ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 Mecânica 1
Dinâmica do Ponto
Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo

Conteúdo

Dinâmica do Ponto

Simbologia

Formulário

Leis de Newton

Definições:
- Quantidade de movimento de um ponto material
- Quantidade de movimento angular de um ponto material
- Energia Cinética de um ponto material
- Trabalho de uma força sobre um ponto material
- Impulso de uma força sobre um ponto material

Segunda Lei de Newton & Teoremas da Dinâmica:
- Segunda Lei de Newton – Lei Fundamental da Dinâmica
- Teorema da Variação da Quantidade de Movimento (ou Teorema do Impulso)
- Teorema da Quantidade de Movimento Angular
- Teorema da Variação da Energia Cinética (ou Teorema do Trabalho)
  - Forças Conservativas ➔ Integral da Energia

Simbologia – Dinâmica do Ponto

$\vec{F}$ $\quad Força$

$\vec{M}_O$ $\quad Momento\ de\ uma\ força\ em\ relação\ ao\ pólo\ O$

$\vec{Q}$ $\quad Quantidade\ de\ Movimento$

$\vec{H}_O$ $\quad Quantidade\ de\ Movimento\ Angular\ em\ relação\ ao\ pólo\ O$

T $\quad Energia\ Cinética$

τ $\quad Trabalho\ de\ uma\ força\ durante\ um\ intervalo\ de\ tempo$

$\vec{I}$ $\quad Impulso\ de\ uma\ força\ durante\ um\ intervalo\ de\ tempo$

V $\quad Função\ Energia\ Potencial\ de\ uma\ força\ conservativa$

Simbologia – Cinemática do ponto

$t \quad tempo$

$s \quad distância\ percorrida, arco\ sobre\ a\ trajetória$

$v \quad velocidade\ escalar$

$a \quad aceleração\ escalar$

$\vec{r} = (P - 0)\ vetor\ posição$

$\vec{v} \quad vetor\ velocidade$

$\vec{a} \quad vetor\ aceleração$

$\vec{t} \quad versor\ tangente$

$\vec{n} \quad versor\ normal$

$\vec{b} \quad versor\ binormal$

$\vec{a}_t \quad vetor\ aceleração\ tangencial$

$\vec{a}_n \quad vetor\ aceleração\ normal$

$\rho \quad raio\ de\ curvatura\ da\ trajetória \quad (c = {}^{1}/_{\rho}\ \text{é}\ a\ curvatura)$

${}^{1}/_{\gamma} \quad raio\ de\ torção\ da\ trajetória \quad (\gamma\ \text{é}\ a\ torção\ da\ trajetória)$

$\vec{\tau} \quad versor\ transversal\ (coordenadas\ polares\ ou\ cilíndricas)$

$\vec{u} \quad versor\ radial\ (coordenadas\ polares\ ou\ cilíndricas)$

Formulário – Dinâmica do Ponto

$$\boxed{\vec{Q} = m\vec{v}}$$

$$\boxed{\vec{H}_O = (P - O) \wedge m\vec{v}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2}$$

$$\boxed{\tau = \int_{t_o}^{t} \vec{F} \cdot \vec{v}dt}$$

ou

$$\boxed{\tau = \int_{P_o}^{P} \vec{F} \cdot dP}$$

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_o}^{t} \vec{F}dt}$$

$$\boxed{\dot{\vec{Q}} = m\vec{a} = \vec{F}}$$

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_O \wedge \vec{v} + \vec{M}_O}$$

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O}$$ p/ O fixo.

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{Q}}$$

$$\boxed{\tau = \Delta T}$$

$$\boxed{T_B + V_B = T_A + V_A}$$

$$\boxed{\Delta V = mg\Delta z}$$ Força peso

$$\boxed{\Delta V = \frac{k}{2}(x^2 - x_0^2)}$$ Força de mola

Leis da Física

As leis da física descrevem os fenômenos físicos observados na natureza.
São formuladas pelo intelecto humano a partir da observação dos fatos.
Não são passíveis de dedução analítica.
Suas validades são avaliadas experimentalmente.

Leis de Newton

1. **Lei da Inércia**: Na ausência de resultante de forças sobre um ponto material este permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial.

2. **Lei Fundamental da Dinâmica**: A taxa de variação da quantidade de movimento de um ponto material em relação a um referencial inercial é diretamente proporcional à resultante das forças atuante sobre ele, sendo que a constante de proporcionalidade é a massa do ponto.

3. **Lei de Ação e Reação**: A toda ação de um ponto material sobre outro corresponderá outra, de mesma intensidade e linha de ação, com sentido oposto.

Isaac Newton, 1687.

Quantidade de Movimento de um ponto material

Seja um ponto material P de massa m e velocidade $\vec{v}$.
Define-se a quantidade de movimento ("momentum") do ponto por:

$$\boxed{\vec{Q} = m\vec{v}}$$

Obs: a quantidade de movimento é dita também por quantidade de movimento linear.

Quantidade de Movimento Angular de um ponto material em relação a um pólo "O"

Seja um ponto material P de massa m e velocidade $\vec{v}$.
Define-se a quantidade de movimento angular do ponto P em relação ao pólo O por:

$$\boxed{\vec{H}_O = (P - O) \wedge m\vec{v}}$$

Energia Cinética de um ponto material

Seja um ponto material P de massa m e velocidade $\vec{v}$.
Define-se a energia cinética do ponto do ponto por:

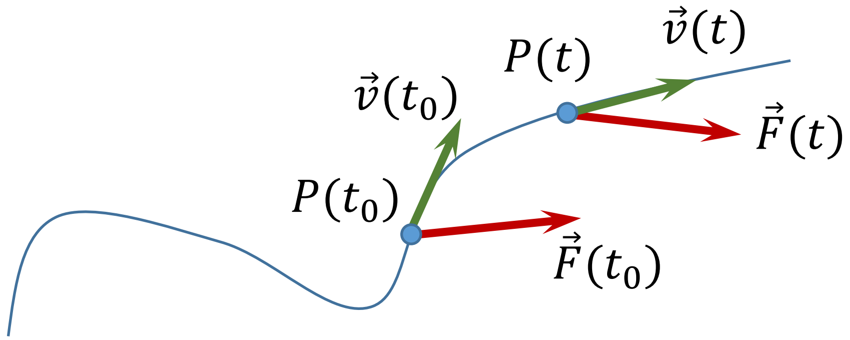
$$T = \frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v} \Rightarrow \qquad \boxed{T = \frac{1}{2} m v^2}$$

Trabalho de uma Força sobre um ponto material

Seja um ponto material P de massa m e velocidade $\vec{v}$ sobre o qual é aplicada uma força $\vec{F}$.
Define-se trabalho da força sobre o ponto entre dois instantes ou entre duas posições da trajetória do ponto por:

$$\boxed{\tau = \int_{t_o}^{t} \vec{F} \cdot \vec{v} dt} \quad \text{ou} \quad \boxed{\tau = \int_{P_o}^{P} \vec{F} \cdot dP}$$

$$\vec{v} = \frac{dP}{dt} \Rightarrow dP = \vec{v} dt$$



Impulso de uma Força sobre um ponto material

Seja um ponto material P de massa m sobre o qual é aplicada uma força $\vec{F}$.
Define-se impulso da força sobre o ponto entre dois instantes por:

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_o}^{t} \vec{F} dt}$$

2ª Lei de Newton: Lei Fundamental da Dinâmica

<u>Lei Fundamental da Dinâmica</u>: A taxa de variação da quantidade de movimento de um ponto material em relação a um referencial inercial é diretamente proporcional à resultante das forças atuante sobre ele, sendo que a constante de proporcionalidade é a massa do ponto.

$$\boxed{\dot{\vec{Q}} = \vec{F}}$$

Sendo a quantidade de movimento: $\vec{Q} = m\vec{v}$

$$\dot{\vec{Q}} = m\dot{\vec{v}} + \dot{m}\vec{v} = \vec{F}$$

Admitindo a massa constante ao longo do tempo:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

<u>Referencial</u> é onde se encontra o observador que está descrevendo a cinemática do movimento.
As Lei de Newton não são válidas em todos os referenciais, mas apenas naqueles ditos <u>referenciais inerciais</u>.
Caso o observador esteja "enxergando" aceleração para o ponto ele deve ser capaz de identificar um agente de <u>força real</u> atuando sobre o ponto que seja de origem gravitacional ou de origem eletromagnética ou de contato entre dois corpos.
Caso o observador "enxergue" aceleração mas não consiga identificar uma resultante de força real atuando então pode-se concluir que o observador está em um <u>referencial não-inercial</u>.

Teorema da Variação da Quantidade de Movimento ou Teorema do Impulso

" A variação da quantidade de movimento de um ponto em um intervalo de tempo é igual ao impulso da resultante de forças sobre o ponto durante este mesmo intervalo."

Da definição de quantidade de movimento: $\vec{Q} = m\vec{v}$

Derivando em relação ao tempo, admitindo a massa constante: $\dot{\vec{Q}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow d\vec{Q} = \vec{F}dt$$

Integrando: $$\int_{\vec{Q}_0}^{\vec{Q}} d\vec{Q} = \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$$

$$\boxed{\Delta\vec{Q} = \vec{I}}$$

Teorema é uma proposição que é admitida ou se torna evidente a partir de uma demonstração.
Os teoremas da dinâmica partem de uma definição de uma grandeza e em seguida utilizam a 2ª Lei de Newton, que por isso é então chamada "Lei Fundamental da Dinâmica", justamente por dar origem a todos os teoremas da dinâmica.

Teorema da Quantidade de Movimento Angular

" A taxa de variação da quantidade de movimento angular de um ponto material em relação a um pólo fixo é igual ao momento da resultante de forças sobre o ponto calculado em relação ao mesmo pólo."

Da definição de quantidade de movimento angular em relação a um pólo O: $\vec{H}_O = (P - O) \wedge m\vec{v}$

Derivando em relação ao tempo, admitindo a massa constante:

$$\dot{\vec{H}}_O = (\vec{v}_P - \vec{v}_O) \wedge m\vec{v}_P + (P - O) \wedge m\dot{\vec{v}}_P$$

$$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_P \wedge \vec{v}_O + (P - O) \wedge m\vec{a}_P$$

$$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_P \wedge \vec{v}_O + (P - O) \wedge \vec{F} = m\vec{v}_P \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O$$

Tomando um pólo O fixo (ou também no caso particular em que $\vec{v}_O \parallel \vec{v}$):

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O}$$

Teorema da Energia Cinética (ou Teorema do Trabalho)

" A variação da energia cinética de um ponto material entre dois instantes ou duas posições sucessivas de sua trajetória é igual ao trabalho realizado pela resultante de forças sobre o ponto durante este mesmo intervalo de tempo ou estas duas posições sucessivas da trajetória."

Da definição de energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Derivando em relação ao tempo, admitindo a massa constante:

$$\dot{T} = m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{dT}{dt} = m\vec{a} \cdot \vec{v} \Rightarrow dT = m\vec{a} \cdot \vec{v}\mathrm{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}\mathrm{dt}$$

Integrando:

$$\int_{T_0}^{T} dT = T - T_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

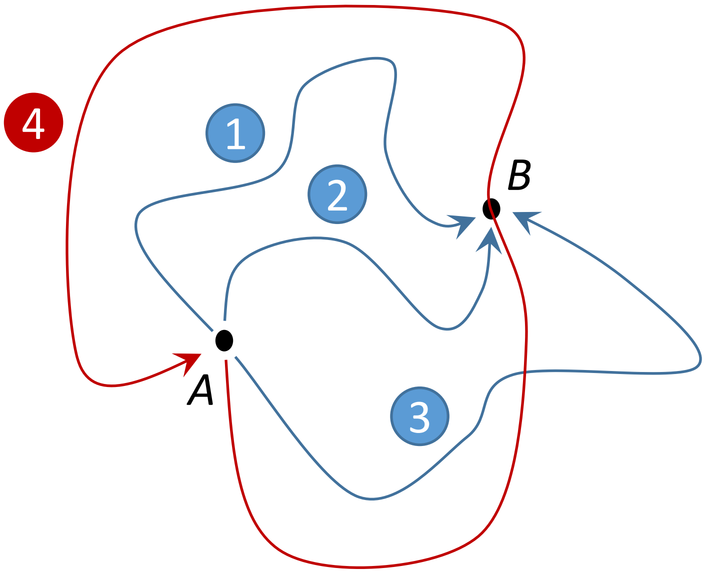
$$\boxed{\Delta T = \tau}$$

Forças Conservativas – Energia Potencial - Integral da Energia

Definição de Forças Conservativas:

São aquelas cujo trabalho não depende da trajetória do ponto mas apenas das posições iniciais e finais.
São aquelas que realizam trabalho nulo para uma trajetória do ponto em percurso fechado.

Considere as 4 trajetórias mostradas para um Ponto *P*.
As trajetórias 1, 2 e 3 partem da posição *A* e chegam à posição *B*.
A trajetória 4 parte da posição *A* e retorna a esta mesma posição.



Forças conservativas são aquelas em que:

$$\boxed{\tau_1 = \tau_2 = \tau_3}$$

$$\boxed{\tau_4 = 0}$$

Forças Conservativas – Energia Potencial - Integral da Energia

O Teorema da Energia Cinética nos diz que o trabalho realizado é igual à variação da energia cinética.

Sendo a força conservativa ela tem trabalho nulo num percurso fechado. Assim, ao retornar à posição de partida ela deverá ter a mesma energia cinética.

O ponto vai variando a sua energia cinética ao longo do percurso mas ao ir retornando à posição inicial ele vai recuperando a sua energia cinética inicial.

Esta pode ter aumentado e diminuído diversas vezes ao longo da trajetória mas o importante é que ao retornar à posição inicial o ponto retorna ao valor de energia cinética inicial.

Podemos imaginar então um “recipiente auxiliar” que vai armazenando a energia cinética, devolvendo-a ao ponto conforme ele vai retornando à posição inicial.

A esta quantidade de energia armazenada neste “recipiente” damos o nome de **Energia Potencial (*V*)**, ela representa uma “capacidade armazenada” de realizar trabalho:

- Ela iguala a variação da energia cinética.
- Ela é função apenas da posição do ponto.
- A função energia potencial é igual ao trabalho realizado sobre o ponto com sinal invertido.

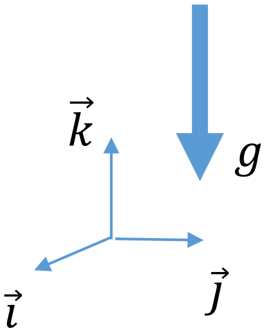
Trabalho positivo faz a energia cinética aumentar e a energia potencial diminuir da mesma quantidade.
Trabalho negativo faz a energia cinética diminuir e a energia potencial aumentar da mesma quantidade.

$$\boxed{\Delta T = \tau = -\Delta V} \qquad T_B - T_A = -(V_B - V_A) \qquad \boxed{T_B + V_B = T_A + V_A}$$ **Integral da Energia**

Força Conservativa Peso – Energia Potencial da Força Peso

Seja um ponto material P de massa m submetido a um campo gravitacional.
A força peso é dada por:

$$\vec{F} = -mg\vec{k}$$

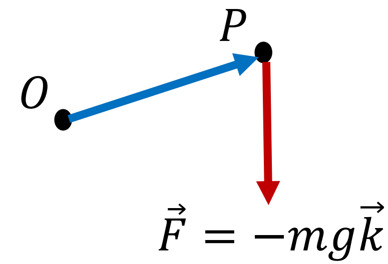


A diferencial do vetor posição é dada por:

$$(P-O) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad dP = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

A diferencial do trabalho é dada por:

$$d\tau = \vec{F} \cdot dP = -mgdz$$

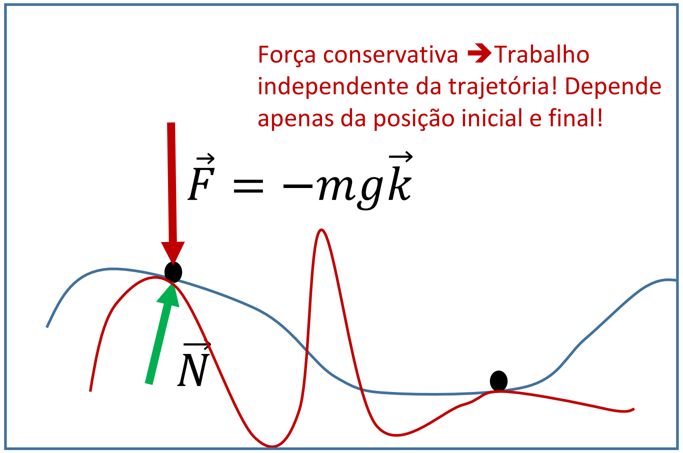


Integrando, resulta no trabalho do peso de P sobre ele, dado por:

$$\int d\tau = \int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot dP = \int_{z_0}^{z} -mgdz$$

$$\tau = -mg[z(t) - z(t_0)]$$

$$\boxed{\tau = -mg\Delta z}$$



Expressão da variação da energia potencial da força peso:

Força conservativa ➔Trabalho independente da trajetória! Depende apenas da posição inicial e final!

$$\boxed{\Delta V = mg\Delta z}$$

Força Conservativa de Mola – Energia Potencial da Força de Mola

Trabalho de uma força elástica de mola entre duas posições deformadas da mola, sendo L_0 o comprimento livre da mola:

Seja a força de mola elástica dada por:

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

A diferencial do vetor posição é dada por:

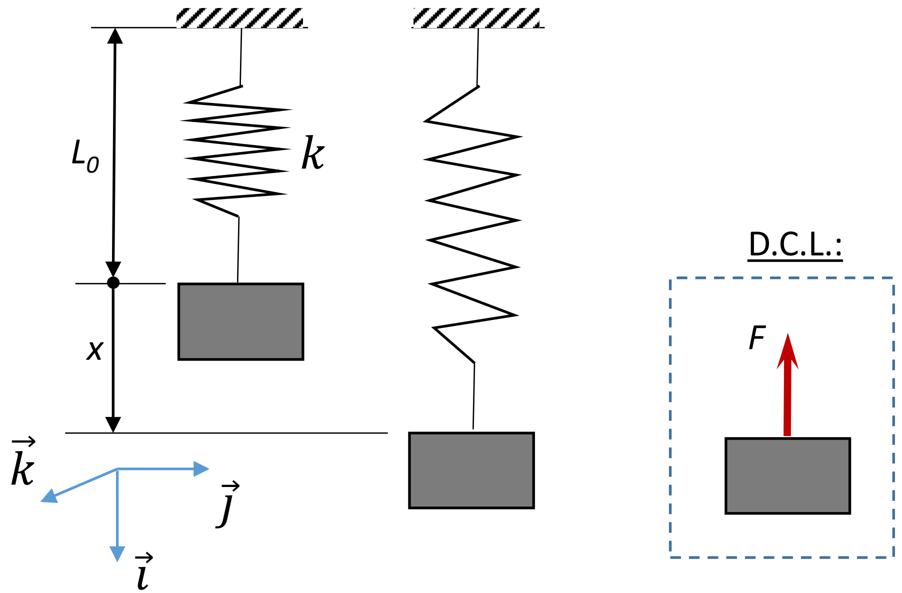
$$dP = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

A diferencial do trabalho é dada por:

$$d\tau = \vec{F} \cdot dP = -kxdx$$

Integrando:

$$\int d\tau = \int_{x_0}^{x} -kxdx$$



Trabalho da força de mola:

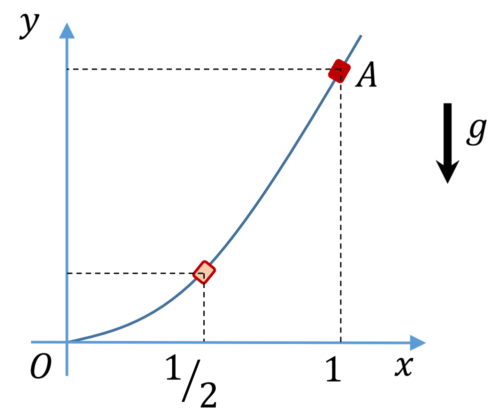
$$\boxed{\tau = -\frac{k}{2}(x^2 - x_0^2)}$$

Expressão da variação da energia potencial da força de mola:

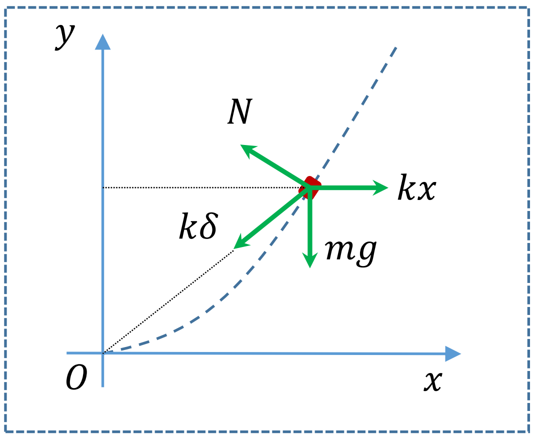
$$\boxed{\Delta V = \frac{k}{2}(x^2 - x_0^2)}$$

Exercício 01

Um anel A de massa m desliza sem atrito sobre uma guia parabólica ($y = x^2$) contida num plano vertical. O anel parte do repouso da coordenada $x_0 = 1$. O anel é repelido pelo eixo vertical e atraído pela origem com forças proporcionais à distância que os separa, sendo k o fator de proporcionalidade para ambas as forças.
Pede-se a velocidade do anel e a reação da guia sobre ele quando ele estiver na coordenada $x = 1/2$.



D.C.L.



A força de reação numa guia sem atrito está apenas na direção normal e assim não realiza trabalho.
As demais forças são conservativas.
Iremos resolver pelo TEC, mais especificamente pela Integral da Energia, para calcular a velocidade na posição final e em seguida aplicar a 2ª Lei de Newton para calcular a força de reação da guia, neste caso a força normal N.

$$dP = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$$

$$dP = dx\vec{\imath} + 2xdx\vec{\jmath}$$

$$\vec{F}_1 = k(O - A) = k(-x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}) = k(-x\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath})$$

$$d\tau_1 = \vec{F}_1 . dP = k(-x\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath}).(dx\vec{\imath} + 2xdx\vec{\jmath}) = -kxdx - 2kx^3dx \Rightarrow \Delta V_1 = -\tau_1 = \int_{x_0}^{x} (kx + 2k\,x^3)dx$$

$$\Delta V_1 = \frac{k}{2}[(x^2 + x^4) - (x_0^2 + x_0^4)]$$

<u>Análise</u>:
Ao se aproximar da origem *ΔV* é negativo então *ΔT* aumenta ➔ *OK!*

Exercício 01 (continuação)

$$\vec{F}_2 = kx\vec{i}$$

$$d\tau_2 = \vec{F}_2 . dP = kx\vec{i}.(dx\vec{i} + 2dx\vec{j}) = kxdx \Rightarrow \Delta V_2 = -\tau_2 = -\int_{x_0}^{x} kxdx$$

$$\Delta V_2 = -\frac{k}{2}(x^2 - x_0^2)$$

Análise:
Ao se aproximar da origem ΔV é positivo então ΔT diminui ➔ *OK!*

Aplicando a Integral da Energia:

$$\boxed{T + V = T_0 + V_0}$$

$$\boxed{\Delta T = -\Delta V}$$

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = -\frac{k}{2}[(x^2 + x^4) - (x_0^2 + x_0^4)] + \frac{k}{2}(x^2 - x_0^2) + mg(y_0 - y)$$

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{k}{2}\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) - (1+1)\right] + \frac{k}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) + mg\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{32}k + \frac{3mg}{4}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{15k}{16m} + \frac{3g}{2}}}$$

Exercício 01 (continuação)

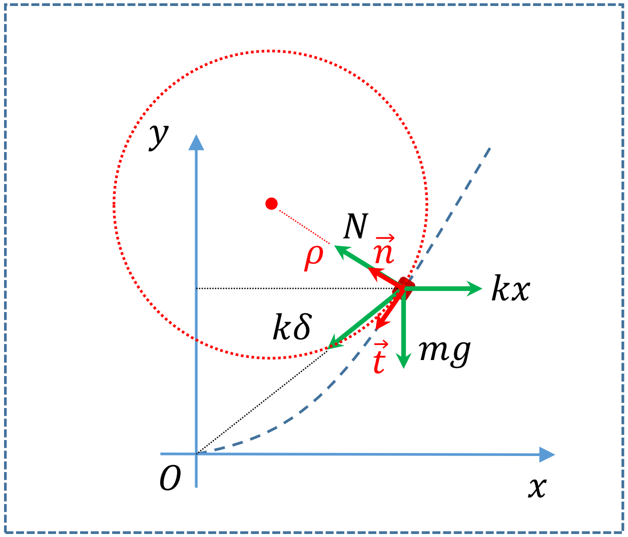
Aplicando a 2ª Lei de Newton:

$$m\vec{a} = \vec{R}$$

$$m\left(\dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + N\vec{n} - mg\vec{j}$$

$$\begin{cases} m\dot{v} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + N\vec{n} - mg\vec{j}).\vec{t} \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + N\vec{n} - mg\vec{j}).\vec{n} \end{cases}$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = [k(-x\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath}) + kx\vec{\imath} + N\vec{n} - mg\vec{\jmath}].\vec{n}$$



Precisamos calcular o versor normal e o raio de curvatura.

A derivada da equação parabólica da guia nos dará o coeficiente angular da reta tangente a ela:

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}} = 1$$

$$\theta(x = {}^1\!/_2) = \arctan(1) = 45^o$$

$$\Rightarrow\ \vec{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})\ \Rightarrow\ \boxed{\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})}$$

Raio de curvatura de uma curva plana dada em coordenadas retangulares.

Não deduzido aqui.

Vide W.A. Granville et alli “Elementos de Cálculo Diferencial e Integral” §105.

$$\boxed{\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow y'\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

$$\rho = \frac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{2} \Rightarrow \qquad \boxed{\rho = \sqrt{2}}$$

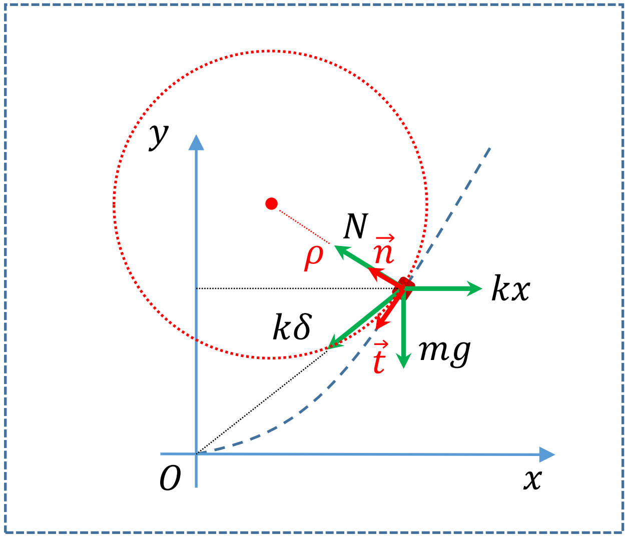
Exercício 01 (continuação)

$$\frac{mv^2}{\rho} = [k(-x\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath}) + kx\vec{\imath} + N\vec{n} - mg\vec{\jmath}].\vec{n}$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = N + [-kx^2\vec{\jmath} - mg\vec{\jmath}].\vec{n}$$

Com:

$$\boxed{\rho = \sqrt{2}} \quad \boxed{\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})} \quad \boxed{x = \frac{1}{2}} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{15k}{16m} + \frac{3g}{2}}}$$



Observação: a partir daqui a análise dimensional não faz mais sentido pois substituiremos valores literais por valores numéricos:

$$\frac{mv^2}{\sqrt{2}} = N + \left[-\frac{1}{4}k\vec{\jmath} - mg\vec{\jmath}\right].\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})\right)$$

$$\frac{mv^2}{\sqrt{2}} = N - \frac{\sqrt{2}}{8}k - \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

$$N = \frac{\sqrt{2}}{8}k + \frac{\sqrt{2}}{2}mg + \frac{\sqrt{2}}{2}mv^2 = \frac{\sqrt{2}}{8}k + \frac{\sqrt{2}}{2}mg + \frac{15\sqrt{2}}{32}k + \frac{3\sqrt{2}}{4}mg \Rightarrow \boxed{N = \frac{19\sqrt{2}}{32}k + \frac{5\sqrt{2}}{4}mg}$$

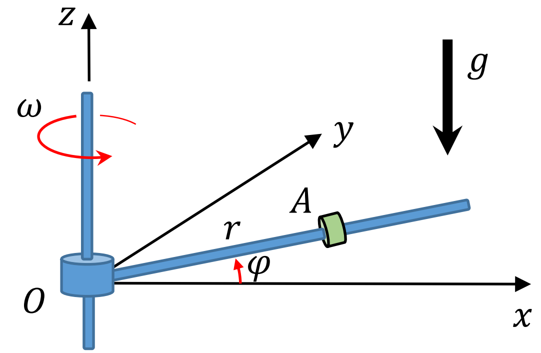
Exercício 02

Um anel *A* de massa *m* desliza sem atrito sobre uma barra retilínea. A barra por sua vez gira num plano horizontal em torno do eixo fixo vertical passando por *O* com velocidade angular $\omega = \dot{\varphi}$ constante. Admitindo no instante inicial que o anel esteja em repouso em relação à barra a uma distância r_0 da articulação fixa em *O*, pede-se:

a) A posição em função do tempo $r = r(t)$;

b) A equação da trajetória do anel em coordenadas polares;

c) A força que a barra exerce sobre o anel.



Aplicando a 2ª Lei de Newton: $m\vec{a} = \vec{R}$

$$m\left((\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)\vec{u} + (\ddot{\varphi} r + 2\dot{\varphi}\dot{r})\vec{\tau} + \ddot{z}\vec{k}\right) = R_\tau \vec{\tau} + (R_z - mg)\vec{k}$$

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - \omega^2 r) = 0 \\ 2m\omega\dot{r} = R_\tau \\ 0 = R_z - mg \end{cases}$$

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

$$r = C_1 cosh\omega t + C_2 senh\omega t$$

$$\dot{r} = \omega C_1 senh\omega t + \omega C_2 cosh\omega t$$

$$\ddot{r} = \omega^2 C_1 cosh\omega t + \omega^2 C_2 senh\omega t$$

Aplicando as condições iniciais:

$$r(t = 0) = C_1 = r_0 \Rightarrow C_1 = r_0$$

$$\dot{r}(t = 0) = \omega C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\boxed{r = r_0 cosh\omega t}$$

$$\dot{r} = \omega r_0 senh\omega t$$

$$\ddot{r} = \omega^2 r_0 cosh\omega t$$

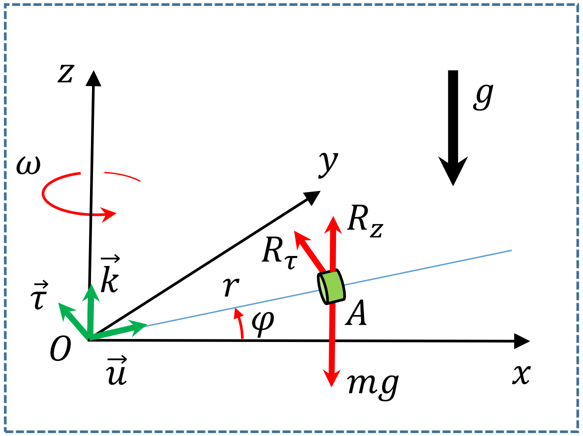
$$\boxed{R_\tau = 2m\omega^2 r_0 senh\omega t}$$

$$\boxed{R_z = mg}$$

$$\varphi = \omega t$$

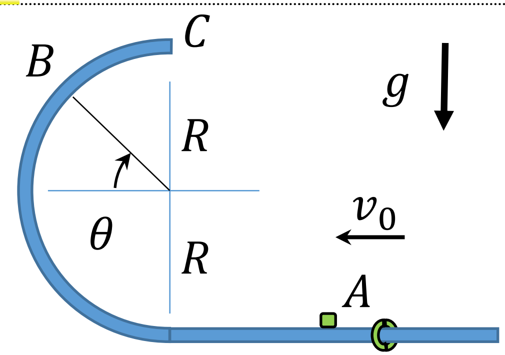
$$\boxed{r = r_0 cosh\varphi}$$

D.C.L:



Exercício 03

Uma partícula A é lançada sobre a guia indicada, deslizando sem atrito.
Pede-se:
a) v_0 para que a partícula chegue a C considerando contato unilateral;
b) v_0 para que a partícula chegue a C considerando contato bi-lateral;
c) a reação da guia sobre a partícula numa posição genérica B em função de v_0.



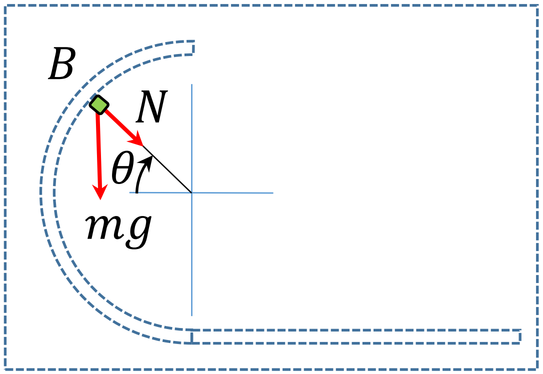
A única força realizando trabalho é o peso. Vamos aplicar a integral da energia:

$$\boxed{T_B + V_B = T_0 + V_0}$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgR(1 + sen\theta) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gR(1 + sen\theta)$$

Para o contato uni-lateral a condição é que a Normal permaneça maior que zero até chegar em *C*.
Para o contato bi-lateral a condição é que a velocidade não se anule antes de chegar em *C*.

D.C.L.



<u>Para contato bi-lateral então:</u> $v^2 = v_0^2 - 2gR(1 + sen\theta)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \geq 0 \Rightarrow \boxed{v_0^2 \geq 4gR}$

Aplicando a 2ª Lei de Newton: $m\vec{a} = \vec{R}$ $\quad m\left(\dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right) = N\vec{n} - mg\vec{j} = N\vec{n} + mgsen\theta\vec{n} - mgcos\theta\vec{t}$

$$\begin{cases} m\dot{v} = -mgcos\theta \\ m\dfrac{v^2}{R} = N + mgsen\theta \end{cases} \Rightarrow N = \frac{mv^2}{R} - mgsen\theta$$

$$\boxed{N = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2 + 3sen\theta)}$$

<u>Para contato uni-lateral então:</u>

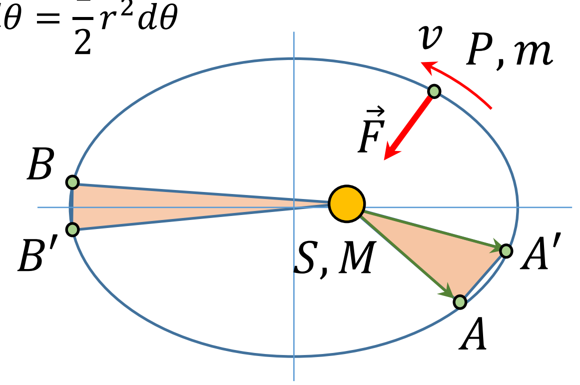
$$N = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2 + 3sen\theta)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \geq 0 \Rightarrow \boxed{v_0^2 \geq 5gR}$$

Exercício 04

Johannes Kepler, 1605

O movimento de um satélite em torno da terra ou dos planetas em torno do sol pode ser bem representado por um modelo de partícula sob ação de uma força central.
Kepler deduziu, a partir de registros tabulados de observações experimentais, 3 leis para o movimento planetário. Uma delas diz: “O raio vetor que define a posição do planeta percorre áreas iguais em tempo iguais”, isto é, “a *velocidade areolar* é constante”.
Pede-se demonstrar analiticamente esta Lei de Kepler a partir das Leis de Newton.

A área percorrida pelo raio vetor pode ser obtida a partir de: $dA = \frac{1}{2} r.rd\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$



A velocidade areolar então é dada por: $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} . \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}}$

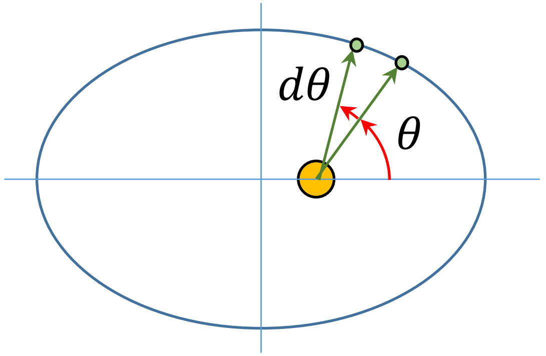
O momento da força central em relação ao foco da trajetória elíptica é dado por:

$$\vec{M}_s = (P - S) \wedge \vec{F} = r\vec{u} \wedge \left(-\frac{GmM}{r^2}\right)\vec{u} = \vec{0}$$

Do Teorema da Quantidade de Movimento angular:

$$\dot{\vec{H}}_s = \vec{M}_s \Rightarrow \dot{\vec{H}}_s = \vec{0}$$

Concluímos que temos Conservação da Quantidade de Movimento Angular no movimento central. Assim: $\dot{\vec{H}}_s = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_s = cte$

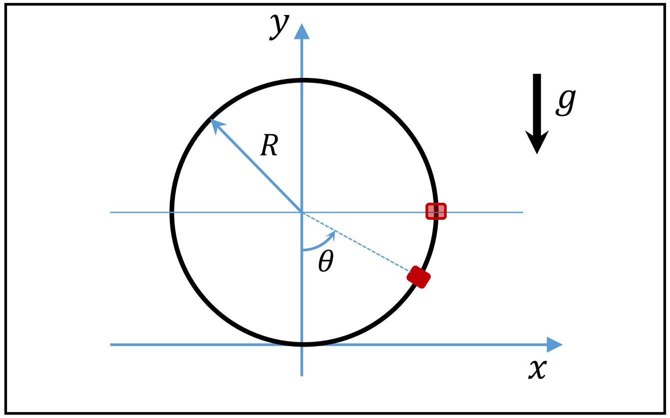


$$\Rightarrow (P - S) \wedge m\vec{v} = r\vec{u} \wedge m(\dot{r}\vec{u} + r\dot{\vec{u}}) = mr\vec{u} \wedge (\dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{\tau}) = mr^2\dot{\theta}\vec{k} = cte$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{dA}{dt} = cte \qquad c.q.d.}$$

Exercício 05

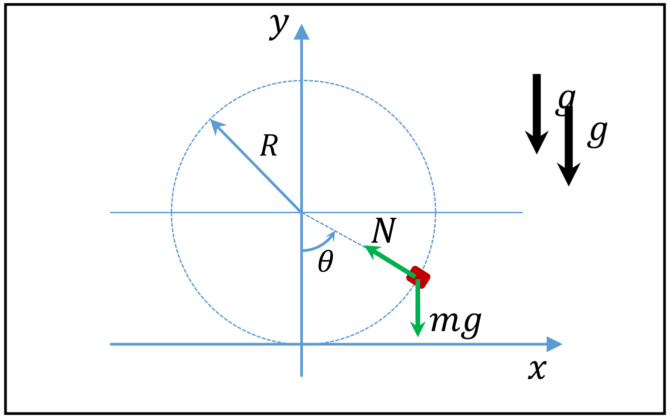
Um anel pesado de massa m desliza sobre uma guia circular fixa, de raio R , situada num plano vertical.
O anel parte do repouso da posição $y = R$.
Despreze eventuais atritos.



Para $m = 2\ [kg]$ e $R = 3\ [m]$, $g = 9,81\ [m/s^2]$ pede-se:

a) A velocidade do anel em $\theta = \frac{\pi}{4} [rad]$;
b) A velocidade do anel em $\theta = 0\ [rad]$;
c) A reação da guia sobre o anel em $\theta = \frac{\pi}{4} [rad]$;
d) A reação da guia sobre o anel em $\theta = 0\ [rad]$;
e) A coordenada y da posição onde a reação do anel é igual em módulo ao seu peso.

Exercício 05 (continuação)



Aplicando a Integral da Energia:

$$T + V = T_0 + V_0$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgR(1 - cos\theta) = 0 + mgR$$

$$v^2 = 2gRcos\theta$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gRcos\theta}}$$

$$\boxed{v\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = 6{,}45\ [m/s]}$$

$$\boxed{v(\theta = 0) = 7{,}67[m/s]}$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton:

$$m\vec{a} = \vec{R}$$

$$m\left(\dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right) = mgsen\theta\vec{t} + (N - mgcos\theta)\vec{n}$$

$$\begin{cases} m\dot{v} = mgsen\theta \\ m\dfrac{v^2}{R} = N - mgcos\theta \Rightarrow \quad N = mgcos\theta + m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$\boxed{N = 3mgcos\theta}$$

$$\boxed{N\left(\theta = \frac{\pi}{4}\right) = 41{,}6\ [N]}$$

$$\boxed{N(\theta = 0) = 58{,}86\ [N]}$$

Para N = mg :

$$N = 3mgcos\theta = mg$$

$$cos\theta = 1/3$$

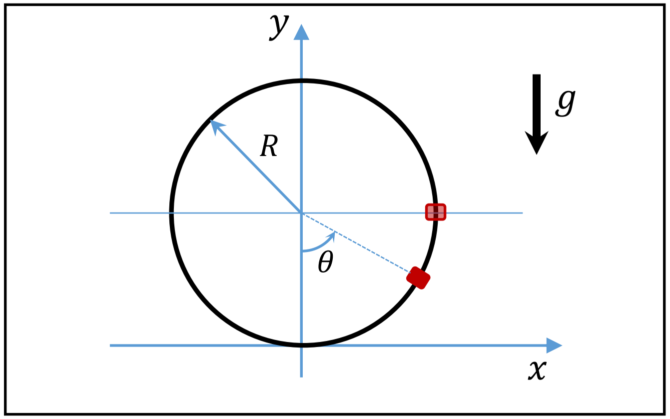
$$y = R - Rcos\theta$$

$$\boxed{y = \frac{2R}{3}}$$

$$\boxed{y = 2\ [m]}$$

Exercício 06 (mesmo enunciado do 05, agora com atrito)

Um anel pesado de massa m desliza sobre uma guia circular fixa, de raio R , situada num plano vertical.
O anel parte do repouso da posição $y = R$.
Considere coeficiente de atrito de escorregamento μ entre o anel e a guia.



Para $m = 2\ [kg]$ e $R = 3\ [m]$, $g = 9,81\ [m/s^2]$, $\mu = 0,3$ pede-se:

a) **A velocidade do anel em $\theta = \frac{\pi}{4} [rad]$;**
b) **A velocidade do anel em $\theta = 0\ [rad]$;**
c) **A reação da guia sobre o anel em $\theta = \frac{\pi}{4} [rad]$;**
d) **A reação da guia sobre o anel em $\theta = 0\ [rad]$;**
e) **A coordenada y da posição onde a reação do anel é igual em módulo ao seu peso.**
f) **A altura máxima que o anel chega ao final da primeira oscilação.**

Exercício 07

O vagão desloca-se para a direita com uma dada aceleração constante. O bloco está simplesmente apoiado na parede frontal do vagão e não escorrega para baixo em relação ao mesmo devido ao atrito.
Qual deve ser a mínima aceleração do vagão compatível com esta situação?

Para $M = 50\ [kg]$, $m = 2\ [kg]$, $g = 9{,}81\ [m/s^2]$, $\mu = 0{,}3$.