AULA
Variáveis aleatórias

Ministrante Prof. Dr. Vladimir Belitsky,
IME-USP

19 de abril de 2023

Variáveis aleatórias. Introdução 1/1.

Variável aleatória é maneira de expressar resultados de um experimento aleatório por meio de valores numéricos.

Variável aleatória defina-se antes do experimento ocorrer. Por isso há uma distribuição de probabilidade por valores de variável aleatória. Essa chama-se sua **distribuição** (ou **distribuição probabilística**) **de variável aleatória**.

A aula é sobre

(1) As distribuições de variáveis aleatórias e, em particular, sobre as distribuições de "novas" variáveis aleatórias obtidas por via de manipulações (do tipo, somar, multiplicar, etc.) com variáveis aleatórias "antigas".

(2) Sobre a esperança matemática e variância de variáveis aleatórias e sobre suas propriedades.

(3) Sobre a independência entre variáveis aleatórias e a relação deste conceito com a esperança matemática e a variância.

Variáveis aleatórias. Definição 1/2.

Definição formal 1 *(não perfeita, mas rigorosa o suficiente para o caso que nos interessa que é o caso no qual o número de resultados do experimento aleatório em interesse é finito)*.

Em qualquer experimento aleatório (com a quantidade finita de resultados possíveis, isto é, com *o espaço de estados finito*), qualquer função cujo domínio é o conjunto de seus resultados e cujo contradomínio é $\mathbb{R}$ (recordo que $\mathbb{R}$ é a notação tradicional e padrão para o conjunto de todoso os números reais) chama-se **variável aleatória**. Dado uma experimento aleatório, seu modelo probabilístico e uma variável aleatória definida no seu conjunto de resultados, o termo **distribuição** (ou **distribuição probabilística**) da variável aleatória definida é o nome para a tabela que contém todos os valores da sua imagem junto com **a probabilidade da função assumir cada um deles**:

Variáveis aleatórias. Definição 2/2.

a probabilidade de função assumir valor x defina-se como a probabilidade do conjunto composto de todos os resultados nos quais o valor dessa função é x:

$$\boldsymbol{P}\left[\,\{\omega \in \Omega\,:\,X(\omega) = x\}\,\right] \qquad \text{(observe: esta é a pobabilidade dum conjunto)} \tag{1}$$

Observe a notação usada:
X – a função;
ω – um resultado e o argumento de X;
$X(\omega)$ – o valor da função X no argumento ω;
$\{\omega \in \Omega\,:\,X(\omega) = x\}$ –o conjunto dos resultados nos quais X assume o valor x.

Atenção: $\boldsymbol{P}[X = x]$ é a notação suscinta que será usada.

Variáveis aleatórias. Exemplo 1/7.

O exemplo abaixo fornece exemplos do conceito “variável aleatória”. O ênfase do exemplo está na apresentação das maneiras de acordo com as quais as variáveis aleatórias podem (e de fato, serão) definidas/introduzidas no meu curso. Também, construirei as distribuições de algumas das variáveis aleatórias apresentadas.

Exemplo 1. Neste exemplo, considero o experimento aleatório “lançamentos consecutivos de três moedas honestas”. Note que que não temos nenhuma dificuldade na contrução do espaço de seus resultados nem na atribuição de probabilidade a essas. Por isto, pulo a explicação da construção e apresento diretamente seu desenredo; na Tabela a seguir, é suas duas primeiras colunas: a primenta coluna lista todos os resultados, e a segunda expõe as relativas probabilidades.
As colunas da 3-a à 9-a contêm valores de 7 variáveis aleatórias cujas definições estão nas transparências ulteriores à transparência que apresenta a Tabela.

Variáveis aleatórias. Exemplo 2/7.

ω	$\boldsymbol{P}[\omega]$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$V(\omega)$	$Z(\omega)$	$S(\omega)$	$U(\omega)$	$R(\omega)$
hhh	1/8	3	0	1	0	9	1	8
hht	1/8	2	0	1	1	4	1	7
hth	1/8	2	0	-1	2	4	1	6
thh	1/8	2	1	1	1	4	1	5
htt	1/8	1	0	-1	1	1	1	4
tht	1/8	1	1	1	2	1	1	3
tth	1/8	1	1	-1	1	1	1	2
ttt	1/8	0	1	-1	0	0	1	-5

Variáveis aleatórias. Exemplo 3/7.

Conforme prometido na penúltima transparência, defino agora 7 funções cujos valores estão na tabela acima. Quanto às notações par elas, esclareço que é a tradição na Teoria de Probabilidades denotar variáveis aleatórias por letras maiusculas romanas.

A definição da variável aleatória denotada por X:
X assume o valor igual o número de "caras" que veremos em três lançamentos;

A definição da variável aleatória denotada por Y:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{se a 1-a moeda der "cara"}, \\ 1, & \text{se a 1-a moeda der "coroa"}; \end{cases}$$

A definição da variável aleatória denotada por V:

$$V = \begin{cases} 1, & \text{se a 2-a moeda der "cara"}, \\ -1, & \text{se a 2-a moeda der "coroa"}; \end{cases}$$

Variáveis aleatórias. Exemplo 4/7.

A definição da variável aleatória denotada por Z:
Z assume o valor igual ao número de transições "cara"−"coroa" ou "coroa"−"cara" na sequência a ser obtida em três moedas;

A definição da variável aleatória denotada por S:
S é igual ao quadrado do número de "caras"que veremos em três lançamentos;

A definição da variável aleatória denotada por U:
U sempre assumirá o valor 1.

A definição da variável aleatória denotada por R:
$R(hhh) = 8, R(hht) = 7, R(hth) = 6, R(thh) = 5, R(htt) = 4, R(tht) = 3, R(tth) = 2, R(ttt) = -5.$

Cada uma das $X, Y, \ldots, R$ é chamada por "variável aleatória", pois cada uma atribui um valor a cada realização de Ω. Algumas forma definidas via descrição verbal, outras forma definidas percorrendo por todas as realizações e dando o valor em cada delas.

Variáveis aleatórias. Exemplo 5/7.

Vamos construir as distribuições de algumas das variáveis aleatórias acima definidas.

Recordo, a distribuição de uma variável aleatória é a tabela que contem todos os valores que essa pode assumir junto com suas respectivas probabilidades.

Por exemplo, para X de nosso exemplo, a tabela adquira a seguinte cara:

x	0	1	2	3
$\boldsymbol{P}[X = x]$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Variáveis aleatórias. Exemplo 7/7.

E se a variável em interesse for Z do nosso exemplo, então a cara da distribuição será assim:

z	0	1	2
$\boldsymbol{P}\left[Z=z\right]$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Fim do Exemplo 1

Se você entendeu o sentido e a regra de construção da distribuição de uma variável aleatória, então você facilmente entenderá a extenção da regra para um par de variáveis aleatórias, eis esta: percorrer por todos os pares possíveis dos valores das duas variáveis aleatórias e calcular a probabilidade de ocorrer cada par. No caso de duas variáveis aleatórias, o resultado pode ser apresentado por uma tabela bi-dimensional; é esta apresentação que adotamos. Por exemplo, para o par X, Z de nosso Exemplo 1, tem-se a seguinte tabela:

Z \ X	0	1	2	3
0	1/8	0	0	1/8
1	0	2/8	2/8	0
2	0	1/8	1/8	0

Variáveis aleatórias. As distribuições multivariada e bi-variada 2/2.

Vamos à explicação dos valores que tais tabelas contêm. Usaremos o exemplo da tabela apresentada na transparência acima. A coluna mais à esquerda contém todos os valores que Z pode assumir; a primeira linha contém todos os valores que X pode assumir. Nas intersecções, ficam as relativas probabilidades. A "relativa" explica-se assim: por exemplo, na intersecção da linha "1" com coluna "2" encontra-se o valor $2/8$, pois este é a probabilidade – de axcordo com as definições de Z e de X, $2/8$ é a probabilidade de que Z assume 1 e, ao mesmo tempo, X assumir 2. Alias, tal probabilidade denota-se por

$$\boldsymbol{P}\,[Z = 1\,, X = 2]$$

ou, na escrita mais detalhada, por

$$\boldsymbol{P}\,[\{\omega \in \Omega\,:\, Z(\omega) = 1,\; X(\omega) = 2\}]$$

A última especifica a maneira segundo a qual calcula-se o valor da probabilidade: tem que percorer por todos os ω's e colher aqueles nos quais Z assume 1 e ao mesmo tempo X asume 2. Depois tem que calcular a probabilidade do evento composto dos ω's colhidos.

Variáveis aleatórias. Dedução da distribuição univariada a partir de distribuição bi-variada sem referência ao experimento aleatório1/1.

Ao somar as probabilidades do corpo de tabela correspondentes á linha i obtem-se o valor da probabilidade da variável aleatória (no caso, denotada por Z) assumir o valor i. Ao fazer tais somas para todas as linhas, recupera-se a distribuição individual da variável aleatória (no caso, Z). O resultado dessa ação está desenhado à direita. De acordo com a explicação, tal resultado é a tabela da distribuição da variável aleatória Z. Um nome alternativo para tal resultado é **distribuição marginal**. Uma explicação análoga vale para a ação "somar probabilidades por colunas".

X / Z	0	1	2	3
0	1/8	0	0	1/8
1	0	2/8	2/8	0
2	0	1/8	1/8	0

z	$P[Z = z]$
0	2/8
1	4/8
2	2/8

x	0	1	2	3
$P[X = x]$	1/8	3/8	3/8	1/8

Fim da apresentação de distribuições multivariádas.

Variáveis aleatórias. Manipulações com variáveis aleatórias 1/4.

O moral da história a ser contada: uma função de uma variável aleatória é variávela aleatória; uma função de um conjunto de variáveis aleatórias também é variávela aleatória.

Você pode omitir as próximas duas transparência e passar diretamente ao exemplo. As duas transparência seguintes fornecem a definição formal para aquilo que chamaei de "manipulação com variáveis aleatórias ". Você vai poder entender tal definição a partir de leitura de exemplos.

A parte importante da história toda é aprender a construir a tabela de distribuição de variável aleatória "nova" que foi definida via manipulação com variáveis aleatórias cujas distribuição são conhecidas.

Definição 2 sobre manipulações com variáveis aleatórias.
(a) Seja n um número natural arbitrário e sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias definidas num experimento aleatório. Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função de n variáveis reais (sobre a qual devo acrescer, para me enquadrar nas exigências da precisão de uma definição matemática, que ela assume valores reais e seu domínio é $\mathbb{R}^n$). Então $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ significa a variável aleatória definida, cujo domínio são as realizações do experimento aleatório das $X_1, \dots, X_n$, e cujos valores são definidos da seguinte maneira:

$$\underbrace{\overbrace{\left(f(X_1, X_2, \dots, X_n)\right)}^{\text{a variável aleatória nova}}(\omega)}_{\substack{\text{o valor da nova variável}\\ \text{aleatória no elemento } \omega}} = \underbrace{f(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))}_{\substack{\text{o valor que } f \text{ assume qndo seus argumentos}\\ \text{são os valores que } X_1, \dots, X_n \text{ assumiram em } \omega}}$$

AVISO: X e Y são notações genéricas e não as variáveis aleatórias do Exemplo de lançamentos de três moedas!!!

Definição 2 *sobre manipulações com variáveis aleatórias.*

(b) (um caso de (a), particular mas comum). Se X for uma variável aleatória definida num experimento aleatório e c for um número real qualquer, então cX significa a variável aleatória definida no mesmo experimento aleatório que X da maneira tal que $\big(cX\big)(\omega)$, seu valor em realização ω, é igual a $c \times X(\omega)$.

(c) (um outro caso de (a), particular mas comum). Se X e Y foram duas variáveis aleatórias definidas num experimento aleatório, então, $(X+Y)$ significa variável aleatória definida no mesmo experimento aleatório da maneira tal que $\big(X+Y\big)(\omega)$, seu valor em realização ω, é igual a $X(\omega)+Y(\omega)$.

(d) (um terceiro caso de (a), particular mas comum). Se X e Y foram duas variáveis aleatórias definidas num experimento aleatório, então, (XY) significa variável aleatória definida no mesmo experimento aleatório da maneira tal que $\big(XY\big)(\omega)$, seu valor em realização ω, é igual a $X(\omega) \times Y(\omega)$.

Exemplo 2. A tarefa é construir W definida via $W = X^2 + Y$ a partir das X e Y do Exemplo 1 de lançamentos de três moedas.

Decodificação da tarefa: X e Y foram definidas no mesmo experimento aleatório e é por isto que $X^2 + Y$ é uma variável aleatória cujo domínio é o espaço de estados (conjunto de todas as realizações, em outras palavras) do mesmo experimento aleatório. "Construr" variável aleatória significa apresentar seu valor em cada realização. Segundo a definição, para tal, é precisa percorrer pelo Ω, e, para cada ω do Ω, calcular $(X(\omega))^2 + Y(\omega)$.

ω	$\boldsymbol{P}[\omega]$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$W(\omega)$
hhh	1/8	3	0	9
hht	1/8	2	0	4
hth	1/8	2	0	4
thh	1/8	2	1	5
htt	1/8	1	0	1
tht	1/8	1	1	2
tth	1/8	1	1	2
ttt	1/8	0	1	1

AVISO: X e Y não são as variáveis aleatórias do Exemplo 1 de lançamentos de três moedas!!!

Exemplo 3. Suponha que não sabemos nada sobre o experimento aleatório que deu origem à variável aleatória X, mas sabemos que esta tem a distribuição apresentada do lado esquerdo da Figura abaixo. Definimos nova variável aleatória Y via a relação $Y = 2X$. Segue-se então da Definição que onde X assume um valor qualquer, a Y assume o dobro deste. Isto é suficiente para construir a distribuição de Y. Esta está à direita na Figura abaixo. Comparando as das tabelas da figura, percebe-se que a regra da construção da distribuição de $2X$ a partir da de X pode ser verbalizada do modo muito claro e simples (e absolutamente correto, por sinal): "Multiplique os valores por 2 e deixe as probabilidades intactas."

Continuação do Exemplo 3.

x	$\boldsymbol{P}[X = x]$
1	$1/10$
2	$2/10$
3	$3/10$
4	$4/10$

$$Y = 2X \implies$$

y	$\boldsymbol{P}[Y = y]$
2	$1/10$
4	$2/10$
6	$3/10$
8	$4/10$

AVISO: X e Y não são as variáveis aleatórias do Exemplo 1 de lançamentos de três moedas!!!

Exemplo 4. Suponha todas as condições do exemplo anterior fora a definição de Y que agora será: $Y = X + 5$. Argumentando como no exemplo anterior, chega-se à regra "Para ober a tabela da distribuição de $X + 5$ a partir da de X, acrescente 5 a cada valor da tabela original e deixe as probabilidades intactas." A figura da próxima transparência ilustra o resultado.

Exemplo 4, continuação

x	$\boldsymbol{P}[X = x]$
1	1/10
2	2/10
3	3/10
4	4/10

$$Y = X + 5 \Longrightarrow$$

y	$\boldsymbol{P}[Y = y]$
6	1/10
7	2/10
8	3/10
9	4/10

AVISO: X e Y não são as variáveis aleatórias do Exemplo 1 de lançamentos de três moedas!!!

Exemplo 5. Suponha todas as condições do exemplo anterior, mas altere agora a distribuição de X, e seja esta de acordo com a tabela à esquerda da Figura da próxima transparência, e também, altere a definição de Y; agora seja $Y = X^2$. Apesar da alterações, a mais profunda das quais afetou a construção de Y que agora é dada via função quadrática, a regra da obtenção da distribuição da variável aleatória construida é muito parecida com as dos exemplos anteriores: "Para ober a tabela da distribuição de X^2 a partir da de X, eleve ao quadrado cada valor da tabela original e deixe as probabilidades intactas."

Variáveis aleatórias; manipulações com variáveis aleatórias sem a referência ao experimento aleatório 6/11.

Figura abaixo ilustra o correspondente procedimento. Seu resultado é a tabela à direita. Observe porém que nela há valores repetidas. Isto não invalida nem a tabela nem o método de sua construção. O lógico, entretanto, seria agrupar as probabilidades de valores repetidos. Nosso acordo é sempre fazer tal agrupamento. Portanto, o resultado considerado correto é a tabela abaixo da Figura.

x	$P[X = x]$
-1	$1/10$
-2	$2/10$
1	$3/10$
2	$4/10$

$Y = X^2$ $\Longrightarrow$

y	$P[Y = y]$
1	$1/10$
4	$2/10$
1	$3/10$
4	$4/10$

agrupamento $\Longrightarrow$

y	$P[Y = y]$
1	$4/10$
4	$6/10$

Exemplo 6. Voltamos ao Exemplo 1 de três moedas. Recorde as variáveis aleatórias X e Y definidas nele: Y olhava no primeiro lançamento e assumia 0, se este mostrava "cara", ou 1, se mostrava "coroa". Já X contava o número de "coroas" vistas nos três lançamentos. A distribuição conjunta de X e Y está na tabela à esquerda da Figura abaixo. Sua construção segue as regras da construção de distribuição bivariada.
Definimos agora a variável aleatória L como a soma de X e Y, isto é, $L = X + Y$. Veja, por favor, o seguinte argumento:

$*$ Em qualquer realização do experimento aleatório, onde X assume 2 e, ao mesmo tempo, Y assume 0, o valor da variável aleatória L será a soma desses dois, quer dizer, $2 + 0 = 2$. A tabela da distribuição conjunta de X e Y nos diz que as realizações, nas quais estas duas assumem valores 2 e 0 respectivamente, formam um conjunto cuja probabilidade de ocorrer é $2/8$. Então, podemos concluir que há um conjunto cuja probabilidade é $2/8$, e nas cujas realizações L assume valor 2.

A aplicação deste argumento a cada par de valores de X e Y nos dá a informação sobre L que representamos em forma de tabela na Figura abaixo.

Variáveis aleatórias; manipulações com variáveis aleatórias sem a referência ao experimento aleatório 9/11.

$X \backslash Y$	0	1
0	0	1/8
1	1/8	2/8
2	2/8	1/8
3	1/8	0

$$\Downarrow L = Y + X \Downarrow$$

ℓ	0+0	0+1	0+2	0+3	1+0	1+1	1+2	1+3
$\boldsymbol{P}[L = \ell]$	0	1/8	2/8	1/8	1/8	2/8	1/8	0

$\Downarrow$ agrupamento de probabilidade por valores idênticos, e eliminação de valores com probabilidades nulas $\Downarrow$

ℓ	1	2	3
$\boldsymbol{P}[L = \ell]$	2/8	4/8	2/8

Exemplo 7. Neste exemplo, tomamos par de variáveis aleatórias X e Y cuja distribuição conjunta está apresentada na primeira tabela da Figura abaixo (atenção: não são mais X e Y do exemplo com três moedas). A mesma figura mostra o procedimento que leva à construção da variável aleatória W definida por nos como soma das variáveis do par, isto é, $W = X \times Y$. O procedimento é basicamente o mesmo que o do Exemplo anterior apesar daquele exemplo tratar de somatória de duas variáveis aleatórias enquanto que o presente exemplo trata de produto. Na verdade, o procedimento supracitado é genérico no sentido que aplica-se à qualquer função f da Definição de Manipulações com Variáveis Aleatórias. Quando esta f for produto (de duas variáveis aleatórias), o procedimento é como apresentado no presente exemplo.

Variáveis aleatórias; manipulações com variáveis aleatórias sem a referência ao experimento aleatório 11/11.

Y \ X	-1	1
-1	$1/10$	$2/10$
1	$3/10$	$4/8$

$$\Downarrow W = X \times Y \Downarrow$$

w	$(-1)\times(-1)$	$(-1)\times 1$	$1 \times (-1)$	1×1
$\boldsymbol{P}\left[W = w\right]$	$1/10$	$3/10$	$2/10$	$4/10$

$\Downarrow$ agrupamento de probabilidade por valores idênticos, e eliminação de valores com probabilidades nulas $\Downarrow$

w	-1	1
$\boldsymbol{P}\left[W = w\right]$	$1/2$	$1/2$

Definição 3.
Para uma variável aleatória que assume valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) com respectivas probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, sua **esperança matemática** é o valor da seguinte expressão

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \ \left(\text{que pode ser escrita como } \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right) \quad (2)$$

Se X for a notação para a variável aleatória, então $\boldsymbol{E}[X]$ é a notação para sua esperança matemática.

Na definição acima, p_i é a notação para $\boldsymbol{P}[X = x_i]$.

Exemplo 8. Lança-se uma moeda honesta. Pedro aposta R$1 no resultado de acordo com a seguinte regra: ele ganhará (digamos, da pessoa que lança a moeda) R$1 se aparecer ´´cara", e pagará R$1 se aparecer "coroa". Introduzimos a variável aleatória "ganho/perda do Pedro" e denotamos esta por X. Como a moeda lançada é honesta, ela mostra "cara" e "coroa" cada com a probabilidade 1/2. Consequentemente, X assume $+1$ com probabilidade 1/2, e assume -1 também com a probabilidade 1/2. Pela definição,

$$\boldsymbol{E}[X] = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0 \tag{3}$$

Esta foi a conta. Seu resultado não esclarece muita coisa, pois Pedro nunca vai ver 0; ele pode ver ou $+1$ ou -1. Qual então é a interpretação do resultado 0 e qual é a sua utilidade?

Então, as perguntas são as duas seguintes:

Pergunta 1: Ao que objeto (ou conceito) da vida real a esperança matemática corresponde, ou, como esta seria interpertada nos termos definidos até agora que tiveram respaldo intuitivo ou tornaram-se intuitivos?

Pergunta 2: Qual é a utilidade da esperança matemática?

Esperança matemática. Interpretação 2/4.

Veja as respostas em sua forma suscinta:

> **Resposta na pergunta 2:** Esperança matemática de uma variável aleatória é uma caraterística numérica de sua distribuição que revelar-se-á muito útil junto com métodos a serem desenvolvidos.

Isto deve ser a razão suficiente para você esquecer da primeira pergunta e prosseguir na aprendizagem, contanto com que o futuro revelará as vantagens desta aprendizagem. Mas se quizer, posso lhe dar a seguinte

> **Resposta na Pergunta 1:** A esperança matemática de uma variável aleatória é aproximadamente igual à média dos valores que esta assume numa série longa de repetições do experimento aleatório no qual a variável foi definida (veja o desenho na transparência seguinte e uma explicação pouco mais detalhada na trasparência posterior).

Esperança matemática. Interpretação 3/4.

Experimento aleatório

Moeda será lançada

cara → probab. 1/2

coroa → probab. 1/2

cara → +1

coroa → −1

passagem para variável aleatória

Variável Aleatória

$$X = \begin{cases} +1, & \text{com prob. } 1/2 \\ -1, & \text{com prob } 1/2 \end{cases}$$

x	-1	$+1$
$P[X=x]$	$1/2$	$1/2$

n realizações do Ex. Al. isto é a moeda foi lançada n vezes

h h t h t ... t

freq. relativa de h é 1/2

freq. relativa de t é 1/2

cara → +1

coroa → −1

n realizações de X

$+1, +1, -1, +1, -1, \ldots, -1$

$$\frac{1}{n}\{+1+1+(-1)+1+(-1)+ \ldots +(-1)\} =$$

$$= (+1)\cdot\left(\text{freq. relativa de } h\right) + (-1)\cdot\left(\text{freq. relat. de } t\right)$$

$$= (+1)\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = \mathbb{E}[X].$$

Esperança matemática. Interpretação 4/4.

Resposta detalhada na Pergunta 1: Tome uma variável aleatória e tome "seu" experimento aleatório. Repita este experimento aleatório N vezes e em cada repetição observe o valor assumido pela variável aleatória (em cada repetição, você saberá o resultado do experimento aleatório e portanto saberá também o valor assumido pela variável aleatória). Denote por v_k o valor observado em k-ésima repetição (naturalmente, cada v_k é um dos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que a variável aleatória pode assumir). Calcule $\bar{v}_N$, a média aritmética dos N valores observados:

$$\bar{v}_N = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_N}{N}$$

Então, conforme n aumenta (isto é, conforme a quantidade de repetições aumenta), o valor de $\bar{v}_N$ converge à esperança matemática da variável aleatória em consideração.

Propriedades principais da esperança matemática.

(a) Se c é um número real e X é uma variável aleatória, então

$$\boldsymbol{E}\big[\, cX \,\big] = c\,\boldsymbol{E}\big[X\big]$$

(b) Se c é um número real e X é uma variável aleatória, então

$$\boldsymbol{E}\big[\, c + X \,\big] = c + \boldsymbol{E}\big[X\big]$$

(c) Se X e Y são duas variáveis aleatórias, então

$$\boldsymbol{E}\big[\, X + Y \,\big] = \boldsymbol{E}\big[X\big] + \boldsymbol{E}\big[Y\big]$$

(d) Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes (o conceito de **independência** será ensinado daqui a pouco), então

$$\boldsymbol{E}\big[\, X \times Y \,\big] = \boldsymbol{E}\big[X\big] \times \boldsymbol{E}\big[Y\big],$$

Esperança matemática. Demonstração de $\boldsymbol{E}[X+Y] = \boldsymbol{E}[X] + \boldsymbol{E}[Y]$ 1/7

No nosso estudo de variância a vir, vamos aprender que a garantia para que aconteça

$$\mathrm{Var}\left[\,X \;+\; Y\,\right] = \mathrm{Var}\left[X\right] \;+\; \mathrm{Var}\left[Y\right]$$

é a independência entre X e Y. Este fato confunde nossas cabeças e faz pensar que a independência entre X e Y também é a condição suficiente para a validade da relação

$$\boldsymbol{E}\left[\,X \;+\; Y\,\right] = \boldsymbol{E}\left[X\right] \;+\; \boldsymbol{E}\left[Y\right]$$

Tal pensamento é equívoco: a relação acima vale para quaisquer X e Y, mesmo dependentes entre si. Eu decidi acrescentar a demonstração. Espero que ela seja útil para aqueles alunos que têm curiosidade de saber a razão pela qual a relação está válida sempre. Entretanto, a leitura da demonstração não é obrigatória. As demonstrações, fornecidas ou omitidas, não serão cobradas em provas e provinhas.

Demonstração do item (c).
Então, sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os valores que X pode assumir, e sejam $y_1, y_2, \ldots, y_m$ os de Y. Como de pranche, escreveremos a distribuição bivariada de X e Y em forma de uma tabela:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

Trata-se de uma nova variável aleatória que surge ao somar X e Y. Fiquei na dúvida, se vale introduzir uma notação para esta, mas no final, preferi manter a notação $(X+Y)$. Então, a variável aleatória $(X+Y)$ tem a seguinte distribuição:

z	x_1+y_1	x_1+y_2	$\cdots$	x_1+y_m
$\boldsymbol{P}\big[(X+Y)=z\big]$	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}

continuação

x_2+y_1	x_2+y_2	$\cdots$	x_2+y_m
p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}

$\cdots$

$\cdots$

continuação

x_n+y_1	x_n+y_2	$\cdots$	x_n+y_m
p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

É preciso ter em mente que a tabela acima ainda não é a tabela da distribuição de $(X+Y)$ e isto se deve ao único fato de que alguns valores podem coincidir. Por exemplo, se $x_1 = 2, x_2 = 4, y_1 = 6, y_2 = 3$ então $x_1 y_1 = x_2 y_2 = 12$... Mas fazer ou não o agrupamento não afeta a conta para a esperança, no sentido que $\boldsymbol{E}\big[(X+Y)\big]$ é igual a

$$\begin{aligned} & (x_1+y_1)p_{11} + (x_1+y_2)p_{12} + \cdots + (x_1+y_m)p_{1m} \\ + \quad & (x_2+y_1)p_{21} + (x_2+y_2)p_{22} + \cdots + (x_2+y_m)p_{2m} \\ & \ldots \\ + \quad & (x_n+y_1)p_{n1} + (x_n+y_2)p_{n2} + \cdots + (x_n+y_m)p_{nm} \end{aligned}$$

Se abrirmos todas as parenteces da expressão acima e agrupamos separadamente os produtos que contem x dos que contem y, teremos

$$\begin{array}{rl} & x_1p_{11}+x_1p_{12}+\cdots+x_1p_{1m} \\ + & x_2p_{21}+x_2p_{22}+\cdots+x_2p_{2m} \\ & \cdots \\ + & x_np_{n1}+x_np_{n2}+\cdots+x_np_{nm} \\ & y_1p_{11}+y_1p_{21}+\cdots+p_{n1} \\ + & y_2p_{21}+y_2p_{22}+\cdots+y_2p_{n2} \\ & \cdots \\ + & y_mp_{1m}+y_mp_{2m}+\cdots+y_mp_{nm} \end{array}$$

Mas, de acordo com propriedades da distribuição bivariada, tem-se que

$$
\begin{aligned}
p_{11}+p_{12}+\cdots+p_{1m} &= \boldsymbol{P}\big[X=x_1\big],\\
p_{21}+p_{22}+\cdots+p_{2m} &= \boldsymbol{P}\big[X=x_2\big], \textit{etcetera}.
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
p_{11}+p_{21}+\cdots+p_{n1} &= \boldsymbol{P}\big[Y=y_1\big],\\
p_{21}+p_{22}+\cdots+p_{2m} &= \boldsymbol{P}\big[Y=y_2\big], \textit{etcetera}.
\end{aligned}
$$

Portanto, ao somar por linhas no primeiro bloco, chagamos a

$$x_1\boldsymbol{P}\left[X=x_1\right]+x_2\boldsymbol{P}\left[X=x_2\right]+\cdots+x_n\boldsymbol{P}\left[X=x_n\right]$$

o que é, pela definição, $\boldsymbol{E}\left[X\right]$, enquanto que somando no segundo bloco por colunas, chegamos a

$$y_1\boldsymbol{P}\left[Y=y_1\right]+y_2\boldsymbol{P}\left[Y=y_2\right]+\cdots+y_m\boldsymbol{P}\left[Y=y_m\right]$$

o que é, novamente, pela definição, $\boldsymbol{E}\left[Y\right]$. Juntando, temos $\boldsymbol{E}[X]+\boldsymbol{E}[Y]$, o que termina nossa demonstração.

Definição 4. Para uma variável aleatória X que assume valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (para algum $n \in \mathbb{N}$) com respectivas probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, o valor de

$$p_1\big(x_1 - \boldsymbol{E}[X]\big)^2 + p_2\big(x_2 - \boldsymbol{E}[X]\big)^2 + \cdots + p_n\big(x_n - \boldsymbol{E}[X]\big)^2 \quad (4)$$

chama-se a **variância** de X e denota-se por $\mathrm{Var}\big[X\big]$.

Em uma fórmula:

$$\mathrm{Var}\big[X\big] = \sum_{i=1}^{n}\Big(p_i\big(x_i - \boldsymbol{E}[X]\big)^2\Big)$$

Variância. Exemplo de cálculo 1/2.

Exemplo 9. Vamos calcular $\mathrm{Var}[X]$ para X cuja distribuição é dada pela tabela abaixo:

x	0	1	2	3
$\boldsymbol{P}[X = x]$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Conta auxiliar:

$$\boldsymbol{E}[X] = 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 2 \times 3/8 + 3 \times 1/8 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Minha conta segue à risca a fórmula (4): para cada valor x, calcula-se a expressão de $(x - \boldsymbol{E}[X])$, depois, eleva-se este ao quadrado, e por fim, faz-se a soma dos resultados ponderados por respectivas probabilidades.

Variância. Exemplo de cálculo 2/2.

x	$\boldsymbol{P}[X = x]$	$x - \boldsymbol{E}[X]$	$(x - \boldsymbol{E}[X])^2$	$(x - \boldsymbol{E}[X])^2 \times \boldsymbol{P}[X = x]$
0	1/8	(-3/2)	9/4	9/32
1	3/8	(-1/2)	1/4	3/32
2	3/8	1/2	1/4	3/32
3	1/8	3/2	9/4	9/32

$$\Rightarrow \ \mathrm{Var}[X] = \frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{32} = \frac{24}{32}$$

Variância. Variancia de X é esperança de $(X - E[X])^2$. 1/3.

Observação: Variância é um certo tipo de Esperança Matemática. Vamos ver isso usando a variável aleatória X do Exemplo acima. Recorde sua distribuição:

x	0	1	2	3
$\boldsymbol{P}[X = x]$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Recorde que $\boldsymbol{E}[X] = 3/2$. Definemos nova variável aleatória Y como $X - 3/2$. Eis a distribuição de Y:

y	0-3/2	1-3/2	2-3/2	3-3/2
$\boldsymbol{P}[Y = y]$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Observe que propositalmente eu não simplifico as expressões da primeira linha da tabela, quer dizer, eu não desejo que a tabela de distribuição adquira a seguinte forma:

x	-3/2	-1/2	1/2	3/2
$\boldsymbol{P}[X = x]$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Variância. Variancia de X é esperança de $(X - E[X])^2$. 2/3.

Agora, eu tomo Y construída acima e uso-a para construir a variável aleatória Z via $Z = Y^2$. Eis a distribuição de Z:

z	$(0-3/2)^2$	$(1-3/2)^2$	$(2-3/2)^2$	$(3-3/2)^2$
$\boldsymbol{P}[Z=z]$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Vamos agora escrever a expressão para $\boldsymbol{E}[Z]$:

$$\boldsymbol{E}[Z] = (0-3/2)^2 \times \frac{1}{8} + (1-3/2)^2 \times \frac{3}{8} + (2-3/2)^2 \times \frac{3}{8} + (3-3/2)^2 \times \frac{1}{8}$$

Como $\boldsymbol{E}[X] = 3/2$, então a expressão do lado direito da igualdade acima é $\mathrm{Var}[X]$. Juntando isso com o fato que $Z = (X - \boldsymbol{E}[X])^2$ (que segue-se diretamente da maneira de construção de Z via a variável aleatória Y), concluimos que

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = \boldsymbol{E}\left\{\left(X - \boldsymbol{E}\left[X\right]\right)^2\right\}, \tag{5}$$

quer dizer, concluimos que a variância (de X) é a esperança matemática (de $(X - \boldsymbol{E}[X])^2$).

Variância. Variancia de X é esperança de $(X - E[X])^2$. 3/3.

A primeira consequencia importante da conclusão feita acima é que

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = \boldsymbol{E}\left\{\left(X\right)^2\right\} - \left(\boldsymbol{E}\left[X\right]\right)^2$$

A demonstração que deriva essa fórmula não será apresentada, mas a fórmula será usada no cálculo de valor de $\mathrm{Var}[X]$. Na execução desta fórmula ajuda-lhe a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{E}\left\{\left(X\right)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \boldsymbol{P}[X = x_i]$$

(Naturalmente, $\left(\boldsymbol{E}\left[X\right]\right)^2$ é nada mais do que o quadarado da esperança de X, que você já sabe como calcular.)

A segunda consequência (que é importante na Teoria de Probabilidade, mas não será usada no nosso curso) é que por analogia podemos definir outros **momentos centrados** e também **não centrados** para qualquer variável aleatória :

$$\boldsymbol{E}\left\{\left(X - \boldsymbol{E}\left[X\right]\right)^k\right\}, \boldsymbol{E}\left\{\left(X\right)^k\right\}, k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Variância. Propriedades 1/1.

Propriedades principais da variância.

(a*) Se c é um número real e X é uma variável aleatória, então

$$\mathrm{Var}\left[\,cX\,\right] = c^2\,\mathrm{Var}\left[X\right]$$

(b*) Se c é um número real e X é uma variável aleatória, então

$$\mathrm{Var}\left[\,c + X\,\right] = \mathrm{Var}\left[X\right]$$

(c*) Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes (o conceito de **independência** será ensinado daqui a pouco), então

$$\mathrm{Var}\left[\,X + Y\,\right] = \mathrm{Var}\left[X\right] + \mathrm{Var}\left[Y\right]$$

Definição 5. Duas variáveis aleatórias X e Y se chamam **independentes**, caso

$$\boldsymbol{P}[X = x] \times \boldsymbol{P}[Y = y] = \boldsymbol{P}[X = x,\ Y = y], \tag{6}$$

para todo par de valores x, y que o par de variáveis aleatórias X, Y pode assumir.

Na definição acima, usaremos as notações $\boldsymbol{P}[X = x]$ e $\boldsymbol{P}[X = x,\ Y = y]$ como as abreviações das respectivas expressões

$$\boldsymbol{P}\left[\{\omega \in \Omega\ :\ X(\omega) = x\}\right] \text{ e}$$
$$\boldsymbol{P}\left[\{\omega \in \Omega\ :\ X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}\right]$$

Independência. Verificação com uso do experimento aliatério subjacente 1/3.

Exemplo 10. Voltaremos agora a nosso exemplo inicial, onde lançamos três moedas, e vamos mostrar que, entre as variáveis aleatórias nele definidas, X e Z são dependentes, enquanto que Y e V são independentes.

Para começar, repito abaixo a tabela que apresenta o modelo probabilístico da situação considerada no exemplo, e as variáveis aleatórias cuja relação de independência nos interessa conforme descrito acima.

ω	$\boldsymbol{P}[\omega]$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$V(\omega)$	$Z(\omega)$	$S(\omega)$	$U(\omega)$
HHH	1/8	3	0	1	0	9	1
HHT	1/8	2	0	1	1	4	1
HTH	1/8	2	0	-1	2	4	1
THH	1/8	2	1	1	1	4	1
HTT	1/8	1	0	-1	1	1	1
THT	1/8	1	1	1	2	1	1
TTH	1/8	1	1	-1	1	1	1
TTT	1/8	0	1	-1	0	0	1

Independência. Verificação com uso do experimento aliatério subjacente 2/3.

No segundo passo, uso a informação da tabela para construir as distribuições conjuntas do par X, Z e do par Y, V.

Z \ X	0	1	2	3
0	1/8	0	0	1/8
1	0	2/8	2/8	0
2	0	1/8	1/8	0

Y \ V	-1	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

Independência. Verificação com uso do experimento aliatério subjacente 3/3.

Para justificar a dependência entre X e Z, é suficiente observar

$$\frac{2}{64} = \frac{1}{8} \times \frac{2}{8} = \boldsymbol{P}[X = 0] \times \boldsymbol{P}[Z = 2] \neq \boldsymbol{P}[X = 0,\ Z = 2] = 0 \tag{7}$$

Vamos agora à verificação da independência entre Y e V. As contas que precisamos fazer para este fim estão abaixo.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[Y = 0] \times \boldsymbol{P}[V = -1] &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} = \boldsymbol{P}[Y = 0,\ V = -1] \\
\boldsymbol{P}[Y = 1] \times \boldsymbol{P}[V = -1] &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} = \boldsymbol{P}[Y = 1,\ V = -1] \\
\boldsymbol{P}[Y = 0] \times \boldsymbol{P}[V = 1] &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} = \boldsymbol{P}[Y = 0,\ V = 1] \\
\boldsymbol{P}[Y = 1] \times \boldsymbol{P}[V = 1] &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} = \boldsymbol{P}[Y = 1,\ V = 1]
\end{aligned} \tag{8}$$

Independência. Verificação a partir de tabela bi-variada 1/3.

Observe que a verificação de independência envolve distribuição conjunta (isto é, bi-variáda) das variáveis aleatórias, para as quais a propriedade de independência está verificada, e tambem as distribuições individuais destas variáveis. Como as distribuições individuais são as distribuições marginais da tabela conjunta, então toda a verificação de independência pode ser apresentada em forma de manipulação com tabelas:

(1) Tome a tabela da distribuição conjunta de par de variáveis X e Y. (As vezes, você vai precisar construir a tabela como foi no exemplo acima, mas as vezes tal tabela já está fornecida no próprio enunciado de exercício.)

(2) Fazendo somas por linhas da tabela e por suas colunas, faça as tabelas das distribuições marginais, que são as tabelas das distribuições individuais de X e de Y.

(3) Apague as probabilidades da distribuição conjunta e coloque nos seus lugares os produtos as probabilidades marginais.

Se a tabela resultante coincidir com a tabela original da distribuição conjunta, então X e Y são independentes; se não coincidir (em pelo menos uma casela da tabela), então X e Y são dependentes.

Independência. Verificação a partir de tabela bi-variada 2/3.

Nesta e na próxima transparência, há um exemplo de execusão do procedimento **1-3** descrito acima:

$Z \backslash X$	0	1	2	3
0	1/8	0	0	1/8
1	0	2/8	2/8	0
2	0	1/8	1/8	0

z	$\boldsymbol{P}[Z = z]$
0	2/8
1	4/8
2	2/8

x	0	1	2	3
$\boldsymbol{P}[X = x]$	1/8	3/8	3/8	1/8

Independência. Verificação a partir de tabela bi-variada 3/3.

Z \ X	0	1	2	3
0	$2/64$	$6/64$	$6/64$	$2/64$
1	$4/64$	$12/64$	$12/64$	$4/64$
2	$2/64$	$6/64$	$6/64$	$2/64$

z	$P[Z=z]$
0	$2/8$
1	$4/8$
2	$2/8$

x	0	1	2	3
$P[X=x]$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

A tabela no meio saiu diferente da tabela original de distribuição conjunta. A diferença garante que X e Z são dependentes.

Independência, esperança e variância. Uma observação 1/1.

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes e suponha que cada uma assume em número finito de valores (esta é uma condição técnica que pode ser relaxada). Nesse caso, valem as seguintes propriedades (já mencionadas acima):

$\boldsymbol{E}[X \times Y] = \boldsymbol{E}[X] \times \boldsymbol{E}[Y]$,

$\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$.

É importante ressaltar que SE X e Y são independentes, ENTÃO a esperança do produto delas é o produto das esperanças individuais, e a variância da soma das duas é a soma das suas variâncias, MAS A RECÍPROCA NÃO É VÁLIDA: existem casos de variáveis dependentes para as quais a esperança do produto delas é o produto das esperanças individuais, e a variância da soma das duas é igual à soma de suas variâncias.