Os problemas do tema "estimação intervalar de uma proporção":

(Ia) dado o valor de ε, calcular o correspondente valor de γ;
(Ib) dado valor do nível de γ, calcular o correspondente valor de ε.
(II) dados os valores de ε e de γ calcular o correspondente valor de n.

ε - chama-se *a margem de erro* (do intervalo de confiança).
γ - chama-se *o coeficiente de confiança* (do intervalo de confiança).
n - é o tamanho da amostra.

Eis a fórmula para a solução de (Ia) e (Ib):

$$\underbrace{\varepsilon = z\sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n}}}_{\text{primeira parte}}, \text{ onde } \underbrace{z > 0 \text{ é tal que } \gamma = \boldsymbol{P}\left[-z \le Z \le z\right]}_{\text{segunda parte}}$$

Realço: a fórmula é a mesma para (Ia) e para (Ib). Em (Ia), γ é o incognito e outros parâmetros da fórmula têm seus valores numéricos conhecidos, enquanto que em (Ib), o único incognito é ε.

Exemplo 1 (problema do tipo (Ia)). Das 600 pessoas escolhidas ao acaso de uma população, 330 afirmaram apoiar o candidato Zé Fico nas próximas eleições. Qual é o coeficiente de confiança da estimativa que a proporção do eleitorado do Zé esteja entre $0,51$ e $0,59$?

$$z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n}}} = \frac{0,04}{\sqrt{\frac{0,55(1-0,55)}{600}}} \approx \frac{0,04}{0,02} = 2$$

$$\gamma = \boldsymbol{P}[-2 \leq Z \leq 2] \iff \gamma = 2\boldsymbol{P}[0 \leq Z \leq 2] \iff$$
$$\iff \gamma = 2\left(\boldsymbol{P}[Z \leq 2] - 0,5\right) \iff$$
$$\overset{\text{tabela da dist. normal padrão}}{\iff} \gamma = 2\left(0,9772 - 0,5\right) \Longrightarrow \gamma = 0,9544$$

Exemplo 2 (problema do tipo (Ib)). Para estimar a proporção populacional dos quem usa os pneus da marca Durodondo, foi encaminhada uma pesquisa que revelou que dentro das 600 pessoas escolhidas ao acaso, 80 usam Durodondo. A tarefa então é usar a proporção amostral revelada pela pesquisa para construir a estimativa intervalar da proporção populacional cujo coeficiente de confiança seja 90%.

$$0,90 = \boldsymbol{P}[-z \leq Z \leq z] \Longrightarrow 0,95 = \boldsymbol{P}[Z \leq z] \Longrightarrow z = 1,65$$

$$\varepsilon = 1,65\sqrt{\frac{\frac{80}{600}\left(1 - \frac{80}{600}\right)}{600}} = 0,023$$

Então, temos a resposta à tarefa formulada no exemplo: o intervalo de confiança, com o solicitado coeficiente de confiança de 90%, para a verdadeira proporção dos usuários de pneu da marca Durodondo é

$$\left[\frac{80}{600} - 0,023\,;\ \frac{80}{600} + 0,023\right]$$

Exemplo 3 (problema do tipo II).
Deseja-se que

$$0,99 \text{ seja o valor do coeficiente de confiança}$$

e

$$0,001 \text{ seja o valor da margem de erro}$$

Precisa

achar o tamanho n de amostra a ser feita (n), para que o intervalo de estimação construido com base nesta tenha os valores desejados de seu coeficiente de confiança e de sua margem de erro

Afirmação

Suponha que amostra não foi feita. Então o tamanho (n) da amostra a ser feita para garantir a margem de precisão (ε) e o coeficiente de confiança (γ) fixados antemão, determina-se pelas seguintes fórmulas:

$$n = 0,25 \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \quad \text{caso nada for conhecido apriori sobre o valor de } p;$$

$$n = M_{\mathcal{D}} \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \quad \text{caso for conhecido apriori que } p$$

pode estar somente no conjunto $\mathcal{D}$; neste caso

$$M_{\mathcal{D}} = \max_{x \in \mathcal{D}} x(1-x)$$

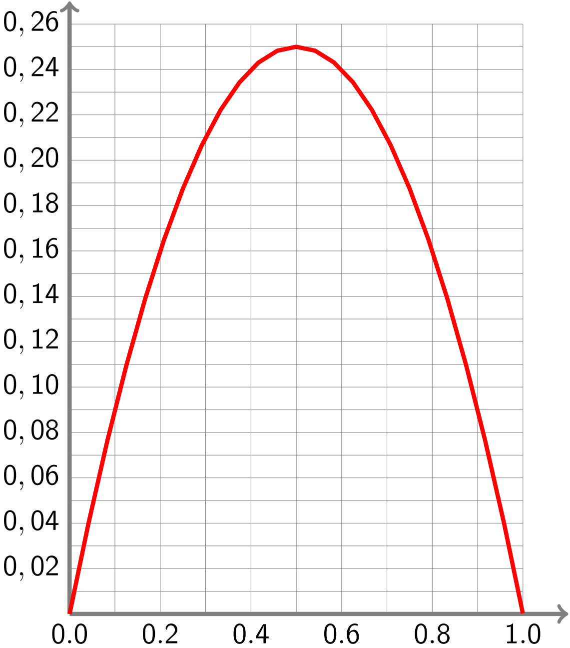
onde, em ambos os casos, z é um número positivo tal que $\gamma = \boldsymbol{P}[-z \leq Z \leq z]$, com $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

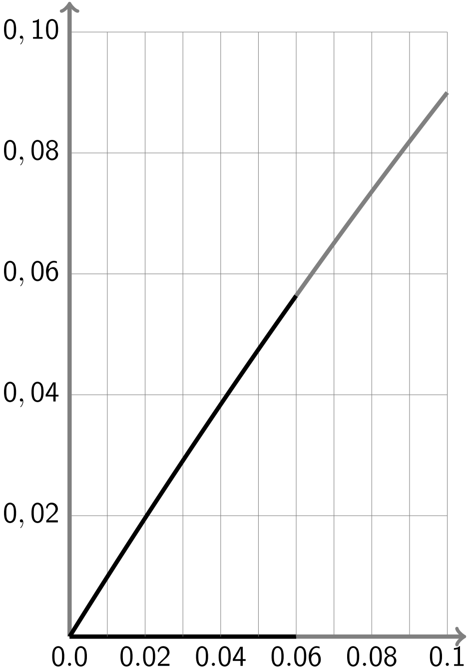
$$\gamma = 0,99 \implies z \text{ satisfaz } \boldsymbol{P}[-z \leq Z \leq z] = 0,99 \implies z = 2,58$$

$$n = 0,25 \left(\frac{2,58}{0,001} \right)^2 \times 0,25 = 1\,664\,100$$

O problema agora é o mesmo, só que sabemos apriori que

$$p \in (0,\ 0,06],\ \text{isto é } p \in \mathcal{D},\ \text{onde } \mathcal{D} = (0,\ 0,06]$$


0, 26
0, 24
0, 22
0, 20
0, 18
0, 16
0, 14
0, 12
0, 10
0, 08
0, 06
0, 04
0, 02
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


0, 10
0, 08
0, 06
0, 04
0, 02
0.0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1

$$n = 0,06(1-0,06)\left(\frac{2,58}{0,001}\right)^2 \times 0,06(1-0,06) = 375\,420,96$$

sendo arredondado de por cima pelo, dá: 375 421