xi_{i,j}]$, o qual é congruente a $\mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j}) \cdot P_{i,j}$.

Alguma Intuição Geométrica para o TMV

- Como $\mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear, $\mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j}) \cdot P_{i,j}$ é um paralelogramo cuja área é

$$|\det \mathrm{D}\varphi(\xi_{i,j})| m(P_{i,j}) = |\mathrm{J}\varphi(\xi_{i,j})| m(P_{i,j}).$$

- Portanto, $\int_S f \, \mathrm{d}A$ fica aproximada por

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f \circ \varphi(\xi_{i,j}) |\mathrm{J}\varphi(\xi_{i,j})| m(P_{i,j}),$$

  a qual é a soma de Riemann relativamente a (P, ξ) da função $f \circ \varphi \, |\mathrm{J}\varphi|$.

- Fazendo-se $|P| \to 0$, é intuitivo esperar, pois,

$$\int_S f \, \mathrm{d}A = \int_R f \circ \varphi \, |\mathrm{J}\varphi| \, \mathrm{d}A.$$

Teorema de Mudança de Variáveis

Teorema (TMV)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 injetiva, $R \subset \mathcal{U}$ e $S = \varphi(R) \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que tanto R como S sejam limitados com fronteiras de medida nula e que $f : S \to \mathbb{R}$ seja contínua. Então

$$\int_S f(x,y)\,\mathrm{d}A(x,y) = \int_R f\big(\varphi(u,v)\big)\,|\mathrm{J}\varphi(u,v)|\,\mathrm{d}A(u,v).$$

Observação

A hipótese de que f seja contínua pode ser relaxada: basta que $f : S \to \mathbb{R}$ e $f \circ \varphi : R \to \mathbb{R}$ sejam ambas integráveis.

Teorema de Mudança de Variáveis

Exemplo (coordenadas polares)

Sejam $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto tal que $\varphi|_{\mathcal{U}}$ seja injetiva. Suponha que $R \subset \mathcal{U}$ e $S = \varphi(R)$ sejam ambos limitados com fronteiras com medida nula, e que $f : S \to \mathbb{R}$ seja contínua. Então

$$\int_S f(x, y)\, \mathrm{d}A(x, y) = \int_R f(r \cos \theta, r \sin \theta)\, r\, \mathrm{d}A(r, \theta).$$

Integrais Triplas

Definição (Paralelepípedos)

Um *paralelepípedo* ou *itervalo tridimensional* é um produto $I_1 \times I_2 \times I_3$, onde $I_1, I_2, I_3 \subset \mathbb{R}$ são intervalos.

Definição (Partições e Pontilhamentos)

Seja $R = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset \mathbb{R}^3$ um paralelepípedo compacto.

- Uma *partição* de R é um produto $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ onde P_j é uma partição de I_j para $1 \leq j \leq 3$.
- Um *pontilhamento* da partição $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ é um produto $\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times \xi_3$ onde ξ_j é pontilhamento de P_j para $1 \leq j \leq 3$.

Partições e Pontilhamentos (cont.)

Definição (Partições e Pontilhamentos)

- Os *paralelepípedos* ou *subintervalos* da partição P são os produtos da forma $J_1 \times J_2 \times J_3$, onde J_k é um intervalo da partição P_k, para $1 \leq k \leq 3$.
- Denotamos por $\mathcal{S}(P)$ o conjunto dos subintervalos da partição P. Dado ξ pontilhamento de P, para cada $Q \in \mathcal{S}(P)$ existe um único elemento de ξ que pertence a Q, o qual denotaremos por ξ_Q.
- A *norma* da partição P é $|P| := \max\{|P_1|, |P_2|, |P_3|\}$.

Definição (Integrabilidade no sentido de Riemann)

Sejam $R \subset \mathbb{R}^3$ um paralelepípedo compacto e $f : R \to \mathbb{R}$.

- Dados P partição de R e ξ pontilhamento de P, a *soma de Riemann* de f com respeito a (P, ξ) é

$$S(f, P, \xi) := \sum_{Q \in \mathcal{S}(P)} f(\xi_Q)\, m(Q),$$

  onde $m(Q)$ denota o volume do paralelepípedo Q.
- f diz-se *Riemann-integrável* se existir o limite das somas de Riemann de f, i.e. se a seguinte condição for satisfeita:

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partição de } R \text{ com } |P| < \delta,$$
$$\forall \xi \text{ pontilhamento de } P, \quad \left| S(f, P, \xi) - \ell \right| < \epsilon.$$

  Caso afirmativo, diz-se que ℓ é limite das somas de Riemann de f.

Proposição

O limite das somas de Riemann de $f : R \to \mathbb{R}$, caso exista, é único.

Definição (Integral de Riemann)

Se $f : R \to \mathbb{R}$ for Riemann-integrável, chamamos o limite das suas somas de Riemann de *integral de Riemann* de f.

Notação

- $\iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}V(x,y,z)$ ou $\iiint_R f\,\mathrm{d}V$ ou $\iiint_R f$;
- $\int_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}V(x,y,z)$ ou $\int_R f\,\mathrm{d}V$ ou $\int_R f$.

Observação

- Também podemos definir as integrais triplas usando somas superiores e somas inferiores.
- Valem as mesmas propriedades enunciadas para integrais duplas.

Teorema de Fubini

Teorema (Fubini)

Sejam $R = \prod_{i=1}^{3}[a_i, b_i]$ um paralelepípedo compacto e $f : R \to \mathbb{R}$ integrável. Denotemos por Q o retângulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Então

$$\int_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}V(x,y,z) = \int_Q \Big[\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big]\,\mathrm{d}A(x,y) = \\ = \int_{a_3}^{b_3} \Big[\int_Q f(x,y,z)\,\mathrm{d}A(x,y)\Big]\,\mathrm{d}z,$$

desde que as integrais iteradas existam.
Valem afirmações análogas para as integrais iteradas obtidas trocando-se o papel das variáveis x, y, z.

Conjuntos de Medida Nula

Definição (Conjuntos de Medida Nula)

Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^3$ é um *conjunto de medida nula* se, para todo $\epsilon > 0$, existir uma coleção enumerável de paralelepípedos $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $A \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) < \epsilon$, onde $m(Q_i)$ denota o volume do paralelepípedo Q_i.

Observação

- É equivalente, na definição acima, usar bolas no lugar de paralelepípedos.
- Conjuntos de *conteúdo* nulo: mesma definição com “finita” no lugar de “enumerável”.

Condição Necessária e Suficiente para Integrabilidade

Teorema (critério de Lebesgue)

Sejam $R \subset \mathbb{R}^3$ um retângulo compacto e $f : R \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é integrável se, e somente se, o conjunto $D_f \subset R$ dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula.

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Medida Nula

1. Conjuntos enumeráveis têm medida nula.
2. A união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
3. Um subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula.
4. A imagem de um conjunto de medida nula por movimentos rígidos é um conjunto de medida nula.
5. Planos têm medida nula.
6. O gráfico de uma função contínua $[a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ tem medida nula.
7. Se $k < 3$, imagens de aplicações $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^3$ classe C^1 têm medida nula.

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Medida Nula

Interpretação Geométrica

Um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tem medida nula se, intuitivamente, for um conjunto de "volume" nulo.

Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados

Notação

Seja f uma função definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^3$. Denotamos por $\widetilde{f}$ a extensão por 0 de f, i.e. a função $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\widetilde{f}(x) = f(x)$ se $x \in A$ e 0 caso contrário.

Definição (Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados)

Sejam $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado e $f : A \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é integrável em A se $\widetilde{f}$ for integrável em algum paralelepípedo compacto Q que contenha A. Caso afirmativo, definimos

$$\int_A f := \int_Q \widetilde{f}.$$

Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados

Observação

- Em vista do critério de Lebesgue, f limitada é integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade da extensão $\widetilde{f}$ tiver medida nula.
- Em particular, se $f : A \to \mathbb{R}$ for limitada, ∂A tiver medida nula e o conjunto D_f dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula, então f é integrável.

Interpretação Geométrica

Interpretação Geométrica

Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ limitado com fronteira de medida nula.

- $\int_A 1 \, \mathrm{d}V$ é o *volume* de A.
- Se $f : A \to \mathbb{R}$ for ≥ 0 e integrável, podemos interpretar $\int_A f \, \mathrm{d}V$, por exemplo, como a massa de um objeto que ocupa a região A do espaço tridimensional com densidade dada por f.

Exemplos

Exemplo

Sejam $Q \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo compacto, $g, h : Q \to \mathbb{R}$ contínuas com $g \leq h$ e
$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$. Então A é limitado e ∂A tem medida nula. Tomando $R = Q \times [a, b]$ contendo A, se $f : A \to \mathbb{R}$ for descontínua num conjunto enumerável, então f é Riemann integrável e

$$\int_A f = \int_R \widetilde{f} \overset{Fubini}{=} \int_Q \int_c^d \widetilde{f}(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}A(x, y) =$$
$$= \int_Q \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}A(x, y).$$

Exemplos

Exemplo

Mesmo exemplo anterior, substituindo-se o retângulo compacto por $Q = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, onde $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com $\alpha \leq \beta$. Obtém-se:

$$\int_A f = \int_Q \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}A(x, y) =$$

$$= \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Teorema de Mudança de Variáveis

Teorema (TMV)

Sejam $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^3$ *aberto,* $\varphi : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^3$ *de classe* C^1 *injetiva,* $R \subset \mathfrak{U}$ *e* $S = \varphi(R) \subset \mathbb{R}^3$*. Suponha que tanto* R *como* S *sejam limitados com fronteiras de medida nula e que* $f : S \to \mathbb{R}$ *seja contínua. Então*

$$\int_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}V(x,y,z) = \int_R f\big(\varphi(u,v,w)\big)\,|\mathrm{J}\varphi(u,v,w)|\,\mathrm{d}V(u,v,w).$$

Observação

A hipótese de que f seja contínua pode ser relaxada: basta que $f : S \to \mathbb{R}$ e $f \circ \varphi : R \to \mathbb{R}$ sejam ambas integráveis.

Centro de Massa de um Sistema de Pontos Materiais

Consideremos um sistema de N pontos materiais no espaço tridimensional, o qual modelaremos por uma N-upla de pontos $(q_i)_{1\leq i\leq N}$ em $\mathbb{R}^3$, e por uma N-upla $(m_i)_{1\leq i\leq N}$, onde $m_i > 0$ é a massa do i-ésimo ponto.

Definição

O *centro de massa* do sistema $\{q_1, \ldots, q_N\}$ é dado por

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i q_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

Operador de Inércia de um Sistema de Pontos Materiais

Definição

Para cada ponto $x \in \mathbb{R}^3$, definimos o operador linear $\mathcal{I}_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por, para todo $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{I}_x \cdot v := \sum_{i=1}^{N} m_i \big[(q_i - x) \times \big(v \times (q_i - x)\big)\big].$$

Chamamos $\mathcal{I}_x$ de *operador de inércia relativo a x* do sistema $\{q_1, \ldots, q_N\}$. Para $x = 0$, usaremos a notação $\mathcal{I}$ no lugar de $\mathcal{I}_0$.

Operador de Inércia de um Sistema de Pontos Materiais

Exercício

Para todos $u, v, w \in \mathbb{R}^3$*,* $\langle u \times v, w\rangle = \langle u, v \times w\rangle$*.*

Dica

$\langle u \times v, w\rangle = \det[u, v, w]$, i.e. o determinante da matriz cujas colunas são as matrizes de u, v, w na base canônica.

Fisicamente, se $v \in \mathbb{R}^3$ for unitário, interpretamos $\langle \mathcal{I}_x \cdot v, v\rangle$ como sendo o momento de inércia do sistema relativamente ao eixo que passa por x na direção dada por v.
Com efeito, para $1 \leq i \leq N$,
$\langle v, (q_i - x) \times \big(v \times (q_i - x)\big)\rangle = \|v \times (q_i - x)\|^2$ (cf. exercício acima) é o quadrado da distância de q_i ao referido eixo.

Operador de Inércia de um Sistema de Pontos Materiais

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{R}^3$, o operador de inércia $\mathfrak{I}_x$ é auto-adjunto (com respeito ao produto interno usual do $\mathbb{R}^3$) e positivo semidefinido. Além disso, se ao menos dois dos vetores $q_i - x$, $1 \leq i \leq N$, forem linearmente independentes, então $\mathfrak{I}_x$ é positivo definido.

Distribuições de Massa Contínuas

Substituiremos agora o sistema de N pontos materiais por uma distribuição de massa "contínua", i.e. dada por uma densidade $\rho\,\mathrm{d}V$ em $\mathbb{R}^3$, onde $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínua e não negativa. Considere um conjunto limitado $Q \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira de medida nula. Definiremos as mesmas noções introduzidas para sistemas de pontos materiais, substituindo-se os somatórios por integrais.

Definição (massa e centro de massa)

Definimos:

- a *massa* de Q por $m(Q) := \int_Q \rho\,\mathrm{d}V$;
- o *centro de massa* de Q por

$$G := \frac{\int_Q (x,y,z)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V(x,y,z)}{m(Q)} \in \mathbb{R}^3.$$

Distribuições de Massa Contínuas

Definição (operador de inércia)

Para cada ponto $y \in \mathbb{R}^3$, definimos o operador linear $\mathcal{I}_y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por, para todo $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{I}_y \cdot v := \int_Q (x - y) \times (v \times (x - y))\rho(x)\,\mathrm{d}V(x).$$

Chamamos $\mathcal{I}_y$ de *operador de inércia relativo a y* do corpo Q. Para $y = 0$, usaremos a notação $\mathcal{I}$ no lugar de $\mathcal{I}_0$.

Como no caso de distribuição de massa discreta, se $v \in \mathbb{R}^3$ for unitário, interpretamos $\langle \mathcal{I}_y \cdot v, v\rangle$ como sendo o momento de inércia do sistema relativamente ao eixo que passa por y na direção dada por v.

Operador de Inércia

Proposição

Com a notação acima, o operador de inércia $\mathcal{I}_y$ *é auto-adjunto e positivo semidefinido. Além disso, se existir um aberto* $\mathcal{U} \subset Q$ *tal que* $\rho > 0$ *em* $\mathcal{U}$*, então* $\mathcal{I}_y$ *é positivo definido.*

Em particular, existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $\mathcal{I}_y$, e os seus autovalores são todos ≥ 0 (estritamente, no caso em que $\mathcal{I}_y$ for positivo definido).

Definição (momentos e direções principais de inércia)

Com a notação acima, os autovalores e autovetores de $\mathcal{I}_y$ são chamados, respectivamente, *momentos principais* e *direções principais* de inércia do corpo Q, relativamente a y.