Capítulo 1
Construção de modelos probabilísticos para experimentos aleatórios

1.1 Canonização dos conceitos primordiais

Recordo que o objetivo do capítulo todo é ensinar a construção de modelos probabilísticos para experimentos aleatórios. A presente seção apresenta os conceitos básicos envolvidos neste ensino. Tais conceitos estarão destacados em negrito no texto.

I. Por **experimento aleatório** entendemos experimento cujo resultado não é único, e dentro dos resultados que poderão ocorrer, é impossível apontar naquele que definitivamente ocorrerá antes de fazer o experimento. Esta definição usou os conceitos **experimento** e **resultado de experimento** que despensam suas definições pois não há divergências entre suas concepções por pessoas diferentes.

Construir um **modelo probabilístico** para um experimento aleatório significa:

(1) sugerir e apresentar uma codificação para os resultados do experimento;

(2) usando a codificação sugerida no passo *(1)*, apresentar a lista de todos os possíveis resultados (essa lista será chamada por **conjunto de todos os resultados** até que, pouco por pouco, acostumaremos-nos com seu nome científico tradicional que é **espaço de estados**; entretanto, vale notar que quase nunca o termo "resultado" será trocado pelo termo alternativo "**estado**");

(3) atribuir probabilidade a cada resultado do espaço de estados construido no passo *(2)*.

A parte difícil está na execução do passo *(3)*, quer dizer, na atribuição de probabilidade. A dificuldade na execução repercute na dificuldade de ensino do passo *(3)*; vamos precisar de um capítulo inteiro, eu – para ensinar, você – para aprender.

II. ↓ **Exemplo 1.** O presente exemplo esboçará significados práticos dos termos e conceitos usados em *(1)–(3)* acima. Sua leitura é opcional pois nas seções próximas, voltarei ao experimento aleatório desse exemplo e ao seu modelo com explicação detalhada e bem organizada.

Considere um dado de jogo de tabuleiro. Imagine que ele será lançado e que será observada sua face superior, quando ele parar de rolar. Para este experimento aleatório vou agora fazer seu modelo probabilístico de acordo com a definição *(1)–(3)*.

Todos nós conhecemos o dado de jogo de tabuleiro. Sabemos que ele tem 6 faces, marcadas com pontinhos de um a seis, e que qualquer face pode ficar em cima quando o dado para de rodar após ser lançado. Isso significa, nos termos formais acima introduzidos, que há 6 resultados possíveis. Vamos a codificação deles. Minha sugestão é codificar cada resultado pelo número árabe de acordo com a quantidade de pontinho na correspondente face. Outras codificações existem e elas não são nem melhor nem pior de que a que sugeri agora, mas vamos ficar com a sugerida. Com ela, a apresentação de todos os resultados possíveis toma a seguinte forma:

$$\Omega = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\} \tag{1.1}$$

A forma de apresentação tem um padrão matemático que será seguido em todo o texto: vamos usar as chaves "{" e "}" para agrupar resultados, e vamos separá-los por vírgulas; também, vamos usar a letra Ω ou S para se referir ao conjunto de <u>todos</u> os resultados possíveis. Com isso, as etapas *(1), (2)* foram completadas.

Vamos agora à etapa *(3)*. A resposta é assim: "Atribua-se a probabilidade 1/6 ao resultado 1, a probabilidade 1/6 ao resultado 2, e assim por diante." Essa atribuição expressa-se em símbolos matemáticos assim (nós vamos manter esse padrão no texto todo):

$$\mathbb{P}[1] = 1/6,\ \mathbb{P}[2] = 1/6, \ldots, \mathbb{P}[6] = 1/6 \tag{1.2}$$

A <u>justificativa</u> do porquê 1/6 para cada resultado será dada no futuro próximo. Por enquanto, só mostrei a <u>execução</u> das etapas *(1)-(3)* supradefinidas.

Fim do Exemplo 1↑

É importante que você, meu leitor, seja avisado que todos os experimentos aleatórios desse texto aparecerão com a devida, completa e indúbia descrição daquilo que está executado em cada experimento aleatório e daquilo que está nele observado. O Exemplo 1, pelo qual passamos agora, dá-lhe um claro exemplo de como serão tais descrições. A consequencia disso é que você, meu leitor, nunca terá dificuldades na realização das etapas *(1)* e *(2)* quando você for solicitado a construir modelos probabilísticos. Tome isso como garantido mesmo se no momento você não imagina ainda como serão as prometidas descrições.

No mundo fora de meu livro, não todos os experimentos aleatórios são descritos com o cuidado adequado. Todos os casos ´´infelizes" podem ser separados em duas classes. A primeira classe contém os fenómenos de Natureza reais, cuja complexidade nos impede conceber todos os detalhes de tudo que acontece. Na segunda classe encontram-se os exemplos didáticos. As vezes sua descrição está corrumpida com o propósito de criar exercícios difíceis. As vezes, a descrição está ruim devido um simples descuido ou inexperiência de professor. Exemplos desta natureza não faltam na vida real, e alguns será apresentados no meu livro.

III. Vamos então começar a falar sobre a parte mais complicada do conteúdo do presente capítulo que é a atribuição de probabilidade aos resultados dum modelo probabilístico. Infelizmente, não achei uma maneira de ensinar essa atribuição que seja totalmente formal e que garanta que a execução desse formalismo levaria sempre e unicamente ao resultado correto. Ao dizer "não há maneira formal" eu quero transmitir lhe a mensagem de que toda vez que você for atribuir probabilidades você precisará empregar sua intuição. Isso complica minha vida como professor: não consigo oferecer explicações iqualmente claras para todos os alunos, já que intuição difere-se de pessoa para pessoa.

▷ Aquí estão algumas situações que mostram a diversidade das intuições de pessoas acerca do conceito "probabilidade". Imagine que você mostrou o dado de jogo de tabuleiro para um índio, que nunca o viu, e perguntou dele da probabilidade do dado mostrar 6 quando for lançado. Certeza é que a resposta será: "Depende do vontado do Deus-de-todos-os-dados. E se você agradá-lo, ele vai atender sua vontade de ver 6 no dado." Como exemplo de outra intuição acerca da mesma situação, conto-lhe que minha filha, quando tinha 4 anos, jogou no lixo um dado "imprestável" somente porque ele mostrou a face 6 três vezes seguidas nos lançamentos feitos por pai dela quando ela e o pai jogaram um jogo de tabuleiro. E por fim, temos o exemplo de sua intuição que facilmente concordou com o Exemplo 1 que alegou que a probabilidade do dado mostrar a face 6 é $1/6$.

O efeito negativo da diversidade de intuição no ensino de atribuição de probabilidade está resolvido nesse texto da seguinte maneira: Eu assumo que cada leitor possui intuição razoável acerca do conceito "probabilidade" e que ela/ele consegue se convencer que sua intuição aceita a propriedade da probabilidade formulada da Definição 1. Então, baseado na crença que essa propriedade é aceita por todos, eu declaro que ela será a definição de probabilidade no meu texto.

Definição 1. *(Esta definição aplica-se somente aos experimentos aleatórios cujo conjunto de resultados é finito ou enumerável. Os experimentos do segundo tipo estão tipicamente fora do escopo das disciplinas de duração de um semestre que ensinam Probabilidade e Estatística básicas.)*

A **probabilidade** de um resultado num experimento aleatório é o valor assintótico da frequencia relativa do aparecimento deste resultado numa sequencia de repetições do experimento.

A definição lhe disse que para determinar a probabilidade de um resultado dum experimento aleatório, você deve repetir o experimento, e em cada passo da sequencia de reptições calcular a frequencia relativa das vezes nas quais o resultado foi observado; o limite destas frequencias é a desejada probabilidade. Naturalmente, ninguém tem tempo para executar infinitas repetições. Para nós, então, serve o conceito “uma longa sequencia de repetições”. É assim que entendemos a definição. Qual longa a sequencia deve ou pode ser será claro da consideração de exemplos da parte **IV**.

▷ Gostaria de comentar que existem maneiras alternativas para definir a probabilidade, mas que a definição escolhida provou ser a mais cómoda nas tarefas de explicações e de demonstrações que aparecem no meu texto.

IV. Acabei de introduzir a definição do conceito “probabilidade de um resultado”. Começo agora uma longa exposição sobre como calcular seus valores (ou, nas palavras já usadas acima, como atribuir valor à probabilidade de um dado resultado num dado experimento aleatório).

Vamos chamar de **primordial** aquele experimento aleatório cujo modelo probabilístico constroí-se com emprego direto da Definição 1. Exemplos abaixo mostram alguns de tais primordiais. Espero que eles sejam suficientes para que você, meu leitor, entenda o significado deste termo.

↓ **Exemplo 2.** Ficarei amanhã (das 0 as 24 horas) na Praça da República em São Paulo e observarei se chove neste local neste período pelo menso uma vez. Pergunta-se dar a probabilidade de observar a chuva. Para que possamos fazer a previsão, possuimos o histórico de 30 dias com as condições climáticas semelhantes as de hoje, e sabemos que em 12 dos 30, no dia seguinte choveu na Praça da República, enquanto que em 18 dos casos restantes não caiu nenhuma gota.

O enunciado afirma que o tamanho máximo da sequenica de repetições do experimento aleatório que conseguimos proferir é 30, e que a frequencia relativa das observações de chuva nestas repetições é 12/30, enquanto que a dos dias sem chuva é 18/30. Então, devido a própria “indicação” do enunciado, à probabilidade de chuva amanhã deve ser atribuido o valor 12/30. ↑

↓ **Exemplo 3.** A discussão está relacionada ao Exercício 6 que aparecerá na Seção 1.5; eis este abaixo:

> Um açougue será inagurado hoje e tem 50% de probabilidade de receber carne de um frigorífico contratado para seu abastecimento. A cada dia consecutivo, a probabilidade de haver carne no açougue depende somente do fato de ter havido carne ou não no dia anterior, obedecendo a seguinte regra: 60% de chances de encontrar carne no açougue se, no dia anterior, esse produto estava disponível, e 30% se, no dia anterior, ela estava em falta. Ao tomar conhecimento sobre a inaguração do açougue, uma dona de casa resolveu ir até ele daqui dois dias. Determine a probabilidade dessa senhora encontrar a carne no acougue.

No foco de nossa atenção agora está somente o primero dia. Qual é a probabilidade que devemos atribuir ao resultado “ter carne no açougue no dia ulterior ao dias de inaguração”? Para responder, devemos entender a informação fornecida pelo enunciado da seguinte forma: foram analisados os históricos de acougues e foi constatado que em 50% dos casos açougue recebia carne no dia ulterior à enaguração, e em outros 50% não recebia. Não fomos informados quantos casos faram analisados, mas isto é disnecessário pois recebemos a informação em termos finais: as frequencias relativas dos que receberam e que não são 50%–50%. Claro que estas não são frequencias relativas assintóticas, mas é o melhor que podemos ter. Portanto, ao aplicar a Definição 1, deduzimos que a probabilidade de nosso açougue receber carne no dia ulterior à sua inaguração é 0,5.

Exemplo 4. Fabriquei um **dado perfeito**, quer dizer, um corpo em forma de cubo perfeito feito de material homogêneo, e marquei os numeros 1, 2, 3, 4, 5 e 6 em suas faces. Lançarei este dado e observarei o número de sua face superior, quando ele parar de rolar. Qual é a probabilidade de ver o número 3?

Devo dizer-lhe que é o mesmo dado que já foi considerado no Exempolo 1. Só que agora tomei mais cuidado pera descreve-lo; tal descrição será importante no momento da discussão acerca de atribuição de probabilidade. Ah, e há mais uma alteração: escrevi $1, 2, \ldots$ nas faces onde costumeiramente coloca-se um ponto, dois pontos, etc. Com isso minha exposição fica mais simples, no sentido que poderei dizer, por exemplo, "observo 1" em vez de "observo a face com um ponto".

No modelo probabilístico deste experimento aleatório, a atribuição de probabilidade segue a regra

$$\mathbb{P}\,[\text{qualquer resultado}] = \frac{1}{\text{a quantidade dos resultados possíveis}} \tag{1.3}$$

(o que, no presente caso, acarreta no que $\mathbb{P}[1] = \mathbb{P}[2] = \cdots = \mathbb{P}[6] = 1/6$). A justificativa é o **princípio de simetria**, cuja expressão é assim: de acordo com o enunciado, todas as faces são semelhantes no sentido de que não há motivos para que uma das faces apareca mais frequentemente que qualquer outra na sequencia infinita de repetições de lançamento do dado. Ao aplicar Definição 1, conclui-se então o resultado (1.3).

V. O princípio de simetria introduzido no Exemplo 4 aplica-se também aos casos listados abaixo.

• Um disco perfeito (no sentido de sua forma geométrica), fino, fabricado de material homogêneo, com "cara" escrito numa face (lado) e "coroa" na outra chama-se **moeda honesta**. Seu **lançamento** e o experimento aleatório no qual a moeda se lança e observa-se sua face superior quando a mesma parar. O modelo probabilístico para tal experimento aleatório está abaixo; é na atribuição da probabilidade que usa-se o principio de simetria:

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\} \text{ e } \mathbb{P}[\text{cara}] = \mathbb{P}[\text{coroa}] = 1/2.$$

▷ Eu escrevi "cara" e "coroa" na minha moeda honesta para não precisar entrar em detalhes das caras e coroas esculpidas nas moedas originais e obrigar meus leitores a aceitar que seus baixo-relevos não desequilibram a moeda. Alias, vale notar que a gente escreve "cara" e "coroa" seguindo a tradição de moedas da terra lusitana. Entretanto, o idioma desse lindo lugar fez com que as duas palavras comecem com a mesma letra impedindo assim a codificação por "c" e "c". Por isso, há quem prefere "head" e "tail" e usa a codificação "h" e "t".
De outro lado, é muito frequente a idéia de uma moeda ser lançada para um jogo de azar. Por exemplo, se José combinar que ganhe R$ 1,00 de Pedro na "cara" e perde R$ 1,00 na "coroa", então é cômodo codificar o resultado "cara" com $+1$ e o resultado "coroa" com -1. Vale ainda notar que caso no mesmo experimento aleatório estivermos interessados em calcular ganhos e perdas de Pedro, e não de José, então a codificação mais interessante seria $+1$ para "coroa" e -1 para "cara".
A observações que fiz acima acerca da marcação das faces de moeda honesta dão, em soma, um exemplo paupável de um experimento aleatório que pode ser codificado em, no mínimo, quatro maneiras diferentes. Espero que tudo isso deixa claro que a escolha da codificação depende dos objetivos do estudo e de aplicação de experimento aleatório.

• Por **tetraedro** entende-se nesse texto o tetraedro – corpo com 4 faces, cada uma das quais é um tirângulo equilátero, – com os números 1, 2, 3, 4 marcados nas faces. Assume-se que o tetraedro foi fabricado de material homogêneo e que a tinta usada para desenhar os números não tem nem volume nem peso. Isso implica na simetria do tetraedro que está usada na atribuição de probabilidade do modelo probabilístico para o **lançamento de tetraedro**, o que é o experimento aleatório no qual esse é lançado e o número de sua face inferior é observado, quando o tetraedro parar de rolar. Eis o modelo com o uso da codificação óbvia de seus resultados:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } I\!P[1] = I\!P[2] = I\!P[3] = I\!P[4] = 1/4.$$

Noto que não chamo meu tetraedro "perfeito" pois não pretendo lançar tetraedros inperfeitos no texto do livro.

• Fabriquei n bolas idênticas em tamanho e feitas de mesmo material – de madeira, por exemplo–, enumerei as bolas de 1 a n, marcando números a lapis, coloquei-as numa urna e misturei bem. A **retirada (aleatória,** ou, em outras plavaras, **ao acaso) de uma bola da urna contendo n bolas** é o nome do experimento aleatório no qual sem olhar dentro da urna, retira-se dela uma bola o observa-se o número da mesma. Que as bolas foram misturas, que são idênticos no tato e que retira-se uma delas sem olhar pra dentro são os fatos que, em conjunto, garantem a simetria, a qual, por sua vez, garante a igualdade das probabilidades no modelo probabilístico para esse experimento aleatório:

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n-1, n\} \text{ e } I\!P[1] = I\!P[2] = \cdots = I\!P[n] = \frac{1}{n}$$

▷ Observe que retirar uma bola de urna com 2 bolas é a mesma coisa que lançar uma moeda honesta com números 1 e 2 nas suas faces, sendo que "a mesma coisa" significa que o modelo probabilístico para os dois é a mesma coisa. No mesmo sentido, são semelhantes a retirada de bola de urna com 4 bolas e o lançamento de tetraedro, e também são semelhantes e retirada de urna com 6 bolas e o lançamento de um dado perfeito. Entretanto, as urnas dão-me mais liberdade e flexibilidade didática, pois se precisar de um experimento aleatório com 13 resultados equiprováveis, poderia usar a urna com 13 bolas, enquanto que lançar moedas, dados tetraedros ou outros corpos tri-dimensionais não produz facilmente 13 resultados equiprováveis. Por isso, eu poderia formular todos os meus exemplos e exercícios usando urnas. Mas evitei esse caminho pois imaginei que leitor ia reclamar "Uma urna aqui, uma urna ali, uma outra urna no final de vida (se concordar ser cremado após a morte) ... que coisa chata!" Bom, ao meu ver, entre as urnas que aparecerão no livro e aquela que te espera no final de sua vida, há muitas coisas gostosas a serem experimentadas... Anime-se!

VI. Então, nós aprendemos a atribuir probabilidade nos modelos probabilísticos dos experimentos aleatórios que ou são primoridais ou são tais que neles aplica-se o princípio de simetria. Infelizmente, não todos os experimentos aleatórios atendem a um destes dois quesitos. Para aprender o caminho genérico de atribuição de probabilidade, precisamos da classificação auxiliar de experimentos aleatórios por três categorias; simples, sequenciais- compostas- por- simples e danadinhos. A classificação será apresentada em seguida. Para o efeito de tal apresentação, preciso introduzir o conceito **fonte de aleatoriedade**. Exemplos de fontes de aleatoriedade são: dado lançado, moeda lançada, urna com bolas. Ainda mais, com o intuíto de dar uniformidade a minha futura exposição, eu decidi que qualquer experimento aleatório primordial deve ser enchergado como resultado de ação de fonte de aleatoriedade. Por exemplo, no Exemplo 2 sobre chuva na Praça da República há uma fonte de aleatoriedade que faz chover ou não. Também, há uma fonte que faz que fornecedor traga carne ao açougue ou não no ambiente do Exemplo 3. Mas se o açougue estiver na Praça da República e se a gente se interessar pela chuva na praça amanhã e pela possibilidade de ir comprar carne enquanto esperamos ver a chuva, aí nesta situação há duas fontes de aleatoriedade.

Infelizmente, não achei uma definição rigorosa para o conceito "fonte de aleatoriedade", e por isto deixo ele como intuitivo. Naturalmente, intuições de duas pessoas diferentes podem divergir-se. Tal divergência pode fazer com que um mesmo experimento aleatório seja classificado em categorias diferentes por pessoas diferentes. Não se preocupe com isto por enquanto, pois a classificação por simples, sequenciais-compostos-por-simples e danadinhos é intermediária. A classificação final que virá depois será induvidosa.

VII. Vamos então às regras da classificação anunciada acima.

Por **simples** chama-se experimento aleatório que ou é primordial, ou possui uma única fonte de aleatoriedade, quer dizer, seu resultado determina-se por uma só fonte de aleatoriedade. Por exemplo, os experimentos dos Exemplos 2 e 3 são simples, assim como é lançamento de <u>um</u> dado, lançamento de <u>uma</u> moeda, retirada de <u>uma</u> bola de urna. Existem experimentos aleatórios que obviamente não enquadram-se na definição de simples. Por exemplo, a situação mencionada no Exemplo 3 que considera o açougue em três dias consecutivas não é experimento aleatório simples, pois cada um dos dias é um experimento primordial por si. Também, o lançamento simultâneo de dois dados, apresentado abaixo no Exemplo 5, não é um experimento aleatório simples, pois cada dado é uma fonte de aleatoriedade, e, portanto, o experimento possui duas destas. Pela mesma razão não são simples os experimentos aleatórios dos Exemplos 6 e 7. O último requer uma explicação adicional: em todas as retiradas do experimento aleatório deste exemplo utiliza-se a mesma bolsa (que pode ser interpretada como urna), mas a composição de tiras na bolsa altera-se após cada retirada, fato que acarreta que o experimento aleatório utiliza mais que uma fonte de aletoriedade.

Exemplo 5. Tomei dois dados idênticos, ambos perfeitos no sentido do Exemplo 4. Lançarei os dados simultaneamente e observarei os números nas suas faces superiores.

Exemplo 6. Tomei uma moeda honesta e duas urnas com bolas. As urnas são diferentes, e para o fim de identificação marquei uma com I e a outra com II. Na urna I, há 3 bolas com números 1, 2 e 3, e na urna II há 4 bolas com números 2, 3 ,4 e 5.

Farei o seguinte: lançarei a moeda e observarei sua face superior quando ela parar. Se a moeda mostrar "cara", retirarei uma bola da urna I e observarei seu número. Já se a moeda mostrar "coroa", retirarei uma bola da urna II e observarei seu número.

Exemplo 7. Numa das primeiras aulas do curso Estatística Básica peguei uma folha de papel e cortei-a em tiras idênticas, 60 em número, igual ao número de alunos na sala. Numa tira marquei X com lápis, coloquei todas na minha bolsa e chaqualei-a. "Cada aluno, em ordem alfabética, virá à mesa do professor e retirará uma tira, sem olhar dentro da bolsa; as tiras retiradas não se devolvem para a bolsa" – anunciei para a turma. "Quem retirar a tira marcada, será passado no curso sem precisar fazer provas. Só que antes de comecarmos, peço que me respondam: Qual é a probabilidade que o sortudo seja o primeiro dos alunos, e qual é a probabilidade que seja o último?"

VIII. Continuamos com as regras de minha classificação de experimentos aleatórios. Acima, já definimos a classe de simples. Agora definimos a classe de **sequenciais-compostos-por--simples**. O próprio nome reflete a estrutura que um experimento aleatório deve possuir para pertencer a tal classe: ele tem que ter etapas sequenciais no tempo, sendo que em cada etapa executa-se um experimento aleatório simples. Por exemplo, o experimento aleatório do Exemplo 6 está nesta classe pois ele compõe-se de duas etapas: na primeira etapa lança-se uma moeda, e na segunda etapa escolha-se uma bola de uma das urnas. Observe que a urna a ser usada na 2-a etapa depende do resultado visto na moeda na etapa anterior. Tal dependência está permitida. Um outro experimento aleatório sequencial-composto-por-simples é o do Exemplo 7. Observe que a quantidade das etapas do experimento varia-se pois o experimento termina logo que a tira marcada for aparecer. Tal veriedade também é permitida. Com o intuito de esclarecimento da definição, apresento abaixo mais três experimentos aleatórios. O experimento aleatório do Exemplo 8 é sequencial-composto-por-simples, mas os dos Exemplos 9 e 10 não.

Exemplo 8. Tomei duas moedas honestas, uma de 10 centavos e outra de 1 Real.
Lançarei primeiramente a moeda de 10 centavos e observarei sua face superior, e depois lançarei a moeda de 1 Real e observarei sua face superior.

Exemplo 9. Tomei duas moedas honestas, uma de 10 centavos e outra de 1 Real.
Lançarei as moedas simultaneamente e observarei suas faces superiores, fazendo a distinção entre as moedas, quer dizer, o resultado "cara" na menor moeda e "coroa" na maior é diferente do resultado "coroa" na menor moeda e "cara" na maior.

Exemplo 10. Tomei duas moedas honestas, idênticas (ambas de 10 centavos).
Lançarei as moedas simultaneamente e observarei a quantidade de caras e coroas mostradas em suas faces superiores.

IX. Finalizaremos agora a classificação de experimentos aleatórios. Já definimos a classe de simples e a classe de sequenciais-compostos-por-simples. A terceira e a última classe tem definição fantástica: nela pertence todo experimento aleatório que ou claramente não está nas duas primeiras classes, ou sobre o qual não temos certeza se ele pode ser atribuído à primeira ou a segunda classe. Por exemplo, os experimentos aleatórios dos Exemplos 9 e 10 estão na terceira classe. Além destes dois, eu colocaria em terceira classe os experimentos aleatórios dos dois problemas formulados nos Exemplos 11 e 12 abaixo:

Exemplo 11. Uma vez, comprei para filha 5 pares de meias: 2 pares azuis e 3 pares vermelhas. As meias diferem-se só pela cor. Um dia, todas elas foram para máquina de lavar roupa e sairam de lá diretamente para a gaveta da cômoda no quarto da filha. No manhã do dia seguinte, ainda no escuro, apanhei duas meias quaisquer da gaveta, vesti a filha, coloquei no carro e levei-a para escolinha. Qual é a probabilidade de eu ouvir da filha, quando ela for acordada, ainda no carro, pelo nascer do sol: "Papai! Você colocou meias de cores diferentes!"

Exemplo 12. Numa escola há 7 professores e 3 professoras. Do total destes 10, será formada uma comissão de três pessoas. Qual é a probabilidade que na comissão formada haja exatamente uma mulher?

Observe que os Exemplos 11 e 12 não expecificam claramente a maneira usada na escolha de meias e de professores, respectivamente. Isto impede que possamos decidir se eles estão ou nas classes 1 ou 2. É está dúvida que causou a ida deles para a classe 3. É claro que no futuro, após adquirir amplos conhecimentos sobre a construção de modelos probabilísticos, votaremos a tais exemplos a exclareceremos por completo tanto os seus defeitos quanto os caminhos de sua correção. Veremos que nossa presnete dúvida acerca da estrutura de escolha tem boa razão de existir: ela surge em resposta ao descuido dos autores destes exemplos. Acontece que as vezes tal descuído é proposital: ele destina-se a complicação da vida daqueles que desejam resolver as questões colocadas nos exemplos. Por causa desta maldade, a terceira classe de experimentos aleatórios chama-se **danadinhos**.

1.2 Construção de modelo probabilístico para experimentos aleatórios simples

No final da seção anterior chegamos à classificação de todos os experimentos aleatórios. Recorde que aleguei que tal classificação é útil para a organização do ensino de construção de modelos probabilísticos para experimentos aleatórios. A presente seção trata a classe daqueles que foram chamados de simples. Antes de começar, gostaria de recordá-lhe que a principal dificuldade na construção de modelo probabilístico é a atribuição de probabilidade. Por isto é que a apresentação a seguir está focada nesta.

I. Na maioria dos experimentos aleatórios simples, a atribuição de probabilidade nos seus modelos probabilísticos ou segue diretamente a Definição 1 (tais casos foram ilustrados nos Exemplos 2 e 3) ou emprega o princípio de simetria (conforme explicado e ilustrado no Exemplo 4). Além destes dois, emprega-se também uma ferramenta auxiliar chamada **extensão-redução**. Esta será explicada na presente seção por via de suas Exemplos 13 e 14.

II. $\downarrow$ **Exemplo 13.** Tomei um dado perfeito e pintei as faces 1 e 2 de branco, e as faces 3, 4, 5, 6 de preto. Os números são visíveis atravez da tinta, e a própria tinta não tem nem peso nem volume, o que garante que o dado continua ser perfeito.

O dado será lançado e uma pessoa, chamada $\mathcal{W}$alter, observará a cor da face superior. Note que $\mathcal{W}$alter observa somente a cor; para poder dar a justificativa disto, combinamos que $\mathcal{W}$alter simplesmente esqueceu seus óculos e portanto não consegue enxergar os número de faces do dado. A tarefa é construir o modelo probabilístico para $\mathcal{W}$alter.

Você, meu querido leitor, certamente sabe a resposta. Eis esta (o subscrito "$\mathcal{W}$" fica para indicar que tudo corresponde á maneira como $\mathcal{W}$altervé as coisas):

$$\Omega_{\mathcal{W}} = \{branco, preto\},\ \mathbb{P}_{\mathcal{W}}[branco] = 2/6,\ \mathbb{P}_{\mathcal{W}}[preto] = 4/6 \tag{1.4}$$

Mas se eu lhe perguntar acerca da justificativa por você usada para a atribuição de probabilidade, você vai ter que concordar que esta não é nenhuma das duas canónicas mencionadas em **I** acima. Certeza é que você usou um argumento auxiliar. É exatamente o argumento que eu pretendo mostrar abaixo. Minha apresentação, portanto, não é nenhuma grande revelação para você. Mas ela tem valor didático, pois ajuda colocar suas ideias em ordem. Isto é importante, pelo menos para os argumentos que serão usados na Seção 1.4.

Para construir minha solução, preciso de uma pessoa auxiliar; esta será chamada de $\mathcal{Z}$elda. Ela está ao lado do $\mathcal{W}$alter e observa o mesmo experimento aleatório, só que ela enxerga tanto a cor quanto o número.

O primeiro passo no caminho de elaboração de resposta é a construção do modelo probabilístico do experimento aleatório como é visto pela $\mathcal{Z}$elda. Esse passo inicia-se com uma codificação dos resultados. Para que essa seja correta, é importante conceber que – de acordo com o próprio enuncaido – $\mathcal{Z}$elda observa dois quesitos: o número e a cor. A codificação deve representar os dois. Uma das sugestões que atende esse requerimento é assim: "número cor". Ao aceitar a sugestão e ao percorrer por todoas as faces do dado, chegamos à seguinte representação do conjunto de todos os resultados que $\mathcal{Z}$elda poderá ver:

$$\Omega_{\mathcal{Z}} = \{1branca, 2branca, 3preta, 4preta, 5preta, 6preta\} \tag{1.5}$$

▷ Acerca da codificação escolhida e usada, vale observar que ela não é única. Eis em seguida, uma das outras possíveis codificações, que está aquí ao titulo de exemplo e não será usada no que se segue: $\Omega_{\mathcal{Z}} = \{1, 2, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$ (observe, que **3**, **4**, **5**, **6** estaõ em negrito mas 1, 2 não).

▷ Ainda falando sobre a codificação, gostaria de notar que eu evitei usar aquela que parece a mais natural para a maioria de pessoas; é a codificação $(1, branca), \ldots (6, preta)$. A razão de inapropriedade desta na questão agora tratada é que os símbolos matemáticos nela usados insinuam que primeiramente foi visto número e depois cor. Tal codificação é mais apropriada para ser usada em experimentos aleatórios sequenciais. Nós vamos discutir tudo isto em detalhes na Seção 1.3.

O segundo passo é a atribuição de probabilidade. No caso, fizemos isso pelo princípio de simetria, que aplica-se ao caso já que foi declarado no próprio enunciado que o dado pintado continua ser perfeito após ter recebido a pintura. Como o princípio de simetria manda atribuir a mesma probabilidade a cada uma das 6 faces do dado, chegamos ao seguinte resultado:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{Z}}[\omega] = 1/6 \text{ para cada } \omega \in \Omega_{\mathcal{Z}} \tag{1.6}$$

Pronto: (1.5) com (1.6) representa o modelo probabilístico para o experimento aleatório visto pela $\mathcal{Z}$elda; o subsrito “$\mathcal{Z}$” ajudará a distinguir esse de outros modelos que aparecerão nas discussões futuras.

O emprego do modelo de $\mathcal{Z}$elda na construção do modelo de $\mathcal{W}$alter dá-se via a tabela que relaciona suas observações:

$\mathcal{Z}$elda vê um dos resultados listados abaixo	se e somente se	$\mathcal{W}$alter vê o resultado colocado na mesma linha
$1branca$, $2branca$		$branca$
$3preta$, $4preta$, $5preta$, $6preta$		$preta$

A tabela implica no que (esta implicância pode ser deduzida rigorosamente a partir da Definição 1, mas tal dedução não está no foco da apresentação):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}[1branca] + \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}[2branca] &= \mathbb{P}_{\mathcal{W}}[branca] \\ \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}[3preta] + \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}[4preta] + \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}[5preta] + \mathbb{P}_{\mathcal{Z}}[6preta] &= \mathbb{P}_{\mathcal{W}}[preta] \end{aligned} \tag{1.7}$$

Estas equações, junto com as probabilidades da $\mathcal{Z}$elda expressas em (1.6) dão os procurados valores para as probabilidades do $\mathcal{W}$alter: $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}[branco] = 2/6$, $\mathbb{P}_{\mathcal{W}}[preto] = 4/6$.

Fim do Exemplo 13↑

III. As equações (1.7) são comumente expressas em forma diferente daquela usada por mim acima. A forma alternativa usa a linguagem de eventos. Tudo que tem a ver com eventos estará apresentado na Seção 2.1Entretanto, algumas propriedades de eventos serão úteis antes da gente chegar a tal seção. Em particular, sem usar eventos os exercicios do presente capítulo ficariam muito sem graça. Então, vou apresentar abaixo o pouco que precisamos saber sobre eventos até que entrarmos na Seção 2.1.

Na Teoria de Probabilidade, há tradição de chamar por **evento** qualquer conjunto formado de resultados de qualquer espaço amostral. Também, é tradição dizer **evento ocorre** ou **acontece**, quando o correspondente experimento aleatório dá um dos resultados pertencentes ao evento. Vamos aderir à tal tradição.

A probabilidade de um evento ocorrer, ou **acontecer**, ou, simplesmente, **a probabilidade de um evento** entende-se na Teoria de Probabilidade como o valor igual à soma das probabilidades de todos os resultados que compõem o evento. Isso é um dos axiomas, aos quais a probabilidade deve atender. É simplesmente um axioma!

▷ Esclareço, para os quem esteja curioso, que o axioma supramencionado é aquele que alega que a probabilidade é uma função aditiva.

Num exercício, num exemplo, ou simplesmente numa exposição desse livro, um evento pode ser descrito verbalmente, como, por exemplo, "ver cor branca", ou explicitamente, como por exemplo "$\{1branca, 2branca\}$"; ambos os casos foram exibidos pelo Exemplo 13. Entretanto, a descrição explicita é imprescindível na hora do cálculo de probabilidade de evento. É por isso que haverá sempre a "tradução" de descrição verbal para a correspondente descrição explicita. As vezes, o caminho de tradução é óbvio, mas demanda tempo e espaço; nesses casos, eu prefirirei introduzir o evento, que me interessa, já em fórma explicita.

Então, com uso do conceito "evento", a relação entre as observações de $\mathcal{Z}$elda e de $\mathcal{W}$alter apresentada originalmente por uma tabela adquira a seguinte expressão:

$$\text{ocorre o evento } B = \{1branca, 2branca\} \text{ se e somente se } \mathcal{W}\text{alter vé } branca$$
$$\text{ocorre o evento } P = \{3preta, 4preta, 5preta, 6preta\} \text{ se e somente se } \mathcal{W}\text{altervé } preta$$

Isto implica que $I\!\!P_{\mathcal{Z}}[A] = I\!\!P_{\mathcal{W}}[branca]$ e $I\!\!P_{\mathcal{Z}}[B] = I\!\!P_{\mathcal{W}}[preta]$, o que leva a concluir que $I\!\!P_{\mathcal{W}}[branco] = 2/6$, $I\!\!P_{\mathcal{W}}[preto] = 4/6$. Note entretanto, que as equações que vinculam $I\!\!P_{\mathcal{Z}}$ a $I\!\!P_{\mathcal{W}}$ são idênticas às equações (1.7). Quer dizer, o uso da linguagem de eventos não acrescenta nada além de uma certa comodidade.

IV. $\downarrow$ **Exemplo 14.** Este é o segundo dos exemplos destinados à introdução do princípio de extensão-redução.

Peguei uma urna com 5 bolas, apaguei os números e pintei 2 em branco e outras três em preto. Retirarei uma bola da urna. Meu amigo $\mathcal{X}$avier está ao meu lado; ele vai observar a cor da bola retirada. A tarefa é construir o modelo probabilístico correspondente à observação do $\mathcal{X}$avier.

Acredito que você, meu leitor, sente que a tarefa é simples e que a resposta é naturalmente assim:

$$\Omega_{\mathcal{X}} = \{branca, preta\}, \; I\!\!P_{\mathcal{X}}[branca] = 2/5, \; I\!\!P_{\mathcal{X}}[preta] = 3/5 \tag{1.8}$$

onde *branca* e *preta* codificam as cores branca e preta, respectivamente, que possam ser vistas pelo $\mathcal{X}$avier.

A resposta está certa. Entretanto, permita me questionar: "Qual é a justificativa para a atribuição de probabilidade no modelo (1.8) (a respeito de codificação e da elaboração de $\Omega_{\mathcal{X}}$ não há dúvidas)?" Observe que a questão é legítima, pois não há simetria entre as cores no experimento aleatório considerado.

Acredito que sua resposta seria assim: "É como se fosse que os números não foram apagados, mas que $\mathcal{X}$avier não enxerga-los. Nesse caso, as bolas são diferente, o principio de simetria se aplica e dá a probabilidade $1/5$ para cada bola. Como duas das cinco bolas são brancas e outras três são pretas, então $\mathcal{X}$avier verá branca com probabilidade $2 \times 1/5 = 2/5$, e verá preta com a probabilidade $3 \times 1/5 = 3/5$."

A idéia do raciocínio apresentado acima está correta, mas eu preciso colocá-la em termos formais e precisos. Farei isto abaixo. (Precisamos aprender o formalismo para as necessidades futuras que surgirão devido à complexidade dos experimentos aleatórios que serão tratados nas seções seguintes.)

Então, pego as bolas pintadas e coloco os números 1 e 2 nas bolas brancas e números 3, 4, 5 nas bolas pretas. Devolvo as bolas para urna e as misturo. Vou retirar uma bola ao acaso.

Observe que o experimento aleatório acima construído é diferente do experimento aleatório original. Mas eu peço do $\mathcal{X}$avier se afastar de mim pela distância que garante que os números não sejam vistos. Consequentemente, na perspectiva do $\mathcal{X}$avier, o experimento aleatório é o mesmo.

Antes de iniciar a retirada, chamo minha amiga $\mathcal{Y}$olanda, peço que esteja ao meu lado e que observa o número e a cor da bola que será por mim retirada.

O modelo probabilístico correspondente à observação da $\mathcal{Y}$olanda constroi-se facilmente usando o princípio de simetria; eis o modelo:

$$\Omega_{\mathcal{Y}} = \{1branca, 2branca, 3preta, 4preta, 5preta\} \text{ e } I\!P_{\mathcal{Y}}[\omega] = 1/5 \text{ para qualquer } \omega \in \Omega \quad (1.9)$$

O subscrito $\mathcal{Y}$ foi colocado para poder distinguir este modelo do outro que fazemos para $\mathcal{X}$avier. Recorde que $\Omega_{\mathcal{X}} = \{branca, preta\}$ e que estamos procurando pela maneira correta de atribuição de $I\!P_{\mathcal{X}}$.

Para colocar $I\!P_{\mathcal{X}}$ nos elementos de $\Omega_{\mathcal{X}}$ faz-se a tabela de relação entre as observações de $\mathcal{Y}$olanda e $\mathcal{X}$avier:

$\mathcal{X}$avier vê *branca* se e somente se $\mathcal{Y}$olanda vê ou 1*branca* ou 2*branca*
$\mathcal{X}$avier vê *preta* se e somente se $\mathcal{Y}$olanda vê ou 3*preta* ou 4*preta* ou 5*preta* ou 6*preta*

Tais relações entre observações acarretam as seguintes relações entre probabilidades (escritas já com uso da linguagem de eventos introduzida na parte **III** acima):

$$\begin{array}{rcl} I\!P_{\mathcal{X}}[branca] & = & I\!P_{\mathcal{Y}}[\{1branca,\ 2branca\}] \\ I\!P_{\mathcal{X}}[preta] & = & I\!P_{\mathcal{Y}}[\{3preta,\ 4preta,\ 5preta\}] \end{array} \quad (1.10)$$

Concluíndo (recorde: a probabilidade de um evento foi definida como a soma das probabilidades de seus resultados), temos a resposta final: $I\!P_{\mathcal{X}}[branca] = 2/5$, $I\!P_{\mathcal{X}}[preta] = 3/5$.

Fim do Exemplo 14↑

V. Gostaria de fechar esta seção recordando-lhe que sua principal contribuição para a construção de modelos probabilísticos para experimentos aleatórios simples foi na introdução do método chamado "extensão-redução" cujo funcionamento foi explicado nos Exemplos 13 e 14. A cêrne do método é construir experimento aleatório que está enxergado por duas pessoas de maneiras diferentes: uma o vê como extendido e outra como reduzido. A arte é criar tudo isto de tal modo que o modelo probabilístico para a observação de uma das pessoas possa ser facilmente construído. Usando tal construção e a paridade entre as observações dos observadores, faz-se o modelo probabilístico para a outra pessoa.

1.3 Construção de modelo probabilístico para os experimentos aleatórios sequenciais-compostos-por-simples

I. Minha sugestão é que a construção de modelo probabilístico para experimentos aleatórios sequenciais-compostos-por-simples seja feito com emprego de diagrama de árvore e de acodo com regras específicas, as quais serão apresentadas abaixo. As regras são simplem, assim como o método de construção de diagrama de árvore, com o qual, alias, você já tem conhecimento – possivelmente brando – desde a época de colégio. O básico das regras e o do método serão introduzidos para leitor via exemplo de tratamento de um experimento aleatório sequencial[1] específico (veja Exemplo 15 logo em seguida). Esse caminho de exposição pode despertar a desconfiança: "Até qual pode ser genérica a abordagem que está introduzida via um exemplo?" Segundo meu entender, meu exemplo mostrará os princípios da construção de modelo probabilístico de tal forma que a adaptação deles para outros modelos seja uma tarefa fácil. Na realidade, a necessiade de adaptação surge em número pequeno de situações que podem ser facilmente exibidas e explicadas. Eu apresento todas nos exemplos da lista de exercícios e mostro as adaptações adequadas em seus gabaritos (veja as Seções 1.5 e 1.6).

▷ São estas as modificações: sugrimento de flechas com probabilidade nula (mostrado no Exercício 4(a)), dependência do procedimento dos resultados de etapas anteirores que extende-se por mais que uma etapa para tráz (mostrado no Exercício 5), caminhos de àrvore com comprimentos desiguais (mostrado no Exercício 8). Além dessas, vale notar que os princípios de subjetividade de probabilidade e extensão-redução, que foram introduzidos para experimentos aleatórios simples, aplicam-se também para experimentos aleatórios sequenciais; um ilustração disso está no Exercício 7.

Existem abordagens alternativas à construção de modelos probabilísticos para experimentos aleatórios sequenciais-compostos-por-simples, mas na comparação com aquela escolhida por mim aquí, posso afirmar que nos casos onde as alternativas funcionam, a minha funcionaria também, enquanto que a recípoca desta afirmação não procede. Esse fato, sendo dito em outra maneira, soa assim: qualquer experimento aleatório sequencial que possa surgir no âmbito dos assuntos discutidos no meu livro, permite a construção de seu modelo probabilístico pela abordagem por mim escolhida e ensinada aqui. Claro que tal abrangência foi um dos fatores que motivou minha escolha. Quanto à comparação de abordagens diferentes, essa não é foco da exposição, mas será comentada nos exemplos e exercícios onde for possível e onde a mesma não desvia a atenção do foco pricipal.

II. ↓ **Exemplo 15.** Aqui, vamos construir o modelo probabilístico para o experimento aleatório descrito no Exemplo 6. Seu enunciado não deixa dúvida que ele é um experimento aleatório sequencial-composto-por-simples genuíno. Recordo a descritção. O experimento aleatório possui duas etapas. Na primeira, lança-se uma moeda honesta, e, na segunda etapa, retira-se ao acaso uma bola de uma de duas urnas. Uma delas contem 3 bolsa com números 1, 2, 3; esta urna é marcada "I". Na outra, marcada por "II", há 4 bolas com números 2, 3, 4 e 5. Na segunda etapa, usa-se urna I caso a moeda der "cara", e usa-se II, se der "coroa".

Para a construção do modelo probabilístico, é precisa que sejam ditas os quesitos do experimento que estão observados. Vamos trabalhar com o caso mais completo possível: observa-se o lado superior da moeda, quando a mesma parar, e o número da bola reitrada.

III. Convem-lhe recordar que a construção de modelo probabilístico compões-se de três passos. E esteja você avisado que a execução de cada uma dos passos auxiliar-se-á pelo diagrama de árvore correspondente ao experimento aleatório para o qual procuramos o modelo probabilístico.

[1] "Sequencial" é abreviação do "sequencial-composto-por-simples" que será usada frequentemente no texto.

Tal aviso revela para você o papel central do diagrama de árvore em tudo que pretendemos fazer.

IV. A descrição da construção de diagrama de árvore iniciar-se-á no parâgrafo seguinte. Já o presente parâgrafo destina-se aos leitores que aprenderam bem essa construção na época de colégio. Então, para não entediá-los, apesento-lhes diretamente o resultado da construção; é o diagrama na Figura 1.1 logo abaixo. Vejam esse, e vejam, por favor, também a versão errada do mesmo apresentada na Figura 1.2. Se nenhum dos dois causa-lhe dúvidas, então você, de fato, pode pular a descrição que começa no parâgrafo abaixo, e ir à parte da exposição que está na Eq. (1.12).

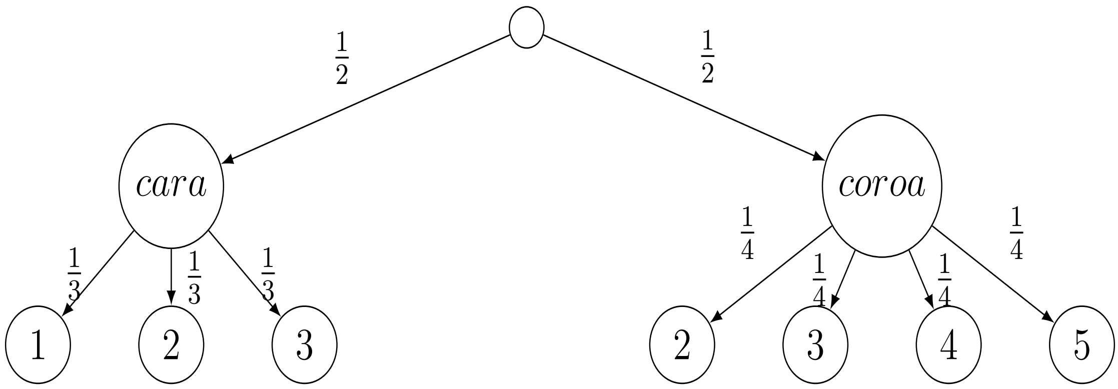


Figura 1.1: O Diagrama de Árvore para o experimento aleatório do Exemplo 15 no qual lança-se uma moeda honesta, e se esta der cara retira-se uma bola ao acaso da urna que contem bolas idênticas no tato enumerados 1, 2, 3, enquanto que se a moeda der coroa, retira-se uma bola ao acaso de outra urna que contem bolas idênticas no tato enumerados 2, 3, 4, 5.

V. Iniciamos agora a descrição da construção daquilo que chama-se **diagrama de árvore**, ou simplesmente **árvore**, para o experimento aleatório do presente exemplo. A construção de árvore começa pela **raíz** que é o círculo vazil na Figura 1.1. Esta raiz não tem relação alguma com o experimento; ela é desenhada por pura conviniência (tanto é que ela não fará parte da codificação de resultados seguindo à árvore que esplicaremos diante).

Para continuar na construção, precisamos do modelo probabilístico para o experimento aleatório da primeira etapa. Esse experimento está definido no enunciado, e para fazer seu modelo, nós falta definir aquilo que está sendo observado nele. Tipicamente, escolha-se aquele quesito que determina as ações a serem feitas na etapa seguinte. No caso, é o que a moeda mostra, e como não há nada além disso, então não temos dúvida à respeito: o espaço de estados a considerar é $\{cara, coroa\}$.

À direita está o modelo probabilístico do experimento aleatório simples proferido na primeira etapa.	O espaço de estados: $\{cara,\, coroa\}$, e as probabilidade atribuidas: $I\!P[cara] = 1/2,\ I\!P[coroa] = 1/2$

▷ Para mostrar que não está totalmente óbvia a escolha do espaço de estados para a construção do modelo de experimento proferido na primeira etapa, considere a seguinte modificação do esperimento aleatório que está tratado no presente exemplo. Imagine que na primeira etapa lança-se um dado perfeito cujas faces 1 e 2 foram pintadas de branco, e faces 3, 4, 5 e 6 de preto; imagine que na segunda etapa do experimento será usada urna I caso o dado mostrar cor branca, e será usada urna II caso o dado mostrar com preta. Se nosso objetivo final é o molelo para o observador que interessa-se por cor e número mostrados no dado, e pelo número da bola retirada na segunda etapa, então o espaço de estados a considerar para o modelo da primeira etapa deve ser $\{1branca, 2branca, 3preta, 4preta, 5preta, 6preta\}$. Já caso o objetivo final for o modelo para o observador que interessa-se pelo número visto na segunda etapa e pelo atributo da primeira etapa que influencia na segunda etapa, então $\{branca, preta\}$ será o espaço de estados adequado para a construção do modelo da primeira etapa.

Os resultados do modelo probabilístico da primeira etapa anotam-se abaixo da raíz da árvore, circulam-se, e ao cada círculo traça-se uma flecha partindo da raíz; ao lado de cada flecha anota-se a probabilidade atribuída pelo modelo ao correspondente resultado. É aconselhavel que os resultados anotados estejam alinhados numa linha imaginária horizontal. Esta linha será chamada **o primeiro nível da árvore**.

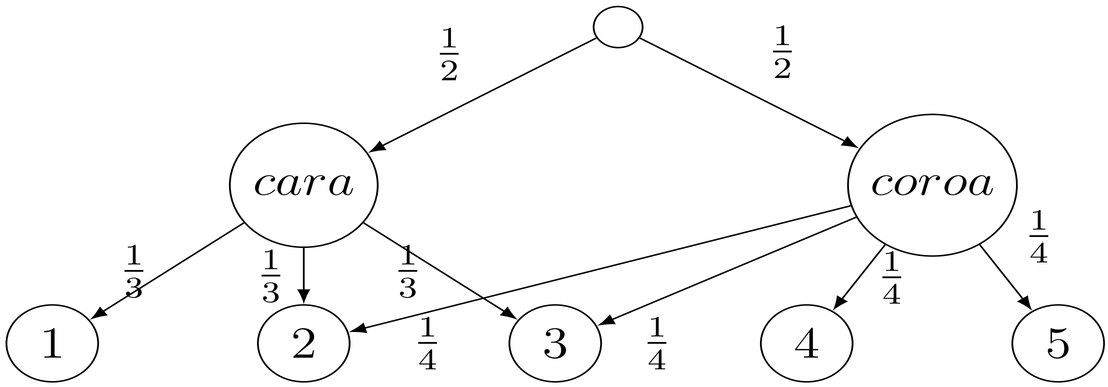


Figura 1.2: O Diagrama de Árvore errada para o experimento aleatório do Exemplo 15 no qual lança-se uma moeda honesta, e se esta der cara retira-se uma bola ao acaso da urna que contem bolas idênticas no tato enumerados 1, 2, 3, enquanto que se a moeda der coroa, retira-se uma bola ao acaso de outra urna que contem bolas idênticas no tato enumerados 2, 3, 4, 5. O erro estão no que duas flexas apontam ao mesmo nó.

VI. Continuamos a construção da árvore. Seu **segundo nível** é formado por resultados dos experimentos aleatórios simples que estão na segunda etapa do experimentos aleatório sequencial aqui tratado. De acordo com sua descrição, são dois deles: a retirada de uma bola da urna marcada "I", e a retirada de uma bolsa da urna marcada "II". Na execução do experimento aleatório sequencial será proferido um só, a saber: o com a urna I, se o resultado na primeira etapa for "cara", ou o com a urna II, se o resultado for "coroa". Não obstante, a árvore apresenta os ambos, mas, naturalmente, cada um deles está ligado na árvore à sua causa de ser. Isso executa-se conforme descrito abaixo.

Construimos o modelo probabilístico para o experimento aleatório "retirada ao acaso uma boal da urna I", tomando como o espaço de estados o conjunto $\{1, 2, 3\}$ (espero que o motivo para a escolha desse espaço esteja clara para meu leitor a partir das explicações supraapresentadas referente à escolha do espaço de estados para o modelo da primeira etapa):

À direita está o modelo probabilístico do experimento aleatório simples da segunda etapa proferido após obter *cara* na primeira etapa.	O espaço de estados: $\{1, 2, 3\}$, As probabilidades atribuidas: $I\!P[1] = 1/3$, $I\!P[2] = 1/3$, $I\!P[3] = 1/3$

Os resultados desse anotam-se abaixo do nó *cara* da árvore, circulam-se, e ao cada círculo traça-se uma flecha partindo de *cara*; ao lado de cada flecha anota-se a correspondente probabilidade.

Agora vamos ao experimento aleatório "retirada ao acaso uma bola da urna II" e construimos para este o seguinte modelo probabilístico:

À direita está o modelo probabilístico do experimento aleatório simples da segunda etapa proferido após obter *coroa* na primeira etapa.	O espaço de estados: $\{2,3,4,5\}$, As probabilidades atribuidas: $I\!P[2] = 1/4$, $I\!P[3] = 1/4$, $I\!P[4] = 1/4, I\!P[4] = 1/4$

Os resultados desse anotam-se abaixo do nó *coroa* da árvore, circulam-se, e ao cada círculo traça-se uma flecha partindo de *coroa*; ao lado de cada flecha anota-se a correspondente probabilidade.

É aconselhavel que os resultados dos ambos os experimentos aleatórios da segunda etapa estejam alinhados numa linha imaginária horizontal. Esta linha será chamada **o segundo nível da árvore**.

VII. A árvore declara-se feita e a razão pata tal é que todos os experimentos aleatórios simples de todas as etapas do correspondente experimento aleatório sequencial foram colocados na árvore. A árvore está apresentada na Figura 1.1. Vale colocar explicitamente que

$$\text{duas flechas não podemos apontar ao mesmo círculo} \tag{1.11}$$

embora essa proibição segue-se implicitamente das regras da construção. Quando esta regra não é obedecida, o resultado pode ser como o da Figura 1.2. Há uma observação que não vai te deixar a errar nesse sentido: o diagrama é de *árvore* e os galhos de árvore <u>nunca se amalgamam</u>.

▷ A proibição (1.11) facilita a explicação na etapa inicial do presente texto. Entretanto, você já viu árvores nas quais duas flexas apontam ao mesmo cículo; uma de tais e a árvore que seuge quando trata-se a distribuição binomial. Quando chegarmos a esse ponto, teremos acumulado o conhecimento de propriedades necessárias para separar os casos nos quais a amalgamação é permitida dos nos quais não.

A árvore desenhada será agora usada para a construção do modelo probabilístico do experimento aleatório para o qual a árvore foi gerada. A regra da passagem de árvore a modelo é assim:

(1.12)

(*a*) A cada caminho da árvore, que percorre da raíz a uma das suas folhas na direção de flechas, corresponde um resultado do experimento aleatório.
(*b*) Cada resultado codifica-se pela lista dos nós da árvore na sequencia percorrida pelo caminho; os nós da lista separam-se pelo símbolo "$\rightarrow$".
(*c*) A probabilidade de cada resultado é o produto das probabilidades atribuidas às flechas do caminho correspondente.

▷ Insisto que a codificação de resultados seja feita como manda *(b)* de (1.12) embora havia dito antes que esta é a questão de gosto. A codificação, no cujo emprego insisto, facilitará a explicação de assuntos a vir.

No caso do experimento aleatório tratado no exemplo corrente, a regra produz o seguinte modelo probabilístico:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \big\{(cara \to 1),\ (cara \to 2),\ (cara \to 3),\ (coroa \to 2),\\
&\qquad\qquad (coroa \to 3),\ (coroa \to 4),\ (coroa \to 5)\big\}\\
&I\!P[(cara \to 1)] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},\ I\!P[(cara \to 2)] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},\\
&I\!P[(cara \to 3)] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},\\
&I\!P[(coroa \to 2)] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8},\ I\!P[(coroa \to 3)] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8},\\
&I\!P[(coroa \to 4)] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8},\ I\!P[(coroa \to 5)] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

VIII. Se você deseja saber a justificativa para a regra de passagem de árvore para modelo probabilístico (a regra (1.12)), ela está abaixo. O conhecimento da justificativa, porém, não é obrigatório; de acordo com meu plano, é suficiente que você saiba só usar a regra (1.12).

Em primeiro lugar, segue-se da própria construção de árvore que há realção um-a-um entre os resultados de experimento aleatório e os caminhos da árvore construído para este experimento aleatório. Isto justifica os mandamentos (a) e (b) da regra (1.12).

Vamos agora justificar o mandamento (c) que toca na questão de atribuição de probabilidade. Vamos mostrar que a regra atribui corretamente a probabilidade $1/2 \times 1/3$ ao resultado $(cara \to 1)$. Todos as outras probabilidades justificam-se pelo menso caminho. Na demostração, vamos usar a Definição 1. Imagina então que o experimento aleatório está repetido infínitas vezes. De acordo com a Definição 1, a proporção de vezes nos quais se vé *cara* é a probabilidade da moeda dar *cara*, a qual é $1/2$, pois a moeda foi declarada como honesta. Considere agora só estes resultados. Eles formam uma sequencia infinita, na qual o número 1 aparece com a proporção $1/3$, já que para cada *cara* está feito o experimento aleatório coma urna I, a qual dá bola de número 1 com a probabilidade $1/3$. Portanto, em toda a sequencia de repetições, a proporção dos resultados nos quais é visto *cara* e 1 é $1/2 \times 1/3$. De acordo com a Definição 1, este deve ser o valor da probabilidade de ocorrer o resultado $(cara \to 1)$.

IX. A única dúvida que você, meu leitor, pode ter a respeito da presente exposição é "Como se garante que nenhum dos caminhos foi esquecido ou omitido em minha execução da passagem do diagrama de árvore ao espaço amostral de acordo com a regra (1.12)?"Minha resposta é: "Como os galhos de árvore não amalgamam, então em cada folha termina um e somente um caminho. Portanto, se você enumerar todas as folhas, então você consegue contar caminhos e, consequentemente, não vai perder nenhum deles e não vai contar nenhum duas vezes ou mais. Com isso, a solução é saber enumerar as folhas. Se todas as folhas estiver no mesmo nível de árvore, a numeração segura pode ser feita indo pelo nível de esquerda à direita. Outrassim, vale avisar que folhas de árvore podem estar em seus níveis diferentes (essa possibilidade surge de fato no experimento aleatório do Exercício 8). Neste caso, sugiro que a numeração seja feita assim: indo de nível mais alto para o nivel mais baixo, e, em cado nivel, indo de esquerda à direita." (Devo acrescentar, para a completude da explicação, que **folha** é o nome para qualquer nó de árvore do qual não parte nenhuma flecha.)

X. Para o título de ilustração do uso do modelo probabilístico ora construido, vamos agora responder à tarefa "achar a probabilidade do evento "de observar 2 na segunda etapa da observação"". Como observa-se 2 na segunda etapa se e somente se ocorre ou $(cara \to 2)$ ou $(coroa \to 2)$, então, a probabilidade da evento em questão é igual a $\mathbb{P}[(cara \to 2)] + \mathbb{P}[(coroa \to 2)]$. Portanto, o resultado final é $1/6 + 1/8 = 7/24$.

Fim do Exemplo 15↑

XI. À próxima versão do texto será acrescido o argumento que mostra que experimentos de duas etapas podem ser tratados por tabelas de dupla entrada. A importância da mensagem reside em que alguns professores usam tais tabelas. Com o intuíto de desmotivar o uso de tabelas, é precisa mostrar que elas são incómodas para tratar experimentos com número de etapas maior que 3.

1.4 Construção de modelo probabilístico para experimentos aleatórios que não são nem simples nem sequenciais-compostos-por-simples

I. É bom começar a presente seção com lembrete acera da maneira como foi definido o grupo de experimentos aleatórios que não são nem simples nem sequenciais-compostos-por-simples. Foi assim. Primeiramente, descrevemos a caraterística, tal que quando for identificada num experimento aleatório, acarreta que esse seja chamado de "simples". Depois, descrevemos a ligação entre experimentos aleatórios simples, a qual, sendo identificada num experimento aleatório, causa que esse seja chamado de "sequencial-composto-por-simples" (ou, simplesmente "sequencial"). Por fim, declaramos que se um experimento aleatório

(a) ou claramente não possui as caraterísticas de simples ou de sequencial,

(b) ou você tem dificuldades na identificação da presença de tais caraterísticas,

então esse experimento aleatório coloca-se no grupo de **danados**, que é o nome curto alternativo para "nem simples nem sequencial".

Óbvio é que (a)-(b) acima não é uma definição matemática de um grupo. Mas ela é útil como uma ferramenta didática, pois garante que até o momento, no qual você, meu leitor, está lendo a presente frase, você tinha sido liberado da necessidade de aprender a tratar aqueles experimentos aleatórios cujos enunciados eram confusos ou obscuros; você simplesmente jogava-los no saco de danados e se desculpava dizendo "tratar-os-éi depois".

Esse "depois" veio e está aqui. Vou ensinar-lhe agora como os danados podem ser resolvidos. É bom que você seja avisado: existem experimentos aleatórios danados muito complicados, cuja solução exige de aluno um conecimento amplo e profundo de matemática, mas no âmbito do curso introdutório à Estatística, os experimentos aleatórios danados não são tal complicados; você vai aprender a partir da exposição dessa seção, que, caso um experimento aleatório estar no nível do curso introdutório à Estatística e caso seu enunciado for cuidadosamente formulado, então você terá toda a capacidade de resolvé-lo, e quando, por outro lado, a solução não sair, é por que o enunciado está impreciso e deixa dúvidas justas acerca da proferência do experimento aleatório sobre o qual está falando.

II. A argumentação da parte **I** sendo colocada em termos mais diretos soa assim: se uma experimento aleatório não está nem na primeira nem na segunda classe de nossa classificação, então ocorre uma das duas:

(a) ou ele tem fontes de aleatpriedade que agem simultaneamente;

(b) ou ele foi formulado de maneira errônea ou incompleta e, na forma como está, não permite a construção de seu modelo probabilístico.

O caso (a) será tratado na Seção 1.4.1. Mostramos que seu modelo probabilístico sempre pode ser construido via uma associação com experimento aleatório sequencial. Já Seção 1.4.2 apresenta alguns exemplos de experimentos aleatórios com defeitos na formulação. Obviamente, não consigo apresentar todas as maneiras que conseguem estragar a formulação de experimentos aleatórios, mas espero que os exemplos sirvam para transmitir a ideia expressa em (b) acima.

1.4.1 Os experimentos aleatórios que têm fontes de aleatoriedade que agem simultaneamente e como eles devem ser tratados

III. O Exemplo 16 mostra o método que funciona para construção de modelo probabilístico de qualquer experimento aleatório no qual há duas ou mais fontes de aleatoriedade que agem simultaneamente.

Uma correção à aleagação "qualquer experimento aleatório" na frase anterior é necessária: o correto seria dizer "qualquer experimento aleatório que aparece neste livro". O motivo desta correção é que na vida real existem fontes de aleatoriedade que são amarradas, quer dizer, são dependentes. Para tratar tais casos, é precisa conhecer a dependência. Um estudo que traria tal conhecimento está fora do escopo deste livro. Por isto meu leitor tipicamente não teria condições de reconhecer se as fontes são independentes ou não. Consequentemente, sou eu quem tem que fazer a seleção das experimentos aleatórios que são tratáveis pelo método por mim ensinado.

IV. ↓ **Exemplo 16.** Tomei duas moedas honestas e idênticas e marquei 1 nas faces de "cara" e 2 nas faces de "coroa" (fiz as marcas da maneira tal que as moedas continuam ser indistinguíveis entre si).

Lançarei as moedas simultaneamente em cima da mesa de professor na sala de aula. Meu aluno $\mathcal{A}$ntónio está ao lado da mesa e vai observar o resultado. Nossa tarefa agora é fazer o modelo probabilístico para o experimento aleatório conforme visto pelo $\mathcal{A}$ntónio.

Começaremos com a codificação dos resultados. É óbvio que $\mathcal{A}$ntónio pode ver ou dois números 1, ou dois números 2, ou um 1 e um 2 ao mesmo tempo. Sugiro que a codificação destes seja $1e1$, $2e2$ e $1e2$, respectivamente. Então,

$$\Omega_{\mathcal{A}} = \{1e1,\, 2e2,\, 1e2\} \tag{1.14}$$

▷ Evite usar a codificação $(1,1)$, $(2,2)$ e $(1,2)$. As vírgulas e parentenses em conjunto têm um sentido preciso na Matemática: o significado é "sequencia ordenada de elementos". Devido ao sifnificado canónico, $(1,2)$ e $(2,1)$ são diferentes. Mas como o $\mathcal{A}$ntónio não pode saber qual das duas moedas é a primeira e qual é a segunda, então $(1,2)$ e $(2,1)$ não podem aparecer na codificação daqueilo que $\mathcal{A}$ntónio vai ver. Se você, meu leitor, ainda insiste em usar notação mais matematizada, você pode então usar $\{1,1\},\{1,2\},\{2,2\}$ pois elementos agrupados em chaves significam, na liguagem matemática, conjunto de elementos não ordenados.

Feito o espaço de estados, o próximo passo de construção do modelo probabilístico é atribuir as probabilidades. Se você fez-as assim:

$$I\!\!P[1e1] = I\!\!P[2e2] = I\!\!P[1e2] = 1/3 \tag{1.15}$$

então você errou, junto com, no mínimo, metade de todos os alunso para os quais a mesma pergunta foi colocada. Você deve ser indignado com tal notícia, pois você sente que fez tudo de acordo com que fara ensinado: você identificou três resultados e atribuiu a probabilidade 1/3 a cada, pois esses lhe pareceram ser equiprováveis. Pois bem, é aqui que você errou: não há a simetria no presente experimento aleatório que garanta que os três sejam equiprováveis. Isso será justificado no texto abaixo.

Já se você respondeu

$$I\!\!P[1e1] = I\!\!P[2e2] = 1/4,\ I\!\!P[1e2] = 1/2 \tag{1.16}$$

então você acertou. Eu não sei qual argumento você usou para chegar nesta resposta. Eu vou agora apresentar meu argumento. É possível que este esteja igual a seu, mas vale você ler minha apresentação, pois ela coloca todos as ideias em ordem que lhe permitirá usar as mesmas ideias em todos os outros experimentos aleatórios nos quais, assim como no experimento aleatório corrente, há fontes de aleatoriedade que agem simultaneamente.

A primeira idéia de minha solução é distinguir as moedas mas da maneira tal que o $\mathcal{A}$ntónio não perceba a diferença. Para tal, eu pinto uma moeda de preto e a outra de cinza (a pintura não afetou a “honestidade” das moedas e não escondeu os números nelas marcados), mas peço que António coloque óculos que fazem enxergar tudo em breto ou branco. Como a moeda cinza não é branca, ela é vista como preta pelo António. Portanto, a primeira ideia modificou o experimento aleatório mas de tal forma que António continua o vendo como se fosse o experimento aleatório original.

A segunda idéia é pedir do Antóniosair da sala para corredor e volta só após que as moedas estiverem lançadas. Eu alego que o António continua “vendo” este experimento aleatório como o original. Tal alegação não é óbvia. Na realidade, ela justifica-se pelo **princípio de subjetividade da probabilidade** que é princípio intuitivo aceito na Teoria de Probabilidades como axioma. Eis o que ele diz: A probabilidade é expressão de desconhecimento. Portanto, se pessoa pensa num experimento aleatório antes do mesmo acontecer, ou se tal experimento aleatório aconteceu mas a pessoa não sabe nada sobre o resultado, então, em ambos os casos, as estimativas pessoais expressas em probabilidade são iguais.

A terceira idéia é lançar a moeda preta em primeiro lugar, esperar ela para, e laçar em seguida a moeda cinza. Claro que António não está avisado sobre esta alteração, e também, ele não ver esta sequencia, pois ele fica fora da sala. Portanto, na perspectiva do António nada mudou.

As três modificações acima descrita geram um novo experimento aleatório. Antes de executá-lo, chamo à mesa meu aluno Bruno e explico para ele tudo que será feito. Peço que ele observe o resultado anotando a sequencia. De acordo com este pedido, Bruno observará experimento aleatório sequencial. O diagrama de árvore para este está na Figura 1.3. A partir

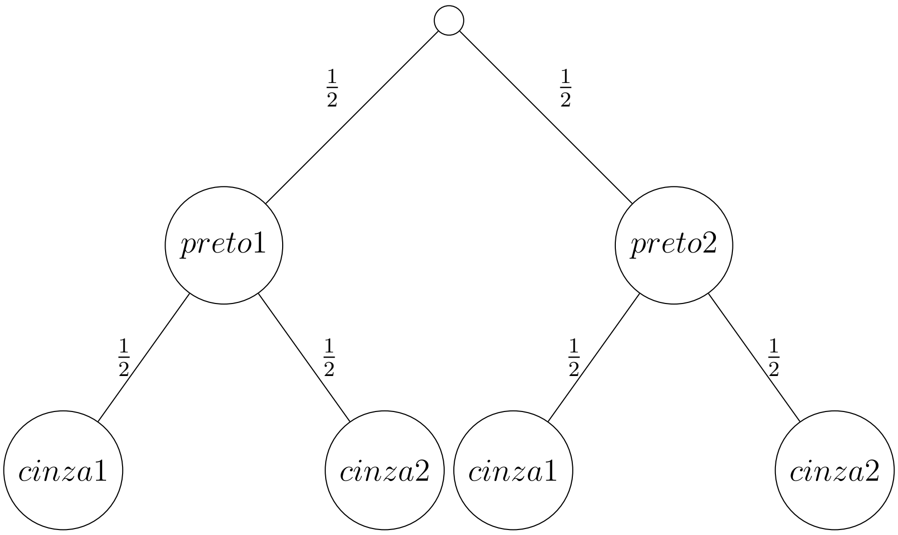


Figura 1.3: O Diagrama de Árvore para o experimento aleatório visto pelo Bruno. Lançam-se em sequencia duas moedas honestas, primeiramente a preta e depois a cinza. Bruno observa a cor e a face de cada moeda.

da árvore da Figura 1.3, sabemos fazer o modelo probabilístico. Eis esse:

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{B}} = \{&preto1 \to cinza1,\, preto1 \to cinza2, \\ &preto2 \to cinza1,\, preto2 \to cinza2\} \\ I\!P_{\mathcal{B}}[preto1 \to cinza1] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},\ & I\!P_{\mathcal{C}}[preto1 \to cinza2] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},, \\ I\!P_{\mathcal{B}}[preto2 \to cinza1] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},\ & I\!P_{\mathcal{C}}[preto2 \to cinza2] = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} \end{aligned} \qquad (1.17)$$

Lembramos agora que António será chamado para observar o resultado depois que anbas as moedas param. Isto significa que as observações do António e do Bruno estã em seguinte relação:

$\mathcal{A}$ntónio vé $1e1$ se e somente se $\mathcal{B}$runo vé $preto1 \to cinza1$;
$\mathcal{A}$ntónio vé $1e2$ se e somente se $\mathcal{B}$runo vé ou $preto1 \to cinza2$ ou $preto2 \to cinza1$;
$\mathcal{A}$ntónio vé $2e2$ se e somente se $\mathcal{B}$runo vé $preto2 \to cinza2$.

Isso junto com o princípio de extenção/redução dá a atribuição de probabilidades para o modelo probabilístico da observação de $\mathcal{A}$ntónio:

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}_{\mathcal{A}}[1e1] = \mathbb{P}_{\mathcal{B}}[preto1 \to cinza1] = \text{de acordo com } (1.17) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}_{\mathcal{A}}[1e2] = \mathbb{P}_{\mathcal{B}}[preto1 \to cinza2] + \mathbb{P}_{\mathcal{B}}[preto2ecinza1] = \text{de acordo com } (1.17) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}_{\mathcal{A}}[2e2] = \mathbb{P}_{\mathcal{B}}[preto2 \to cinza2] = \text{de acordo com } (1.17) = \frac{1}{4} \end{array} \tag{1.18}$$

Fim do Exemplo 16↑

1.4.2 Os duvidosos

↓ **Exemplo 17.** Aqui será tratado um problema "de vida real". Tal tipo de problemas são antididâticos, na sua maioria, pois a vida real é mais multifacial do que os problemas que podemos resolver com ajuda da Matemática. Na verdade, um bom estatístico é o profissional que pega um problema real e consegue criar seu modelo que pode ser analisado por métodos estatísticos. Tal capacidade não pode ser exigida de alunos do curso básico de Estatística, e, logo, tais problemas devem ser lhes apresentados com muito cuidado, pois a interpretação do real pelo formal pode custar muito e desviar a atenção de alunos do objetivo principal do curso. Todas as desvantagens genéricas serão difíceis a serem expostas e discutodos neste texto, mas espero que o exemplo que inventei seja um pequeno guia para a dicussão.

Uma vez, comprei para filha 2 pares de meias azuis e 3 pares de meias vermelhas. Um dia, todas elas foram para máquina de lavar roupa e sairam de lá diretamente para a gaveta da cômoda no quarto da filha. No manhã do dia seguinte, ainda no escuro, apanhei duas meias quaisquer da gaveta, vesti a filha, coloquei no carro e levei-a para escolinha. Qual é a probabilidade de eu ouvir da filha, quando ela for acordada, ainda no carro, pelo nascer do sol: "Papai! Você colocou meias de cores diferentes!"

Tente inicair a construção do modelo probabilístico desta situação. Não tem idéia como começar? Sabe por que? Porque você não entendeu como é que se apanha duas meias juntas, numa pegada só, duma gaveta sem olhar pra dentro. Acontece que o enunciado não esclarece nada a respeito. Mas como o enunciado está ligado à realidade, surge a idéia de pensar sobre como seria esse processo se você ou qualquer ser humano desejasse retirar exatamente duas meias de uma gaveta. Enfiar a mão aberta no meio das meias e fechar o punho? Neste casa, quem garante que haja exatamente duas meias no punho fechado? E se havesse mais que duas, qual seria o procedimento de se livrar do excesso de meias? Pensando desse modo sobre outras possibilidade, chaga-se à conclusão que a única delas que funcione é assim: enfiar a mão, pegar uma meia e, segurando essa, pegar mais uma meia. Parece que qualquer ser humano faria assim, e, portanto, conclui-se que o enunciado refere-se exatamente a essa maneira.

Agora, pensando mais um pouco, conclui-se que segurar a primeira meia na mão enquanto pega-se a segunda é equivalente ao procedimento no qual a primeira meia seria retirada da gaveta e a segunda seria escolhida entre as que sobraram nesta. Mas isso é um experimento aleatório sequencial! Ainda mais, ele não é nada diferente daquele experimento aleatório no qual retiram-se duas bolas, em sequencia e sem reposição, duma urna que contem 4 bolas azuis e 6 bolas vermelhas. O modelo probabilístico desse sai facilmente com o emprego de métodos ensinados até o momento. O diagrama de árvore está na Figura 1.4, e o modelo probabilístico derivado deste diagrama está em (1.19).

$$\begin{array}{l} \Omega = \{(a \to a),\, (a \to v),\, (v \to a),\, (v \to v)\} \\ \mathbb{P}[(a \to a)] = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15},\ \mathbb{P}[(a \to v)] = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}, \\ \mathbb{P}[(v \to a)] = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15},\ \mathbb{P}[(v \to v)] = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{15} \end{array} \tag{1.19}$$

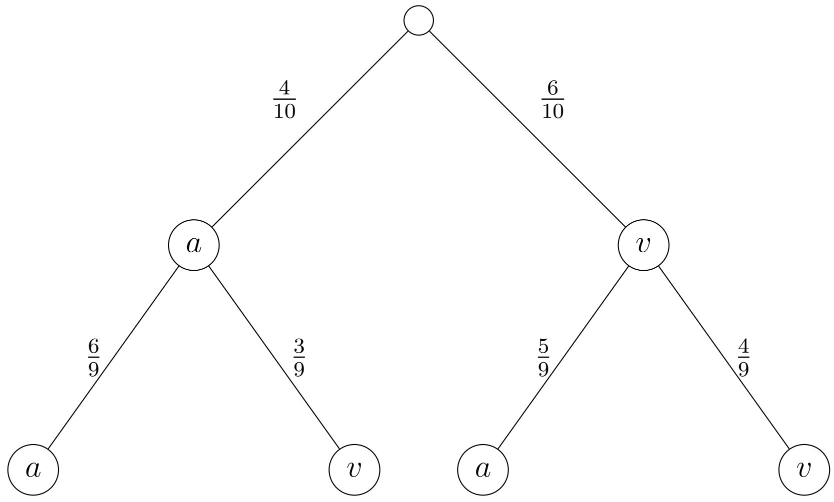


Figura 1.4: O Diagrama de Árvore para o experimento aleatório do Exemplo 17 no qual, segundo o enunciado original, retiram-se duas meias duma gaveta, sem olhar pra dentro dela, sendo que na gaveta há 4 meias azuis e 6 meias vermelhas, todas bem misturadas. O presente diagrama veio da rperesentação desse experimento aleatório como experimento aleatório sequencial.

Recorde que a pergunta era achar a probabilidade das cores das meias apanhadas foram diferentes. É, obviamente, um evento, e os resultados que o compõem são $(a \to v)$ e $(v \to a)$, e, portanto, sua probabilidade é $I\!\!P[(a \to v)] + I\!\!P[(v \to a)] = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$, o que é a resposta àquela pergunta.

Fim do Exemplo 17↑

↓ **Exemplo 18.** (O enunciado aquei tratado já apareceu no Exemplo 12.) Numa escola há 7 professores e 3 professoras. Do total destes 10, será formada uma comissão de três pessoas. Qual é a probabilidade que na comissão formada haja exatamente uma mulher?

A pergunta foi atrelada à vida real. O que tal relacionamento traz para nossa concepção do problema em termos formais? A única coisa que a ordem de pessoas na comissão não importa – isto é a perticularidade da "comissão"; se precisassemos de três pessoas para dar três prémios de valores diferentes então a ordem importaria, pois a primeira pessoa receberia o maior valor, a segunda – o segundo maior, e a terceira – o menor. Agora vem a dúvida que é a principal para a construção do modelo probabilístico dessa situação: "Como na vida real executa-se a escolha de comissão de três sem impotância para a ordem."

Então, suponhamos que todos os triplos possíveis a serem formados de 10 pessoas diferentes (sem repetição, quer dizer, sem que a mesma pessoa seja incluida no mesmo triplo mais que uma vez), foram de fato formados e cada triplo foi anotado num papelzinho. Suponhamos que todos esses pepelzinhos foram colocados numa urna e, após serem bem misturados, um deles será escolhido da urna. Qual é a probabilidade de que no triplo do papel escolhido haja anotado 2 nomes de homens e um de mulher?

Antes de irmos diretamente à pergunta, gostaria de observar que a situação na qual a mesma foi perguntada pode – e deve – ser separada em duas partes. A primeira delas é a preparação de papelzinhos. Nela, não há nada aleatório. Sabemos bem – da Teoria de Combinatória ensinada no colégio – que

$$\text{o total de triplos não ordenados feitos de 10 elementos distintos é } C_{10}^{3} \qquad (1.20)$$

Saberemos, se for necessário, fazer a lista do todos eles, mas não vamos fazer isso agora pois dessa lista a solução do problema não dependerá.

Agora vamos à parte da situação na qual surge aleatoriedade. É a retirada de um papelzinho da urna. Nesta retirada há aquela qualidade chamada por nos de "simetria": todos os papelzinho são idênticos no tato, e é por isso que a probabilidade deve ser distribuida por igual entre todos. Consequentemente

$$\mathbb{P}[\omega] = \frac{1}{\text{quantidade de } \omega\text{'s em } \Omega} = 1/C_{10}^3 \tag{1.21}$$

Com isto a gente não completou a construção do modelo probabilístico, mas a parte que fizemos será suficiente para podermos responder a pergunta principal.

Para obtermos a resposta precisamos do fato que entre todos os papeis há exatamente

$$C_7^2 \times C_3^1 \tag{1.22}$$

papeis contendo dois homens e uma mulher. Esse resultado é amparado pela Teoria Combinatória ensinada no colégio; não é difícil prová-lo: há C_7^2 maneiras de escolher um par de homens dentro de 7, e, para cada par escolhido, pode ser anexada uma mulher escolhida entre 3, o que pode ser feito em C_3^1 maneiras.

Agora vamos juntar as peças para responder à pergunta. Primeiramente, é claro que essa é sobre a probabilidade do evento composto de todos os resultados com dois homens e uma mulher. A quantidade dos papelzinhos correspondentes está em (1.22). Mas como a proabilidade de cada resultado é a mesma (conforme alegado em (1.21)), então

$$\begin{aligned}\text{probabilidade do evento em interesse} &= \text{a quantidade dos resultados que o compõem} \times \\ &\times \text{a probabilidade de cada resultado} = \\ &= (C_7^2\, C_3^1) \times \tfrac{1}{C_{10}^3} = \tfrac{21}{40}\end{aligned} \tag{1.23}$$

Recordo que bem no início do tratamento da situação comentamos que seu enunciado não esclarece indubiamente o procedimento seguido para escolher a comissão. Recordo que após uma discussão baseada na nossa experiencia, deduzimos que são só dois procesimentos possíveis. Um deles foi tartado acima. Agora vamos tratar o segundo. Segundo esse, os nomes de todos os professores (assumimos para a simplicidade que todos os nomes são diferentes entre si) estão escritos em 10 bolas idênticas no tato. As bolas forma para um urna, e dessa, retirar-se-ão três bolas, ao acaso, em sequencia e sem reposição. Os nomes nas bolas retiradas são os dos professores que formarão a comissão.

O que descrevemos acima é nada mais e nada menos de que um experimento aleatório sequencial. Seu modelo probabilístico segue-se por caminhos até o momento explicados e ilustrados. No que segue-se, vou usar o método de REDUÇÃO. Para tal, pinto de azul as bolas com nomes de professores, e de vermelho as com nomes de professoras. Com isso, tem-se na urna 7 bolas azuis (com nomes) e 3 bolas vermelhas, também com nomes. Nas retiradas, não vou observar os nomes pois o que importa é só o género e esse está representado por cor, a qual, por sua vez, vou codificar no meu modelo por a para azul e v para vermelho. O diagrama de árvore está na Figura 1.5. Esse dá o modelo probabilístico apresenteado em (1.24).

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(a\to a\to a), (a\to a\to v), (a\to v\to a), (a\to v\to v),\\ &(v\to a\to a), (v\to a\to v), (v\to v\to a), (v\to v\to v)\}\\ \mathbb{P}[(a\to a\to a)] &= \tfrac{7}{10}\times\tfrac{6}{9}\times\tfrac{5}{8},\ \ \mathbb{P}[(a\to a\to v)] = \tfrac{7}{10}\times\tfrac{6}{9}\times\tfrac{3}{8},\\ \mathbb{P}[(a\to v\to a)] &= \tfrac{7}{10}\times\tfrac{3}{9}\times\tfrac{6}{8},\ \ \mathbb{P}[(a\to v\to v)] = \tfrac{7}{10}\times\tfrac{3}{9}\times\tfrac{2}{8},\\ \mathbb{P}[(v\to a\to a)] &= \tfrac{3}{10}\times\tfrac{7}{9}\times\tfrac{6}{8},\ \ \mathbb{P}[(v\to a\to v)] = \tfrac{3}{10}\times\tfrac{7}{9}\times\tfrac{2}{8},\\ \mathbb{P}[(v\to v\to a)] &= \tfrac{3}{10}\times\tfrac{2}{9}\times\tfrac{7}{8},\ \ \mathbb{P}[(v\to v\to v)] = \tfrac{3}{10}\times\tfrac{2}{9}\times\tfrac{1}{8}.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Agora temos tudo para podermos responder à pergunta. Essa pede a probabilidade do evento "na comissão há exatamente uma mulher", que está composto por resultados $(a \to a \to v)$,

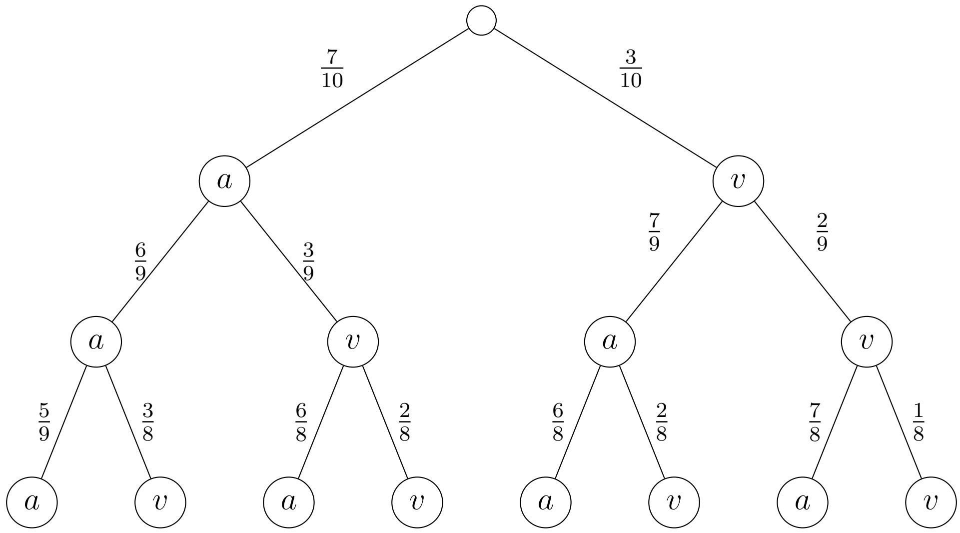


Figura 1.5: O Diagrama de Árvore para o experimento aleatório do Exemplo 12.

$(a \to v \to a)$ e $(v \to a \to a)$. A probabilidade do evento é a soma das probabilidades desses. Daí a resposta:

$$\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{21}{40}$$

Supreendentemente, a conta acima deu o mesmo valor que o deduzido em (1.23). A surpresa veio por conta do fato que as aboradagens, que deram o mesmo valor, não eram abordgens ao mesmo experimento aleatório. Não obstante, a coincidência dos resultados não é por acaso. Cabe aqui uma exposição das razões para tal, e uma das consequencias dessa exposição, importante para a promoção do métodos ensinado no meu livro é a seguinte: os **problemas de contagem** que fazem parte de textos didáticos sobre a Probabilidade e Estatística básicas, todos eles podems ser resolvidos com êxito pelo método ensinado no meu livro. Os detalhes serão acrescentados a esse texto em breve.

Fim do Exemplo 18↑

↓ **Exemplo 19.** Numa escola há 7 professores e 3 professoras, sendo que um professor e uma professora são irmãos. Do total destes 10, será formada uma comissão de três pessoas. Qual é a probabilidade que na comissão formada haja exatamente uma mulher e que esta não seja irmá de nenhum dos professores da comissão? (Especificamente: a professora escolhida para comissão pode não ter a relação parentesca com nenhum dos profesores da escola, mas se tiver, o irmão dela não pode estar na comissão.)

O presente enunciado é uma ligeira modificação do do Exemplo 18. Aquele foi resolvido em duas maneiras: a que usa a Teoria de Combinatoria e a que segue genuinamente o método baseado no diagrama de árvore. Você meu leitor, já sente que é a segunda das maneiras de solução é a que me agrada mais, e que faço tudo e qualquer esforço para convencé-lo da sua superioridade. Pois bem, isso é verdade, e o presente exercício foi montado por mim para mostrar que o método de diagrama de árvore funciona bem e fácil em toda situação, enquanto que a abordagem por Teoria Combinatória pode explodir de dificuldades se fizer uma pequena mudança numa situação onde ele funcionava sem problemas. Essa "pequena modificação" no caso é o acrescimo da condição de que dois dos professores, entre as quais escolha-se comissão de três pessoas, são irmãos, e a limitação é que os irmãos não podem ficar na mesma comissão ao mesmo tempo. Se você abordar esse caso por diagrama de árvore, a solução vai sair por vias ensinadas por mim até o momento. Já se você insistir de mostrar que você consegue resolver

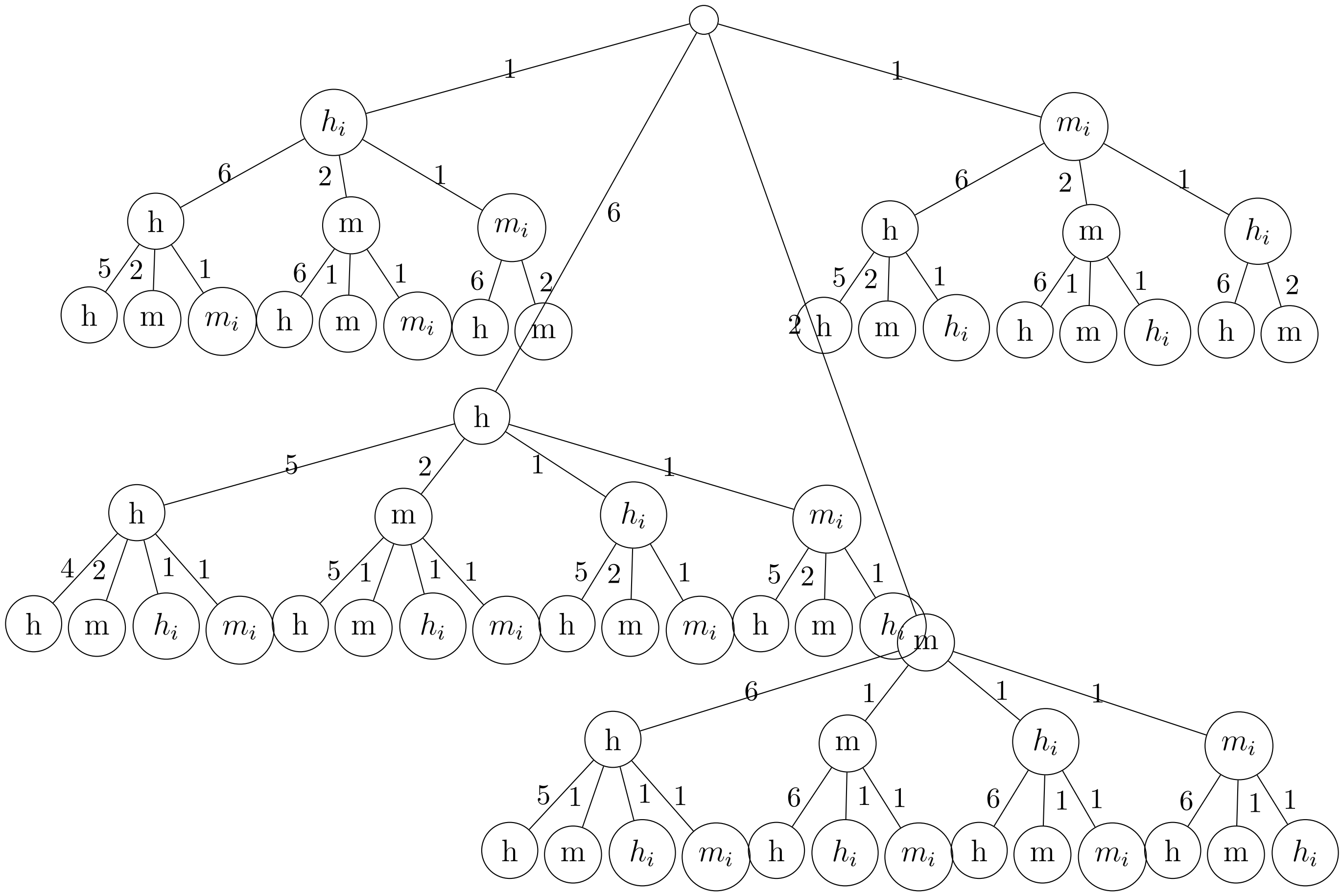


Figura 1.6: Opção 1: Esquema de árvore correspondente ao experimento aleatório formulado no Exemplo 21. Os número mostrados em cada aresta corresponde à quantidade de pessoas em cada um dos grupos. Para calcular a probabilidade de cada nó da arvore, basta dividir o número na aresta pela quantidade total de pessoas naquele nível. No primeiro nível da árvore, divida por 10, no segundo nível, divida por 9, e no terceiro, divida por 8.

o problema ainda com a Teoria de Combinatória... bem, você pode até conseguir. Mas saiba que eu já vi um meia dúzia de tais tentativas que, todas, deram resultados diferentes. A sua solução pode ser a correta. Mas ao comparar essa com a que usa o diagrama de árvore você vai dar razão para minha insistência: o diagrama parece ser aplicável e fácil em qualquer situação.

Vamos à solução. Vamos apresentar cada professor por uma bola. Ao total, serão então 10 bolas, pois são 10 professores entre os quais escolha-se uma comissão. As bolas serão marcadas assim: 6 bolas serão marcadas pela letra h (de *h*omem); 1 será marcada h_i (essa bola corresponde àquele professor *h*omen que possui *i*rmá professora); 2 bolas serão marcadas por m (de *m*ulher); e 1 de m_i (essa bola corresponde à professora *m*ulher que possui *i*rmão professor). Vamos colocar todas as bolas numa urna e retirar dela 3 bolas, em sequencia, sem reposição. A árvore correspondente está apresentada por partes nos desenhos a seguir (essa árvore ficou tal volumosa, que não cabia na folha).

Para economizar o espaço, não vou apresentar o modelo probabilístico do experimento aleatório descrito no parágrafo anterior; creio, que você consegue fazé-lo, caso for necessário, pois o experimento aleatório em consideração é sequencial genuino. Apresento, na tabela abaixo, só os resultados que formam o evento em interesse, quer dizer o evento "a comissão escolhida contem dois homens e uma mulher, e os irmãos não estão presentes ao mesmo tempo na comissão".

hhm	hhm_i	hmh	hmh_i	hh_im	hm_ih
$\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{8}$	$\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{8}$	$\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{8}$	$\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}$	$\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}$	$\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{8}$
mhh	mhh_i	mh_ih	h_ihm	h_imh	m_ihh
$\frac{2}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}$	$\frac{2}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{8}$	$\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{6}{8}$	$\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{2}{8}$	$\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{8}$	$\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}$

Figura 1.7: Os resultados do experimento aleatório do Exc. 19 que formam o evento cuja probabilidade está em questão do exercício; abaixo de cada resultado, há sua probabilidade calculada com o uso da árvore apresentada na Figura 1.6.

A resposta final é a soma das probabilidade das duas linhas da tabela na Figura 1.7; é $\frac{342}{720}$.

1.5 Exercícios

Exc. 1. *Este é o único exercício da lista cuja pergunta indaga sobre experimento aleatório simples. Tal "exclusividade" aconteceu devido a razão bem banal: eu simplesmente não consegui criar mais que um exercício interessante que pergunte algo não trivial sobre os assuntos relacionados diretamente aos experimentos aleatórios simples. Você consegue entender facilmente o porquê: teria resposta direta qualquer exercício que pedisse construir modelo probabilístico pelo princípio de simetria ou por dados históricos; talpouco seria imediata a resposta à questão que pedisse empregar o princípio de extensão-redução em sua solução. Então, a única parte da teoria relacionada aos experimentos aleatórios simples dentro da qual consigo criar um exercício não trivial é o princípio de expansão-redução. É sobre ele que versa o presente exercício. Faça-o para se acostumar com o princípio de extensão-redução. A aprendizagem adquirida na sua solução copacitará-lo para poder solucionar exercícios sobre experimentos aleatórios não simples.*

Lançaremos o teraedro, uma das cujas faces está pintada em branco e outras três em preto. Qual é a probabilidade do tetraedro parar em cima da face branca?

Exc. 2 (a). *Este exercício é muito parecido com o Exemplo 15 da Seção 1.3, por intermédio do qual introduzimos as regras da construção de modelo probabilístico para experimentos aleatórios sequenciais. Volte ao texto da seção, caso enfrenta dificuldades na solução do presente exercício.*

Há três urnas com bolas coloridas. Na primeira, há 3 brancas e 5 pretas, na segunda urna, 1 branca e 4 pretas, e na terceira, 6 brancas e 2 pretas. Primeiramente, escolha-se ao acaso uma bola da primeira urna e observa-se sua cor. Se for preta, então, na segunda etapa, escolhe-se ao acaso uma bola da urna dois, e observa-se sua cor. Já se a bola retirada na primeira etapa for branca, então na segunda etapa escolhe-se ao acaso uma bola da urna três, e observa-se sua cor. Pergunta-se a probabilidade de que a cor da bola retirada na segunda etapa seja preta.

(b) *Esse item é opcional. Acrescentei-o para que você possa se divertir um pouco. Caso em vez do divertimento, a tarefa causar lhe sofrimento, pode abandoná-la. A capacidade de resolver problemas deste tipo não será necessária, nem será cobrada em momento algum de meu curso.*

Altere, ao seu gosto, as composições "3 brancas–5 pretas", "1 branca–4 pretas" e "6 brancas–2 pretas" das urnas do Exc.2(a) da maneira tal que a probabilidade de retirar bola preta na segunda etapa seja igual à probabilidade de retirar bola branca (na mesma, segunda, etapa). Não vale colocar quantidades iguais de bolas pretas e branca em cada urna.

Exc. 3. *O presente exercício é sobre um experimento aleatório sequencial genuíno de duas etapas. O que pode incomodá-lhe na elaboração de sua solução é o fato de seu diagrama de árvore ter 36 caminhos. Para tranquilizá-lo prometo que árvores de tal tamanho não aparecerão nas provas do curso.*

Tem-se dois dados equilibrados, um é branco e o outro cinza. Jogamos os dados, um em seguida do outro, primeiramente o branco, e depois o cinza. Calcule a probabilidade de ocorrer o evento "o produto dos números mostrados nas faces superiores dos dados não é menor que 12 e não é maior que 15".

Exc. 4. *Os experimentos aleatórios desse exercício são sequenciais-compostos-por-simples e têm três etapas. Ao fazer item (a), preste a atenção: uma das flechas duma das bifurcações da terceira etapa de árvore recebe a probabilidade 0; isso não está errado e não atrapalha a atribuição de probabilidade; isso acontece porque numa das possibilidade que ocorre na* *terceira etapa, a urna não contém bolas (isso acontece caso nas duas etapas anteriores, todas as bolas brancas da urna foram apanhadas e deixadas por fora). Naturalmente, você quer saber: "O que deve-se fazer nesse caso?" Os caminhos são dois, e ambos são aceitáveis. Você pode incluir a flecha com a probabilidade nula. Se fizer isso, então na hora de atribuir a probabilidade aos resultados do experimento aleatório sequencial, aquele dos seus resultados que envolve essa flecha, adquirirá a probabilidade zero. Portanto, tal resultado não afetará nenhum cálculo de nenhuma solução de qualquer pergunta, e, consequentemente, esse resultado pode ser eliminado da lista de todos os resultados. Esse foi o primeiro caminho. Já o segundo caminho é não desenhar flechas com probabilidade nula. Isso causa a eliminação imediata daqueles resultados cuja probailidade seria zero se fosse calculada seguindo o primeiro caminho. Só me falta acrescentar que a tradição aceita na Teoria de Probabilidade manda não incluir na lista de resultados aqueles deles que têm probabilidade nula. Mas você não é obrigado a seguir essa tradção em suas soluções de meus exercícios.*

(a) Numa urna com bolas coloridas há 2 bolas brancas e 3 pretas. Escolha-se ao acaso uma bola, observa-se sua cor, mas a bola escolhida não devolve-se à urna. Este procedimento repita-se 3 vezes (o nome tradicional para tal procedimento é **retiradas ao acaso** (ou, **aleatória**) **sem reposição**). Ache a probabilidade da bola retirada na terceira etapa ser branca.

(b) *Para entender melhor aquilo que acontece na retiradas sem reposição analisadas no item (a), sugiro que faça o presente item, no qual, ao contrário daquele, há reposição.*

A úrna é a mesma que no item (a), mas as bolas retiradas devolvem-se à urna (o nome tradicional para tal procedimento é **retiradas ao acaso** (ou, **aleatória**) **com reposição**). A pergunta é a mesma: achar a probabilidade da bola retirada na terceira etapa ser branca.

Exc. 5. Numa urna com bolas coloridas há 3 bolas pretas e 4 bolas brancas. Retirams-se da urna 3 bolas, em sequencia, ao caso e sem reposição. As bolas retiradas colocam-se numa outra urna, inicialmente vazia, e dessa, retira-se ao acaso uma bola. Qual é a probabilidade dessa ser preta?

No Exc. 5 há quatro etapas. Observe que a última etapa monta-se a partir dos resultados de todas as etapas anteriores. Isso chama sua atenção ao fato que em experimentos aleatórios sequenciais pode muito bem acontecer que sua etapa qualquer dependa não somente do resultado da etapa imediatamente anterior, mas dos resutlados de todas as etapas anteriores. Ao conceber esse fato, você percebe que a dependência do passado, por mais longa que ela for, está facilmente representada pelo diagrama de árvore. Essa facilidade fornecida "de graça" por diagrama de árvore a seus usuários é uma das razões que me faz insistir que meus alunos aprendam-o e usam-o para construir modelos probabilísticos de experimentos aleatórios sequenciais. Com essa revelação do poder do diagrama de árvore, eu poderia cesar o presente comentário, mas acontece que há mais um par de revelações que estão intrincicamente relacionadas com tudo aquilo que falei até o momento, e é por isso que coloco essa revelações aqui e agora. A primeira é que é errado pensar que a dependência de todo o passado surge somente quando a mesma está imposta explicitamente, como, por exemplo, no exercício presente (que determina explicitamente, que a urna a ser usada na quarta etapa compõe-se das bolas apanhadas nas três estapas anteriores). O equívoco de que em geral a dependência extende-se somente ao passado imediato adveio do fato que a maioria dos exemplos oferecidos para alunos são experimentos aleatórios de duas etapas. Em tais exemplos, a segunda etapa pode depender somente da primeira, e é isso que cria a impressão que a dependência típica extende-se para tráz somente por uma etapa. A realidade está na contramão dessa impressão. Tipicamente, a dependência é longa. Por exemplo, no Exc. 4(a) a sua terceira etapa depende da segunda e também da primeira. E observe ainda que no exemplo citado não foi colocado *nada de especial em sua formulação com o intuito de amarrar a terceira etapa às duas anteriores. Ainda mais, acontece que para "podar" a dependência é precisa formular a tipo de dependência cuidadosamente e explicitamente. Um bom exemplo disso é o Exc. 6; sua particularidade no que tange à dependência está destacada no seu comentário. Esse foi a primeira das duas revelações que pretendia fazer. A segunda é que o diagrama de árvore não é somente uma ferramenta comoda, mas é quase que universal, pois é com ela que você consegue abordar todos os experimentos aleatórios, menos os simples. Mas como os simples são, da fato, simples, então nossa preocupação é com os demais. E aí que descobre-se que que nos demais há sequenciais e os que podem ser modificados para serem sequenciais. Como todo experiemnto aleatório sequencial pode ser resolvido com auxílio de diagrama de árvore, ai conclui-se que tal diagrama é a "ferramenta universal".*

Exc. 6. Um açougue será inagurado hoje e tem 50% de probabilidade de receber carne de um frigorífico contratado para seu abastecimento. A cada dia consecutivo, a probabilidade de haver carne no açougue depende somente do fato de ter havido carne ou não no dia anterior, obedecendo a seguinte regra: 60% de chances de encontrar carne no açougue se, no dia anterior, esse produto estava disponível, e 30% se, no dia anterior, ela estava em falta. Ao tomar conhecimento sobre a inaguração do açougue, uma dona de casa resolveu ir até ele daqui dois dias. Determine a probabilidade dessa senhora encontrar a carne no acougue.

Aqui temos um experimento aleatório sequenciasl. Ele possui três etapas, a saber, hoje, amanhã e depois de amanhã. A pergunta dele se refere somente à terceira etapa, mas, para que possamos responder a ela, precisaremos construir o modelo probabilístico completo. Nesta construção, o desenho do diagrama de árvore não causa problemas. O que parece ser problematico é a atribuição de probabilidades aos galhos da árvore construida. Entretanto, olhando bem, vê-se que essas são dadas explicitamente no próprio enunciado; elas são do tipo "dados históricos", e o método de atribuição de probabilidades é o que foi chamado "por via de dados históricos". Observe também que o enunciado deixa explicito que "haver carne no açougue depende somente do fato de ter havido carne ou não no dia anterior", quer dizer, que em cada etapa, a dependência é somente da etapa anterior. E observe por fim, que a dependência enunciada está de acordo com a forma de dados históricos: o histórico reflete a presença/ausência de carne em função de <u>somente</u> aquilo que aconteceu no açouge no dia anterior.

Exc. 7. A idéia de construir e apresentar este exemplo surgiu no decorrer do trabalho sobre a primeira versão do livro, que, há 10 anos, era feita por mim (a ser chamado por Vladi no que se segue) e meus dois amigos e colegas, Paolo e Chico, que figuram no texto sobre seus proprios nomes.

Uma vez, três amigos, Chico, Paolo e Vladi, trabalharam na casa do Paolo, e, a noite, resolveram tomar cerveja. Para decidir quem dos três sairá para trazer a bebida, os amigos colocaram três bolas numa urna, sendo que duas eram brancas e a terceira era preta, e combinaram que quem tirasse a bola preta, iria para as compras. A retirada de bolas seria em sequencia e sem devolução. Este procedimento é bem conhecido e é muito usado em situações de escolha parecidas com a dos amigos. Entretanto, neguém deles vira a demostração do que a ordem do sorteio não afeite as chances dos concorrentes. De fato, a igualdade dos chances não é óbvio pois os participantes não fazem a mesma coisa: o primeiro deles escolha uma bola de urna com três bolas, já o segundo escolha de urna com duas bolas, enquanto que o último se contem com a única bola que sobra na urna. A probabilidade do primeiro concorrente retirar bola preta é 1/3. Isto é fácil. Entretanto, o segundo concorrente retira bola preta com a probabilidade 1/2 caso esta não ficou com o primeiro, mas, caso ficou, a probabilidade é nula. Sem colocar as contas no papel, é difícil ver que a probabilidade total é 1/3. A mesma dificuldade temos com a conta para a probabilidade total do terceiro concorrente ficar com a bola preta. Então, Chico, Paolo e Vladi decidiram, enquanto estejam sóbrios, se atarefar pela execução das contas que confirmarias a inimportância da ordem.

A formalização da tarefa é assim: calcular e comparar as probabilidade dos eventos

$C =$"Chico (o primeiro a retirar bola da urna) ficar com a bola preta"
$P =$"Paolo (o segundo a retirar bola da urna) ficar com a bola preta"
$V =$"Vladi (o terceiro, o último a retirar bola da urna) ficar com a bola preta"

sendo que tais probabilidades são determinadas pelo experimento aleatório descrito nos seguintes termos (abaixo, eu re-escrevo a historinha contada acima em termos mais precisos e suscintos):

> Chico escolhe – via retirada aleatória – uma bola da urna com bolas coloridas contendo 1 preta e 2 brancas, e passa a urna para Paolo. Este escolhe – via retirada aleatória – uma bola da urna, que veio para ele com duas bolas, e, após a reirada, passa a urna para Vladi. Vladi retira a única bola que está na urna passada para ele pelo Paolo. Ao escolher sua bola, cada participante não informa sua cor para os demais; digamos, ele esconde a bola e passa a urna para o próximo. Somente depois de Vladi retirar sua bola, que todos os três mostram as cores de suas bolas. (E recorde o fato que ficou irrelevante agora: quem ficar com a bola preta, é o escolhido para buscar cerveja.)

Exc. 8. Este exercício é uma modificação do Exercício 7 sobre Chico, Paolo e Vladimir apresentado acima. Recorde o problema tratado naquele exemplo: Chico, Paolo e Vladi retiram, cada um e nesta ordem, uma bola de uma urna que contem duas bolas brancas e uma preta; as bolas retiradas não devolvem-se à urna. A pergunta era achar as probabilidades dos seguintes três eventos: que Chico retire bola preta, que Paolo retire bola preta e que Vladi retire bola preta. Recorde que segundo o enunciado do Exc. 7, cada um dos amigos ao escolher uma bola, escondia-a no bolso e passava a urna para o próximo; as cores das bolas escolhidas revelaram-se só depois do último amigo retirar a bola da urna.

No presente exercício, eu peço construir o modelo probabilístico do experimento aleatório no qual o processo de retiradas cessa-se logo que a bola preta for retirada. Isto é, se Chico retirar bola preta, ele mostrará-la aos amigos e eles não continuarão o jogo (pois o "perdedor" já está definido). Se Chico retirar bola branca, ele também vai mostra-la para amigos, mas nesse caso, Paolo vai retirar da urna, ao acaso, uma das bolas que nela sobraram. Ele avisará aos amigos sobre a cor da bola retirada, e se essa for preta, então Vladi não continuará o jogo. Já se for branca, ai Vladi vai retirar a única bola que sobrou na urna; obviamente, essa bola é preta. Essas são as regras do jogo agora, e para ele que peço que você construa o modelo probabilístico. Depois, use o modelo construido para calcular as probabilidades dos eventos "Chico retirar bola preta", "Paolo retirar bola preta" e "Vladi retirar bola preta". Cuidado: no modelo probabilístico desse experimento aleatório tais eventos têm expressão diferente daquela que teriam no modelo do experimento aleatório considerado no Exc. 7. Entretanto, o bom senso sugere que o mesmo evento tem que ter as mesmas probabilidades em ambos os casos. Verifique isso.

Exc. 9. *O experimento aleatório desse exercício não é nem simples, nem sequencial; nele, há duas fontes de aleatoriedade e essas agem simultaneamente. O modelo probabilístico para experimento aleatório desse tipo pode ser feito usando os princípios de subjetividade e de extensão-redução; a idéia é usá-los para vinculas a presente situação a um experimento aleatório sequencial. Tal vínculo cria-se da maneira mostrada na Seção 1.4. Peço-lhe que repita os passos ensinados naquela seção para o fim da elaboração da solução desse exercício.*

José lança dado equilibrado pintado de azul, cujas faces são marcadas assim:

$$I,\ I,\ III,\ III,\ V,\ V$$

Ao mesmo tempo, Pedro lança seu dado. Este também é equlibrado, mas é pintado de vermelho e suas faces são marcadas do modo diferente:

$$II,\ II,\ IV,\ IV,\ VI,\ VI$$

Ganha o quem obtem o número maior. Qual é a probabilidade que José ganhe de Pedro? (Pintei os dados deste exercício para assinalar que são diferentes, no sentido de que quando os dois pararem de rodar, saberemos qual deles é do José e qual é do Pedro.)

Exc. 10. *Meu comentário ao presente exercício é o mesmo que o que fiz no Exc. 9.*

Dois dados equilibrados idênticos são lançados simultaneamente. Calcule a probabilidade de
(a) ocorrer o evento "o produto dos números mostrados nas faces superiores dos dados não é menor que 12 e não é maior que 15",
(b) ocorrer o evento "a soma dos números mostrados nas faces superiores dos dados é maior que 9".

Exc. 11. *Meu comentário ao presente exercício é o mesmo que o que fiz no Exc. 9.*

Quatro moedas honestas idênticas são lançadas simultaniamente. Qual é a probabilidade de vermos nelas mais "caras" que "coroas"? (Esta pergunta pode ser formulada da maneira mais direta: Qual é a probabilidade de vermos quatro ou "caras", ou três "caras" e uma "coroa"?)

Exc. 12. *Esse exercício tem o enunciado idêntico à situação tratada no Exemplo 17. Eu só troquei "2 pares de meias azul e 3 pares de meias vermelhas" por "1 par de meias azuis e 2 pares de meias vermelhas". Mas peço que a solução seja pouco diferente daquela apresentada no Exemplo 17: peço que você dá números 1 e 2 para meias azuis (digamos, eu marquei tais números com caneta permanente logo que comprei-as) e números 3, 4, 5, 6 para meias vermelhas, e peço que o diagrama de árvore seja feito da maneira tal que os números de meias apanhadas da gaveta estejam representados no diagrama. Está claro para você que os números é um atributo que não deve afetar a resposta final. Pois bem, é exatamente isso ao que miro, ao obrigar você incluir números de meias na construção do modelo probabilístico, pois quero que você sente num exemplo que a consideração de atributos adicionais e disnecessários não pode afetar o resultado.*

Uma vez, comprei para filha 1 par de meias azuis e 2 pares de meias vermelhas, e marquei, com caneta de tinta permanente) números 1 e 2 nas meias azuis, e números 3, 4, 5, 6 nas meias vermelhas. Um dia, todas elas foram para máquina de lavar roupa e sairam de lá diretamente para a gaveta da cômoda no quarto da filha. No manhã do dia seguinte, ainda no escuro, apanhei duas meias quaisquer da gaveta, vesti a filha, coloquei no carro e levei-a para escolinha. Qual é a probabilidade de eu ouvir da filha, quando ela for acordada, ainda no carro, pelo nascer do sol: "Papai! Você colocou meias de cores diferentes!"
Comentário de Mayara Rodrigues Medina Gomez (2020, FMVZ-USP): "Aqui fala-se sobre probabilidade envolvendo meias azuis e vermelhas numeradas. Na resolução do gabarito é considerado que o pai pegar a meia azul 1 e vermelha 3 é diferente de pegar a meia vermelha 3 e azul 1, por exemplo. Porém para mim não faz sentido, considerando a pergunta que pede a probabilidade da filha reclamar que as cores estão diferentes. Se a filha vai notar as cores, e levando em conta que os números são relevantes senão não seriam mencionados no exercício, o par azul 1 e vermelho 3 é o mesmo, independente de estar no pé direito ou esquerdo, a ordem não mudaria o fato de ser o mesmo par de meias. Esse pensamento está errado? Não estou compreendendo a resolução."

Resposta: "A filha "determina o evento em interesse". Já o observador do experimento aleatório (que é a retirada de meias da gaveta) pode definir a maneira de com o ele quer ver o procedimento. Acontece que se ele (o observador) ver a retirada como um sequencia de retiradas de meias, uma por uma e sem reposição, então a construção do modelo probabilístico fica mais simples e mais direto (pois a construção de tal modelo seguir-se-á o esquema de árvore).
Gostaria de salientar que a numeração não tem nada a ver com filha. Na realidade, a filha não vai ver os numeros e não vai importar para ela qual dos dois numeros estiver em qual dos dois pés. A numeração de meias faz com que o diagrama de árvore fique diferente daquele diagrama que seria caso os meios não estivessem enumeradas. O objetivo do exercício é permitir a aluno sentir que apesar da diferença entre os diagramas, o resultado final fica o mesmo. É claro que para que isso posse ser sentido, é precisa refazer o exercicio deixando meias sem numeros. Isso eu não peço pois essa abordagem (quer dizer, sem numeros) foi aplicada na solução apresnetada na aula.

Exc. 13. Numa escola há 7 professores e 3 professoras, sendo que dois dos 7 professores são irmãos. Será formada uma comissão de três pessoas. Qual a probabilidade que nesta comissão haja exatamente dois homens e que estes não sejam irmãos?

> *Este exercício é uma ligeira modificação do Exemplo 19. A modificação fez com que agora os irmãos são dois dos 7 professores, enquanto que no exemplo analisado, os irmãos eram um casal. Tal mudança não deve lhe causar dificuldades na solução deste exercício, desde que você entendeu bem o tratamento do Exemplo 19.*

1.6 Soluções para exercícios da Seção 1.5

Solução do Exc. 1. Vamos chamar de $\mathcal{A}$ntónio a pessoa que observa a cor da face na qual parou o tetraedro. Na perspectiva do $\mathcal{A}$ntónio, o espaço amostral é $\Omega_{\mathcal{A}} = \{branca, preta\}$. Isso é óbvio; o dificil é atribuir as probabilidade referentes áquilo que o $\mathcal{A}$ntónio vai ver, quer dizer $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}[branca]$ e $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}[preta]$. Para fazer isso, vamos construir um outro experimento aleatório, o tal de extendido. Nesse, tomamos o mesmo tetraedro, mas acrescentamos números em suas faces: a branca recebe o número 1, e as pretas recebem números 2, 3, 4. Seja $\mathcal{B}$runo o nome do observador que observa a cor e o número. O espaço de estados corresponde ao $\mathcal{B}$runo é $\Omega_{\mathcal{B}} = \{1, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$, e pelo princípio de simetria (que está presente no caso pois concordamos que os tetraedros lançados são todos perfeitos), a probabilidade $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$ atribuida a cada resultado de $\Omega_{\mathcal{B}}$ é 1/4. Tem-se a seguinte relação entre as observações do $\mathcal{A}$ntónio e do $\mathcal{B}$runo:

$\mathcal{B}$runo vé 1 se e somente se $\mathcal{A}$ntónio vé *branco*, e
$\mathcal{B}$runo vé **2** ou **3** ou **4** se e somente se $\mathcal{A}$ntónio vé *preto*

Portanto, $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}[1] = \mathbb{P}_{\mathcal{A}}[branco]$ e $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}[\mathbf{2}]+\mathbb{P}_{\mathcal{B}}[\mathbf{3}]+\mathbb{P}_{\mathcal{B}}[\mathbf{4}] = \mathbb{P}_{\mathcal{A}}[preto]$. Conclusão: $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}[branco] = 1/4$ e $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}[preto] = 3/4$.

Solução do Exc. 2(a). O experimento aleatório sequencial deste exercício é composto por duas etapas. Seu diagrama de árvore está na Figura 1.8.

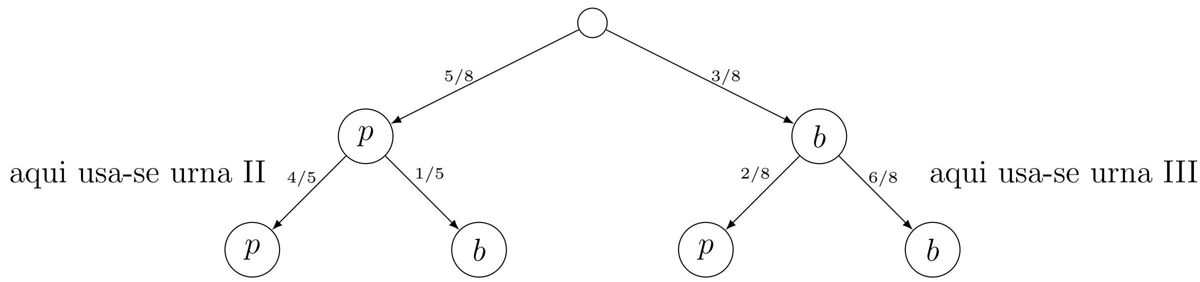


Figura 1.8: O diagrama de árvore para o experimento aleatório descrito no Exc. 2(a). Nos nodos do diagrama p representa uma bola preta e b representa uma bola branca.

Com o uso do diagrama de árvore constroi-se o seguinte modelo probabilístico para o enunciado do exercício:

$$\begin{aligned} &\Omega = \{b \to b,\, b \to p,\, p \to b,\, p \to p\}, \\ &\mathbb{P}[b \to b] = \tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{6}{8},\ \ \mathbb{P}[b \to p] = \tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{2}{8},\ \ \mathbb{P}[p \to b] = \tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{1}{5}\ \ \mathbb{P}[p \to p] = \tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

Interessa-nos a probabilidade da cor da bola retirada na segunda etapa ser preta. Isso acontece nos resultados $b \to p$ e $p \to p$. Portanto, a resposta final é a soma de suas probabilidades, isto é:

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5} = \frac{6}{64}+\frac{20}{40} = \frac{3}{32}+\frac{1}{3} = \frac{3+16}{32} = \frac{19}{32}.$$

Solução do Exc. 2(b). A solução do item (a) do exercício sugere que a abordagem ao item (b) comece assumindo que requer verificação

na urna I	há y bolas no total, sendo x bolas brancas,
na urna II	há m bolas no total, sendo n bolas pretas,
na urna III	há w bolas no total, sendo z bolas pretas,

e que os valores de y, x, m, n, w, z sejam achados a partir da imposição de que a probabilidade de ver cor preta na segunda retirada seja 1/2. (Essa imposição equivale ao pedido do Exc. 2(b). De fato, este requer que as probabilidades de ver no final branca ou preta sejam iguais, mas como as duas probabilidades em soma dão 1 então cada uma deve ser igual a 1/2.) A execução de toda essa abordagem não é difícil: usando o diagrama de árvore da Figura 1.9 e o argumento semelhante ao da solução do item (a), deduz-se que y, x, m, n, w, z devem satisfazer a equação

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{n}{m} + \frac{y-x}{x} \cdot \frac{z}{w} = \frac{1}{2}$$

Como temos 6 incógnitas e duas equações na expressão acima, existem várias soluções diferentes, mas só queremos uma. Então vamos definir algumas valores para x, y e m e, assim, determinar as demais quantidades. Seja $x = 4, y = 10$ e $m = 8$, assim, a equação original torna-se equivalente à equação

$$\frac{4}{10}\left(\frac{n}{8}\right) = -\frac{6}{10}\left(\frac{z}{w}\right) + \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{4}{10}\left(\frac{8-2n}{8}\right) = \frac{6}{10}\frac{-w+2z}{w}$$

Na última equação ainda há três incognitos (n, z e w). Poderiamos escolher valores numéricos para quaisquer duas das três e ficar com uma equação que determinaria o valor da terceira. Mas vamos pelo caminho mais simples. Escolheremos o valor 8 para w. A inteção da escolha é eliminar os denominadores. De fato, é facil ver que com $w = 8$, a última equação adquira o seguinte formato: $4(8-2n) = 6(-8+2z)$. Esta equação possui muitas soluções, uma das quais é aquela que faz $8 - 2n$ ser 6, e que faz $(-8 + 2z)$ ser 4. Isso ocorre quando $n = 1$ e $z = 6$. Agora temos valores numéricos para todas as variáveis intriduzidas (que são x, y, m, w, n, z), e eles dão-nos a resposta à pergunta do exercício:

Na urna I,	há 4 bolas brancas e 6 bolas pretas.
Na urna II,	há 7 bolas brancas e 8 bolas pretas.
Na urna III,	2 bolas brancas e 6 bolas pretas.

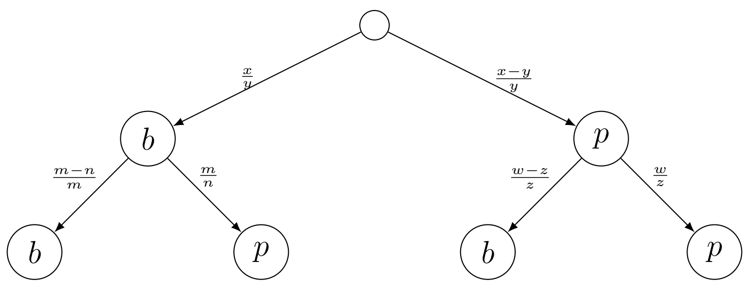


Figura 1.9: O diagrama de árvore para o experimento aleatório descrito no Exc. 2(b). Nos nodos do diagrama p representa uma bola preta e b representa uma bola branca.

Solução do Exc. 3. O experimento aleatório descrito no enunciado é do tipo "sequencial": ele está composto, segundo o enunciado, por duas etapas, sendo que na primeira etapa lança-se um dado equilibrado, e na segunda, um outro dado, também equilibrado.

Vale, talvez, ressaltar que o resultado obtido na primeira etapa não interfere naquilo que é feito na etapa seguinte. Ou, sendo dito em termos mais específicos, o dado cinza será lançado na segunda etapa, seja que for o resultado visto no dado branco lançado na primeira etapa. Este fato está claro do enunciado do presente exercício. Mesmo assim, a nota é útil pois há experimentos aleatórios compostas nos quais as ações em suas etapas dependem dos resultados obtidos anteriormente. A definição precisa e indúbia de tal interferência é por conta do enunciado. No meu texto, seguirei esta regra pontualmente.

O modelo probabilístico para o experimento aleatório descrito faz-se com auxílio de diagrama de árvore. O diagrama correspondente está na Figura 1.10. Seu formato segue-se diretamente do enunciado. A respeito do formato, então, não há nem o que dizer mais, pois ele é um e único: há bifurcação com 6 galhos a partir da raíz, a cada galho bifurca em outros 6. Sua "liberdade" reduz-se em escolher como desenhar a árvore: de esquerda para a direita, ou – como fiz abaixo – de cima para baixo e com galhos crescendo numa direção só, coisa que acontece na natureza por causa de vento, e, no meu livro, por causa da limitação do espaço na folha. A outra sua "liberdade" está na escolha da notação para os nos. Já falamos sobre isto e concordamos que a notação deve ter uma clara relação com o enunciado. No caso, nada é mais óbvio que usar os números de 1 a 6; é o que fizemos abaixo.

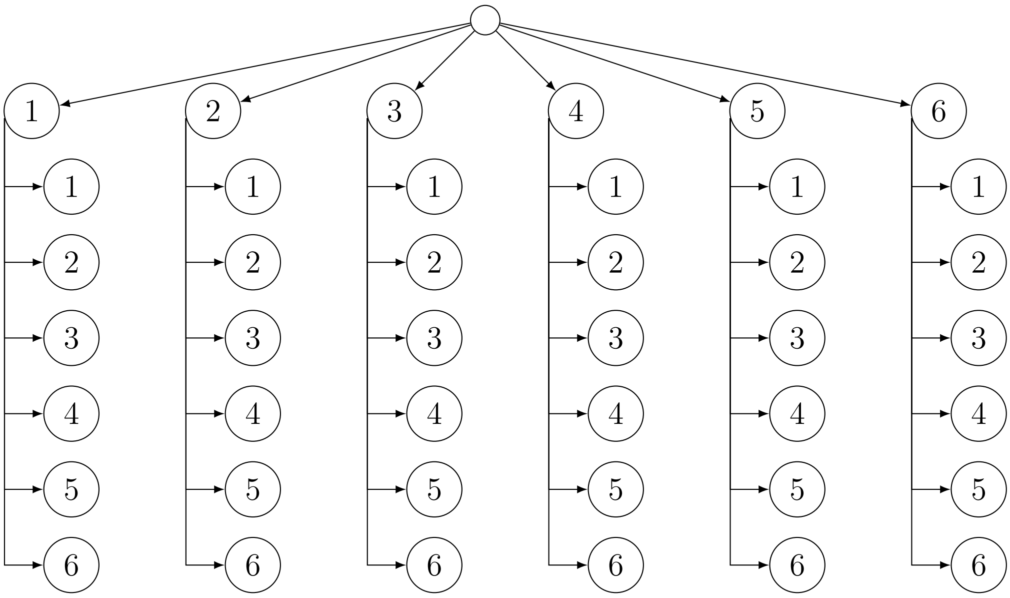


Figura 1.10: O diagrama de árvore para o experimento aleatório desxcrito no Exc. 3, no qual lançam-se em sequencia dois dados equilibrados.

O diagrama de árvore nos dá o modelo probabilístico, quer dizer, o conjunto de todas as realizações possíveis do experimento aleatório em interesse e a probabilidade de cada realização. O conjunto de realizações está apresentado abaixo, de acordo com nosso acordo (da dedução de conjunto a partir de diagrama de árvore): cada realização corresponde a um caminho da árvore e codifica-se pela sequencia de números atribuídos aos nós por onde passa seu caminho, os números são ligados por flecha que indica qual dos dois veio da primeira etapa e qual da segunda.

$$\begin{aligned}\Omega = \{ \quad & 1\to 1, \quad 1\to 2, \quad 1\to 3, \quad 1\to 4, \quad 1\to 5, \quad 1\to 6,\\ & 2\to 1, \quad 2\to 2, \quad 2\to 3, \quad 2\to 4, \quad 2\to 5, \quad 2\to 6,\\ & 3\to 1, \quad 3\to 2, \quad 3\to 3, \quad 3\to 4, \quad 3\to 5, \quad 3\to 6,\\ & 4\to 1, \quad 4\to 2, \quad 4\to 3, \quad 4\to 4, \quad 4\to 5, \quad 4\to 6,\\ & 5\to 1, \quad 5\to 2, \quad 5\to 3, \quad 5\to 4, \quad 5\to 5, \quad 5\to 6,\\ & 6\to 1, \quad 6\to 2, \quad 6\to 3, \quad 6\to 4, \quad 6\to 5, \quad 6\to 6 \quad \}\end{aligned} \tag{1.25}$$

Vamos à atribuição de probabilidade. O primeiro passo é colocar a probabilidade em cada galho de cada bifurcação da árvore. Recorde: cada bifurcação é, por sí só, um experimento aleatório simples (este fato é a exigência de nossa definição do conceito "experimento aleatório composto"). Na primeira bifurcação, lançamos um dado equilibrado. De acordo com o princípio de simetria (que aplica-se no caso, pois o dado foi declarado "equilibrado"), a probabilidade de cada galho é então, 1/6. Da mesma maneira deduz-se que 1/6 é a probabilidade de cada galho de cada uma das 6 bifurcações da segunda etapa. Nisto, termina-se o primeiro passo. No segundo passo, é só multiplicar as probabilidades; isto é: a probabilidade de cada resultado é o produto dos probabilidades dos galhos por onde passo seu caminho. Eis o resultado:

$$\mathbb{P}[\omega] = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{36} \text{ para cada resultado } \omega \text{ de } \Omega,$$
$$\text{quer dizer, } \mathbb{P}[1 \to 1] = \mathbb{P}[1 \to 2] = \cdots = \mathbb{P}[6 \to 6] = \tfrac{1}{36}$$

Agora que o modelo probabilístico foi feito (recorde, isto significa que foi descrito o conjunto de todas os resultados possíveis, e a cada resultado, foi atribuida sua probabilidade), podemos prosseguir para a solução, propriamente dito. A pergunta do enunciado e nossa construção do modelo probabilístico deixam claro que o interesse é a probabilidade de ocorrência de qualquer um dos resultados que atendem o quesito "o produto dos números mostrados nas faces superiores dos dados não é menor que 12 e não é maior que 15". Recordando a codificação usada na construção do espaço de estados, por verificação direta, tem-se que são estes que atendem o quesito:

$$A = \{2 \to 6,\ 3 \to 4,\ 3 \to 5,\ 4 \to 3,\ 5 \to 3,\ 6 \to 2\} \tag{1.26}$$

Ainda escrevemos a lista como evento e demos a esse o nome A. É a probabilidade desse evento que está em questão. De acordo com a definição, a probabilidade perguntada é a soma das probabilidades dos resultados, que compões o evento. Então, a resposta final é $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

Solução do Exc. 4(a). Observe que neste experimento as bolas que são retiradas não são devolvidas à urna, por isso as probabilidades mudam de acordo com o nível no diagrama de árvore, veja a Figura 1.11.

Solução feita em 30/03/19 por monitor. Requer verificação

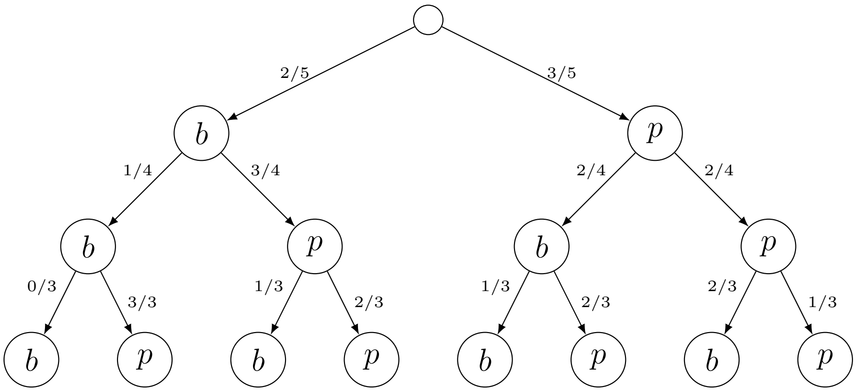


Figura 1.11: O diagrama de árvore para o experimento aleatório descrito no Exc. 4(a). Nos nodos do diagrama p representa uma bola preta e b representa uma bola branca.

Seja A o evento "a terceira bola retirada é branca", assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A] &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\\ &= \frac{6}{60} + \frac{6}{60} + \frac{12}{60}\\ &= \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Solução do Exc. 5. O experimento aleatório sequencial deste exercício é composto por quatro etapas. Primeiramente, deve-se retirar três bolas de uma urna (as três primeiras etapas) e depois, selecionar ao acaso uma dessas três (a última, quarta, etapa). Observe que a retirada das três bolas é feita sem reposição. Além disso, como existem bolas de duas cores diferentes, as probabilidades de se retirar bolas pretas e brancas mudam após uma bola ser removida da caixa. Construir um diagrama de árvore ajuda no entendimento do experimento, veja a Figura 1.12. Veja que o quarto nível do diagrama representa o resultado do experimento após a terceira etapa ter sido concluída.

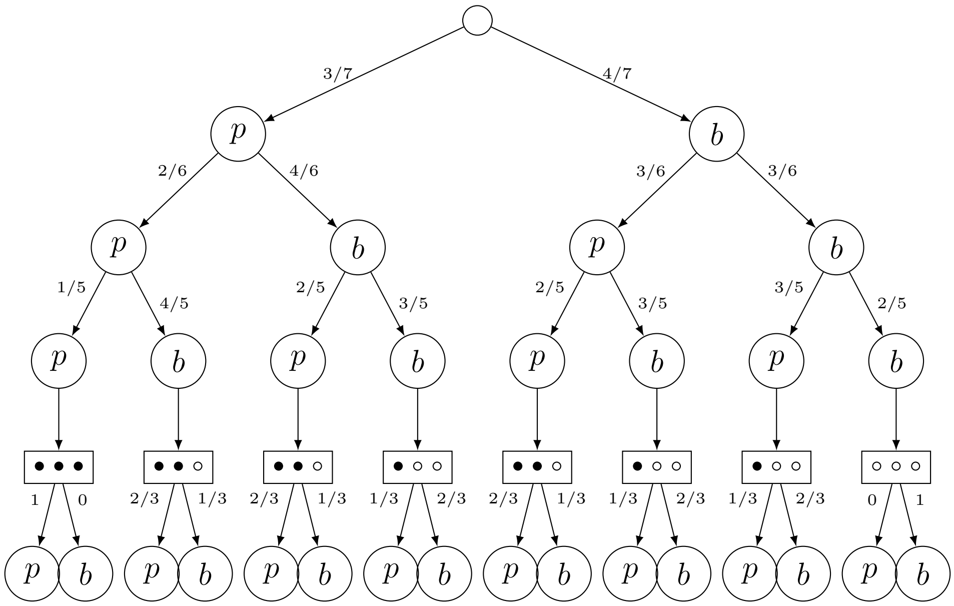


Figura 1.12: O diagrama de árvore para o experimento aleatório descrito no Exc. 5. Nos nodos do diagrama p representa uma bola preta e b representa uma bola branca. O diagrama apresenta o experimento aleatóriosequencial de quatro etapas. A última etapa, a quarta, tem na sua apresentação uma "ajudinha" que é a caixinha com a composição de bolas na urna da qual retira-se a bola naquela quarta etapa.

O evento "a bola retirada na quarta etapa é preta" constitui-se dos seguintes oito resultados:

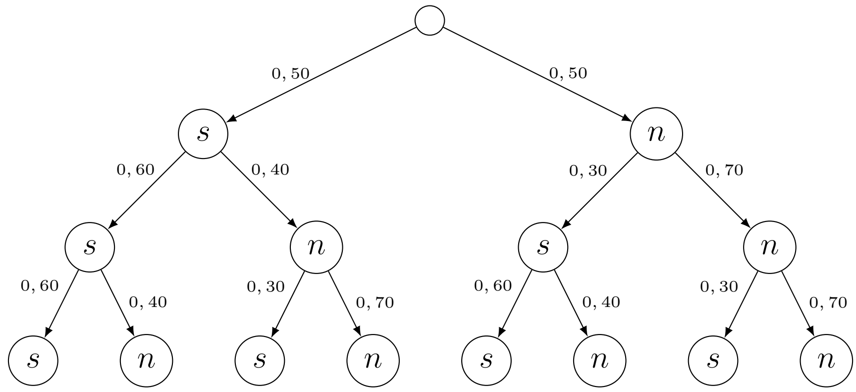
$$(p \to p \to p \to p),\ (p \to p \to b \to p),\ (p \to b \to p \to p),\ (p \to b \to b \to p),$$
$$(b \to p \to p \to p),\ (b \to p \to b \to p),\ (b \to b \to p \to p),\ (b \to b \to b \to p)$$

Suas respectivas probabilidades estão apresentadas abaixo; os valores seguem-se diretamente do diagrama de árvore apresentada na Figura 1.12:

$$\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot 1,\quad \tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{2}{3},\quad \tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{2}{3},\quad \tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{3},$$
$$\tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{2}{3},\quad \tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{3},\quad \tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{3},\quad \tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot 0$$

A soma desses valores é 3/7 o que é a resposta final do exercício.

Solução do Exc. 6. O diagrama de árvore correspondente ao experimento aleatório descito no enunciado é assim:



onde os nos do primeiro nível abaixo da raíz correspondem ao primeiro dia (o dia de inaguração), os do segundo ao segundo dia, e os do terceiro ao terceiro dia, e onde "s" significa "ter carne no açougue e "n" – não ter. Chamo a atenção ao fato que a raíz não corresponde a nenhum dia; tal fato segue-se de nosso acordo sobre a construção de árvores. A partir do diagrama, é fácil identificar os resultados do experimento aleatório:

$$\begin{aligned}\Omega = \{ \quad & (s \to s \to s), (s \to s \to n), (s \to n \to s), (n \to s \to s), \\ & (s \to n \to n), (n \to s \to n), (n \to n \to s), (n \to n \to n)\}\end{aligned}$$

As respectivas probabilidades são os produtos dos números colocados ao lado das flechas do diagrama.

Introduzimos o evento A como "ter carne no açougue no terceiro dia". É o evento cuja probabilidade está sendo procurada. É óbvio que

$$A = \{(s \to s \to s), (s \to n \to s), (n \to s \to s), (n \to n \to s)\}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}I\!\!P[A] &= I\!\!P[(s \to s \to s)] + I\!\!P[(s \to n \to s)] + I\!\!P[(n \to s \to s)] + I\!\!P[(n \to n \to s)] \\ & \quad \text{(usando o diagrama de árvore para calcular as probabilidades)} \\ &= 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,435\end{aligned}$$

A solução foi feita, mas antes de fechar o assunto, gostaria de apresentar-lhe um diagrama de árvore que é diferente daquele que foi usado na solução. Este duagrama alternativo está na Figura 1.13; ele foi feito por um dos meus alunos de pós-graduação quando este foi fazer o gabarito do presente exrecício. O que não gostei no diagrama dele foi a maneira de marcar os nos da árvore. Ele tentou usar os eventos e expressar os resultados como intersecções destes. Se você analizar o resultado dele, descobrirá que sua abordagem não funcionou bem. Mas eu não convido você ao análise deste diagrama. Só quero que você perceba que existam diversas maneiras para a codificação de nós de diagramas de árvore quando este está empregado para representar experimentos aleatórios compostos, e quero também que você acredite que entre todas estas maneiras, aquela que ensinei para você neste livro é a mais segura.

Observação: Daqui adiante, vou usar a notação tradicional, no sentido que escreverei (a, b, c) em vez de $(a \to b \to c)$.

Soluçaõ do Exc. 7. Espandimos o experimento aleatório, e seja o expandido correr de acordo com as seguintes regras:

1. Há três bolas numerados por 1, 2 e 3, sendo que as duas primeiras são brancas e a terceira é preta. As bolas são idênticas no tato. Tal identidade implica na seguinte propriedade: na retirada aleatória de uma bola de urna com k bolas, cada bola aparece com a probabilidade $1/k$. Especificamente falando, se as três bolas estão na urna, então a probabilidade de uma específica ser escolhida na retirada aleatória, é $1/3$; enquanto que se colocarmos quaisquer duas, a probbailidade fica $1/2$.

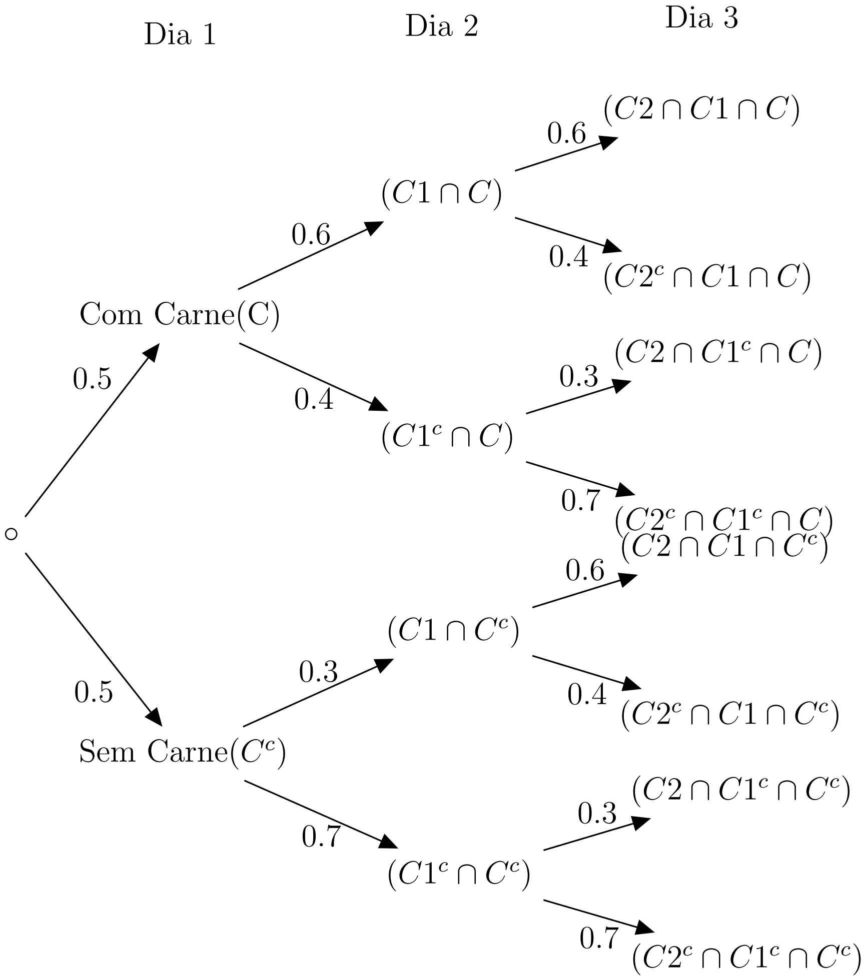


Figura 1.13: Esquema de Árvore de Probabilidade para "carne no acougue" feito sem respeito às normas por mim canonizdas. Foi parte da solução sugerido por um dos meus alunos, do qual pedi ajuda na elaboração do gabarito do correspondente exercício. Agradecemos ao aluno pelo esforço e tentaremos não repetir seus erros.

2. Chico escolhe – via retirada aleatória – uma bola da urna com as três bolas, e passa a urna para Paolo. Este escolhe – via retirada aleatória – uma bola da urna, que veio para ele com duas bolas, e, após a reirada, passa a urna para Vladi. Vladi retira a única bola que está na urna passada para ele pelo Paolo. Ao escolher sua bola, cada participante não informa seu número para os demais; digamos, ele esconde a bola e passa a urna para o próximo. Somente depois de Vladi retirar sua bola, que todos os três mostram os números de suas bolas. Quem ficar com a bola de número 3, a preta, é o "escolhido" (para buscar cerveja).

Quanto à justificativa da expanção, noto que eles são permitidos pois não alteram os resultados. De fato, Chico, Paolo e Vladi simplesmente desconsideram os números que acrescentei às bolas, e, se a bola preta está com alguem, ela continua com a mesma pessoa apesar da obrigação da continuação de retiradas e apesar do acordo que a possuidor da bola só será revelado após que a urna seja esvasiada.

Quanto à necessidade da expançaõ, esta é opcional e é usada questão de facilidades acrescimos facilitaram a construção do modelo probabilístico para o experimento aleatório resultante. A facilidade é a questão pessoal. Um caminho alternativa estará sugerido e analisado no Exercício 8.

Vamos á solução. Esta começa com a observação que trata-se aqui de um experimento aleatório composto (a justificativa: as bolas são retiradas em seqüência). Conforme explicado acima, a construção do modelo probabilístico deste experimento aleatório é feita com auxílio do diagrama de árvore; ele está logo a seguir.

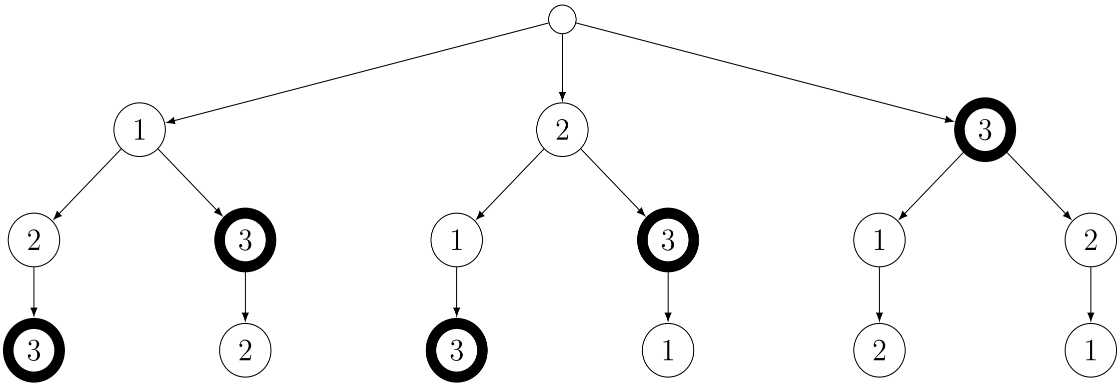


Figura 1.14: O diagrama de árvore para o experimento aleatório do Exemplo 7 no qual três amigos retiram, um atrás de outro, uma bola de urna que contém duas bolas brancas numeradas 1 e 2, e uma bola preta com número 3.

Cada bifurcação do diagrama é um experimento aleatório simples. As probabilidades de cada elo O diagrama de árvore mostra claramente que o conjunto de todos os resultados possíveis é :

$$\Omega = \{(1,2,3); (1,3,2); (2,1,3); (2,3,1); (3,1,2); (3,2,1)\} \tag{1.27}$$

A codificação é óbvia: o primeiro número em cada grupo de três significa o número da bola retirada por Chico, o segundo é de Paolo e o terceiro é de Vladi.

As probabilidades de todos os galhos no diagrama vem do princípio de simetria: uma vez que as bolas são idênticas no tato, quer dizer, ao colocar a mão na urna não dá para sentir a diferença entre as bolas, logo a probabilidade de escolher qualquer uma delas é 1 dividido pelo número total de bolas na urna.

Usando o princípio de atribuição de probabilidade para experimentos aleatórios compostos, temos que

$$\begin{aligned} I\!P[(1,2,3)] = I\!P[(1,3,2)] = I\!P[(2,1,3)] = \\ = I\!P[(2,3,1)] = I\!P[(3,1,2)] = I\!P[(3,2,1)] &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Segue-se da definição verbal dos eventos em interesse que estes adquirem as seguintes espressões:

$$C = \{(3,2,1); (3,1,2)\}, \qquad P = \{(1,3,2); (2,3,1)\}, \qquad V = \{(1,2,3); (2,1,3)\}.$$

De acordo com a definição da "probabilidade de evento", temos:

$$\begin{array}{l} I\!P[C] = I\!P[(3,2,1)] + I\!P[(3,1,2)] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ I\!P[P] = I\!P[(1,3,2)] + I\!P[(2,3,1)] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ I\!P[V] = I\!P[(1,2,3)] + I\!P[(2,1,3)] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{array}$$

Estes resultados mostram que cada amigo tem a mesma probabilidade de ser escolhido para buscar a cerveja.

A solução apresentada deve incomodar nosso leitor pela existência da diferença entre o experimento aleatório nela analisado e situação real que foi modelada por este exeprimento. Especificamente falando, na situação real

(a) as bolas não são numeradas;

(b) a sequencia de retiradas ceasa-se logo que a bola preta for retirada.

enquanto que no experimento aleatório associado à situação, as bolas foram numeradas e as retiradas continuam até exgotar as bolas da urna.

Quanto à legitimidade dos acrescimos, noto que eles são permitidos pois não alteram os resultados. De fato, Chico, Paolo e Vladi simplesmente desconsideram os números que acrescentei às bolas, e, se a bola preta está com alguem, ela continua com a mesma pessoa apesar da obrigação da continuação de retiradas e apesar do acordo que a possuidor da bola só será revelado após que a urna seja esvasiada.

Solução do Exc. 8. O diagrama de árvore deste exercício esta apresentada abaixo.

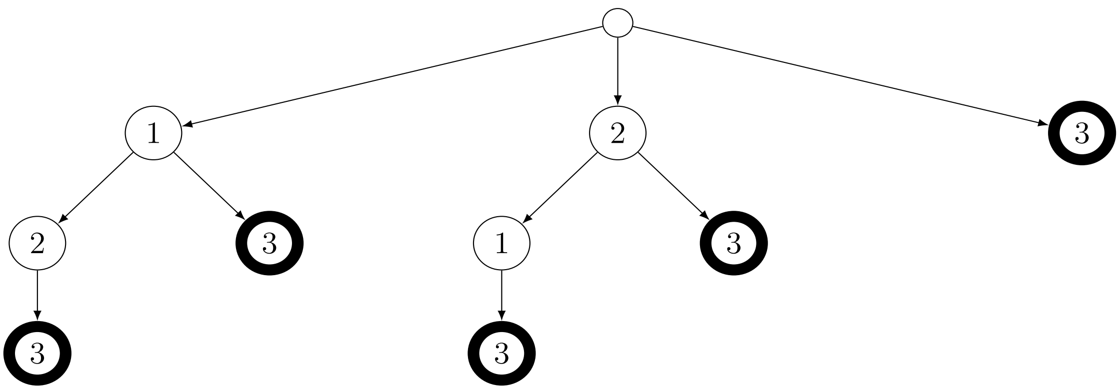


Diagrama de árvore para o experimento aleatório do Exc. 8.

Ele é diferente da mioria dos diagramas que fizemos até agora, pois sua árvore é assimétrica. Isso ocorreu devido à exigência de que o processo de retirada cessa assim que a bola preta for escolhida. Claro que a forma assimétrica da árvore não invalida as regras do seu uso para a construção do modelo probabilístico do exercício: a cada resultado continua a corresponder um caminho da árvore, e a probabilidade de um resultado continua a ser calculada como o produto das probabilidades dos galhos do caminho que corresponde a este resultado.

Do diagrama, tem-se que

$$\Omega = \{(1,2,3),(1,3),(2,1,3),(2,3),(3)\}$$

e que

$$\begin{array}{l} I\!P[(1,2,3)] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1,\ I\!P[(1,3)] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}, \\ I\!P[(2,1,3)] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1,\ I\!P[(2,3)] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2},\ I\!P[(3)] = \frac{1}{3} \end{array}$$

Como ás bolas brancas foram assicados números 1 e 2, e à bola preta o número 3, então o evento "Chico escolher bola preta"compõe-se do resultado (3),e, portanto, sua probabilidade é 1/3. O evento "Paolo escolher bola preta" compõe-se dos resultados $(1,3)$ e $(2,3)$, e, portanto sua probabilidade é 1/3 também. Por fim, o evento "Vladi escolher bola preta" compõe-se dos resultados $(1,2,3)$ e $(2,1,3)$. e sua probabilidade, portanto, é 1/3 assim como a do cada um dos eventos anterioes. Quer dizer, mais uma vez confirmaram que o sorteio "até a primeira pessoa retirar única bola preta de urna contendo bpçs em número igual à quantidade de participantes" é um sorteio justo na perspectiva da igualdade das probabilidades do sucesso de cada participante.

Solução do Exc. 9. Tomo o dado que Josê lançará e enumero seus faces por número árabes de 1 a 6: escrevo 1 e 2 nas faces onde o dado tem I, escrevo 3 e 4 nas faces onde tem III, e escrevo 5 e 6 onde tem V. A correspondência dos números está apresentada na linha abaixo

$$1 - I, 2 - I, 3 - III, 4 - III, 5 - V, 6 - V$$

Acerca do dado que Pedro lançará, a correspondência dos números árabes acrescidos aos números romanos existentes é assim:

$$1 - II, 2 - II, 3 - IV, 4 - IV, 5 - VI, 6 - VI$$

Mando que José jogue seu dado primeiro.

Agora, ao raciocinar como fiz para a solução de Exc. 10, chego a determinar o conjunto de todos os resultados possíveis e à probabilidade de cada um deles:

$$\begin{array}{rc} \Omega = \{ & (1_I, 1_{II}), (1_I, 2_{II}), (1_I, 3_{IV}), (1_I, 4_{IV}), (1_I, 5_{VI}), (1_I, 6_{VI}), \\ & (2_I, 1_{II}), (2_I, 2_{II}), (2_I, 3_{IV}), (2_I, 4_{IV}), (2_I, 5_{VI}), (2_I, 6_{VI}), \\ & (3_{III}, 1_{II}), (3_{III}, 2_{II}), (3_{III}, 3_{IV}), (3_{III}, 4_{IV}), (3_{III}, 5_{VI}), (3_{III}, 6_{VI}), \\ & (4_{III}, 1_{II}), (4_{III}, 2_{II}), (4_{III}, 3_{IV}), (4_{III}, 4_{IV}), (4_{III}, 5_{VI}), (4_{III}, 6_{VI}), \\ & (5_V, 1_{II}), (5_V, 2_{II}), (5_V, 3_{IV}), (5_V, 4_{IV}), (5_V, 5_{VI}), (5_V, 6_{VI}), \\ & (6_V, 1_{II}), (6_V, 2_{II}), (6_V, 3_{IV}), (6_V, 4_{IV}), (6_V, 5_{VI}), (6_V, 6_{VI}) \quad \} \end{array}$$

com

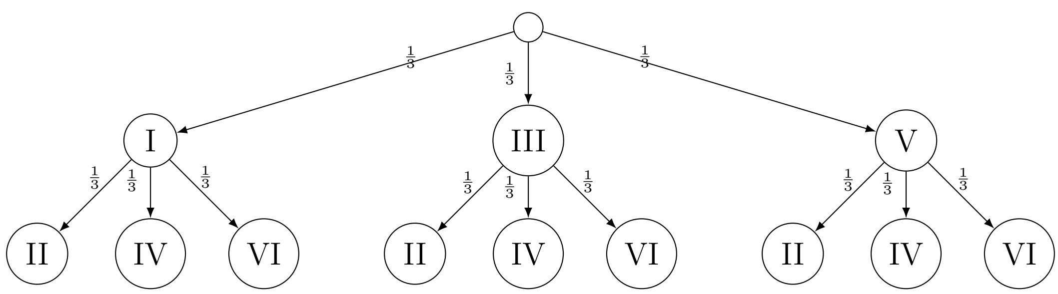
$$I\!\!P[\omega] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ para cada realização } \omega \text{ de } \Omega.$$

Os números árabes me permitiram ver claramente que cada lançamento tem 6 resultados equiprováveis, e os números romanos que coloquei no índice facilitarão minha procura por resultados que compõem o evento "o dado do José mostra número romano maior que o número romano mostrado no dado do Pedro". Eis estes:

$$\begin{array}{l} (3_{III}, 1_{II}), (3_{III}, 2_{II}), \\ (4_{III}, 1_{II}), (4_{III}, 2_{II}), \\ (5_V, 1_{II}), (5_V, 2_{II}), (5_V, 3_{IV}), (5_V, 4_{IV}), \\ (6_V, 1_{II}), (6_V, 2_{II}), (6_V, 3_{IV}), (6_V, 4_{IV}) \end{array}$$

Como são 12 resultados e como cada um deles tem probabilidade $\frac{1}{36}$, então o evento supramencionado tem a probabilidade $12 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$.

Solução alternativa do Ex. 9. Ao agrupar os resultados do lançamento do dado de José seguindo ao valor do número romano, posso interpretar o lançamento de José como um experimento aleatório simples com os resultados I, III e V, cujos respectivas probabilidades são 1/3, 1/3, 1/3. Via o mesmo argumento, chego a interpretar o lançamento de Pedro como um experimento aleatório simples com os resultados II, VI e VI, e com as respectivas probabilidades 1/3, 1/3, 1/3. Com estas interpretações, posso ver o jogo entre José e Pedro como um experimento aleatório composto cujo diagrama de árvore tem o formato apresentado abaixo:



De acordo com o diagrama, o conjunto de todos os resultados possíveis adquire a seguinte cara:

$$\begin{array}{rc} S = \{ & (I, II), (I, IV), (I, VI) \\ & (III, II), (III, IV), (III, VI), \\ & (V, II), (V, IV), (V, VI) \quad \} \end{array}$$

e a probabilidade que devemos atribuir a cada resultado deve ser $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Agora, o evento cuja probabilidade nos interessa (o evento que José ganhe do Pedro) compõe-se dos resultados $(II, II), (V, II), (V, IV)$ (isto descobre-se analisando os resultados de S um por um). Portanto, a probabilidade do evento em interesse é $3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

A solução alternativa aparenta ser mais curta que a anterior. Mas se eu obtar por jistificativa plena de todos os seus passos, eu não vou poder evitar a introdução e a discussão daquela numeração das faces dos dados que fiz na solução anterior.

Solução do Exc. 10. Vamos considerar o seguinte experimento aleatório a ser chamado "$\mathcal{C}$olorido". Ele é sequencial. Nele, dois dados equilibrados, um branco e outro cinza, mas cada um carregando os números $1, 2, \ldots, 6$ da maneira tradicional, são lançados em sequencia, primeiramente o branco e depois o cinza. É o experimento aleatório do Exc. 3. Seu modelo probabilístico foi feito na solução daquele exercício; vou me referir a esse por $\Omega_{\mathcal{C}}$, $I\!P_{\mathcal{C}}$. Se perguntarmos, no âmbito do Exc. 3, sobre a $I\!P_{\mathcal{C}}$-probabilidade do evento $A_{\mathcal{C}}$ composto por todos os resultados de $\Omega_{\mathcal{C}}$ nos quais o produto dos números esteja não menor que 12 e não maior que 15, então a resposta nesta pergunta é $1/6$, conforme mostrado na solução do Exc. 3, que você acha na presente seção.

Acontece, entretanto, que $\Omega_{\mathcal{C}}$, $I\!P_{\mathcal{C}}$ não é modelo probabilístico do experimento aleatório do presente exercício. Como nele, os dados são idênticos e são lançados simultaneamente, então o espaço de estados dele é assim:

$$\begin{array}{rcccccc} \Omega = \{ & \{1,1\}, & \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, & \{1,6\}, \\ & & \{2,2\}, & \{2,3\}, & \{2,4\}, & \{2,5\}, & \{2,6\}, \\ & & & \{3,3\}, & \{3,4\}, & \{3,5\}, & \{3,6\}, \\ & & & & \{4,4\}, & \{4,5\}, & \{4,6\}, \\ & & & & & \{5,5\}, & \{5,6\}, \\ & & & & & & \{6,6\} \quad \} \end{array} \tag{1.28}$$

Observe que cada resultado foi escrito como um conjunto devido ao fato que o conceito de conjunto pressupos que a ordem não importa, e é exatamente a situação que o experimento aleatório do enunciado descreveu.

Embora Ω e $\Omega_{\mathcal{C}}$ sejam diferentes, há uma relação entre eles. Relação essa foi explicada na Seção 1.4, que ensinou a tratar experimentos aleatórios danados. Aplicando os métodos daquela seção, deduz-se que

$$I\!P[\{1,1\}] = I\!P_{\mathcal{C}}[1 \to 1],\ I\!P[\{2,2\}] = I\!P_{\mathcal{C}}[2 \to 2],\ I\!P[\{3,3\}] = I\!P_{\mathcal{C}}[3 \to 3],$$
$$I\!P[\{4,4\}] = I\!P_{\mathcal{C}}[4 \to 4],\ I\!P[\{5,5\}] = I\!P_{\mathcal{C}}[5 \to 5],\ I\!P[\{6,6\}] = I\!P_{\mathcal{C}}[6 \to 6]$$

enquanto que

$$I\!P[\{i,j\}] = I\!P_{\mathcal{C}}[i \to j] + I\!P_{\mathcal{C}}[j \to i], \text{para quaisquer } i,\ j \text{ com } i < j$$

Agora, o evento cuja $I\!P$-probabilidade foi perguntada no presente exercício é

$$B = \big\{\{2,6\},\ \{3,4\},\ \{3,5\}\big\}$$

Usando a relação da $I\!P$- probabilidade com $I\!P_{\mathcal{C}}$-probabilidade como exposta acima, deduz-se que a $I\!P$ probabilidade de B é $1/6$.

Solução do Exc. 11. Como as moedas são idênticas e como são lançadas ao mesmo tempo, então, na perspectiva de observador, os resultados desse experimento aleatório distingem-se entre si exclusivamente pela quantidades de "caras" e "coroas" mostradas pelas moedas quando as mesmas pararem. Portanto, o correspondente espaço de estados é

$$\Omega = \{4caras0coroas,\ 3caras1coroa,\ 2caras2coroas,\ 1cara3coroas,\ 0caras4coroas\}$$

A codificação acima usada é a mais direta e intuitiva. Para a completude da discussão sobre a liberdade de codificação, gostaria de apresentar mais duas alternativas:

$$\Omega = \{4, 3, 2, 1, 0\} \text{ e } \Omega = \{\{h,h,h,h\}, \{h,h,h,t\}, \{h,h,t,t,\}, \{h,t,t,t\}, \{t,t,t,t\}\}$$

(Note o fato supreendente: a primeira das duas é tal boa quanto qualquer outra, embora ela conta somente o número de "caras"; acontece que isso é suficiente para a udentificação do resultado todo, pois o número de "coroas" é 4 menos o número de "caras".)

Como se vé da exposição acima, a apresentação do espaço de estados não causa problemas. O problema está na atribuição de probabilidades. Para tal, vamos introduzir um experimento aleatório chamado auxiliar. Nele, há 4 moedas honestas, pintadas de azul, cinza, marrom e verde, que estarão lançadas nessa ordem. O diagrama de árvore do experimento aleatório auxiliar está na Figura 1.16.

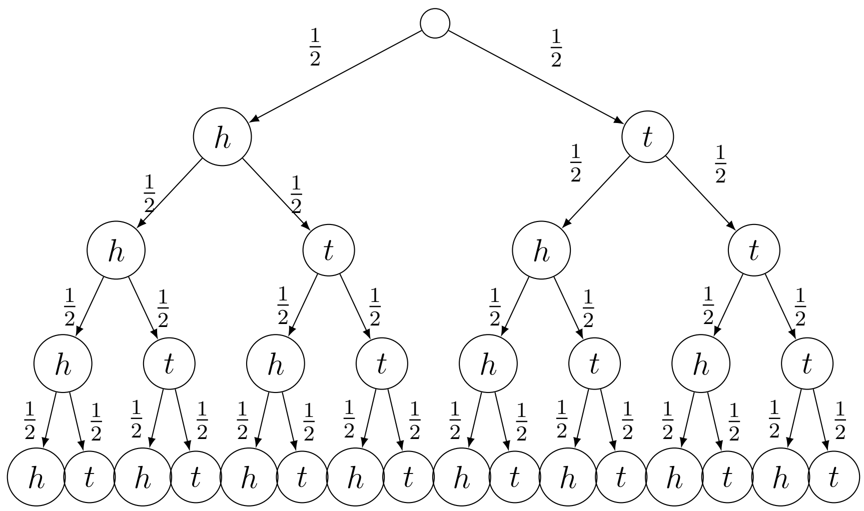


Figura 1.16: O Diagrama de árvore para o experimento aleatório auxiliar construído na solução do Exercício 11.

O diagrama acarreta o seguinte modelo probabilístico para o experimento aleatório auxiliar:

$$\begin{aligned}
\Omega_{aux} &= \big\{(h,h,h,h),(h,h,h,t),(h,h,t,h),(h,h,t,t),(h,t,h,h),(h,t,h,t),(h,t,t,h),(h,t,t,t),\\
&\quad (t,h,h,h),(t,h,h,t),(t,h,t,h),(t,h,t,t),(t,t,h,h),(t,t,h,t),(t,t,t,h),(t,t,t,t)\big\}\\
I\!P_{aux}[\omega] &= \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{16},\ \text{para cada } \omega\in\Omega
\end{aligned}$$

(Observe o uso da notação matemática aqui usada: por exemplo, (h,h,t,h) significa que a primeira, a segunda e a quarta moedas mostraram "cara", e a terceira mostrou "coroa"; essa leitura segue-se do acordo metemático que determina que o conteúdo delimitado pelas parênteces "(,)" entende-se como coleção ordenada de elementos; vale ainda lembrar que o conteúdo delimitado pelas chaves "{, }" entende-se como coleção não ordenada de elementos, e foi por isso que as chaves foram usadas numa das três codificações da espaço de estado correspondente ao lançamento simultâneo de quatro moedas idênticas.)

Vamos agora pedir ao observador do experimento aleatório original, quer dizer, do lançamento simultâneo de quatro moedas idênticas, que venha observar os resultados do experimento aleatório auxiliar, mas somente após o último lançamento, e que venha de óculos, atravez dos quais todas as moedas parecem cinzas, isso é, idênticas. Segue-se então das construções dos dois experimentnos, que o obervador, ao ver as quatro moedas idênticas paradas, não tem como dizer se essas adveiam do experimento original ou do auxiliar. Isso permite-nos aplicar o princípio de expansão-redução para deduzir que

$$\begin{aligned} I\!P\,[4caras0coroas] &= I\!P_{aux}\,[(h,h,h,h)] = \tfrac{1}{16}, \\ I\!P\,[3caras1coroa] &= I\!P_{aux}\,[\{(h,h,h,t),(h,h,t,h),(h,t,h,h),(t,h,h,h)\}] = \tfrac{4}{16} \end{aligned}$$

já que o observador vé $4caras0coroas$ se e somente se oexperimento aleatório auxiliar resulta em (h,h,h,h), e o observador vé $3caras1coroa$ se e somente se oexperimento aleatório auxiliar resulta no evento $\{(h,h,h,t),(h,h,t,h),(h,t,h,h),(t,h,h,h)\}$.

Para finalizar a solução, observa-se que, no experimento aleatório original, o evento "ver mais "caras" que "coroas"" consiste dos resultados $4caras0coroas$ e $3caras1coroa$, e, portanto, de acordo com os últimos cálculos que fizemos, a probabilidade do evento é $1/16+4/16=5/16$, o que é a resposta na pergunta do exercício.

Solução do Exc. 12. Como as méias distingem-se entre si pelo número e pela cor, então o experimento aleatório "retirada sequencial de duas méias" corresponde ao diagrama de árvore da Figura 1.17. Segundo o diagrama, o modelo probabilístico adquire a seguinte forma:

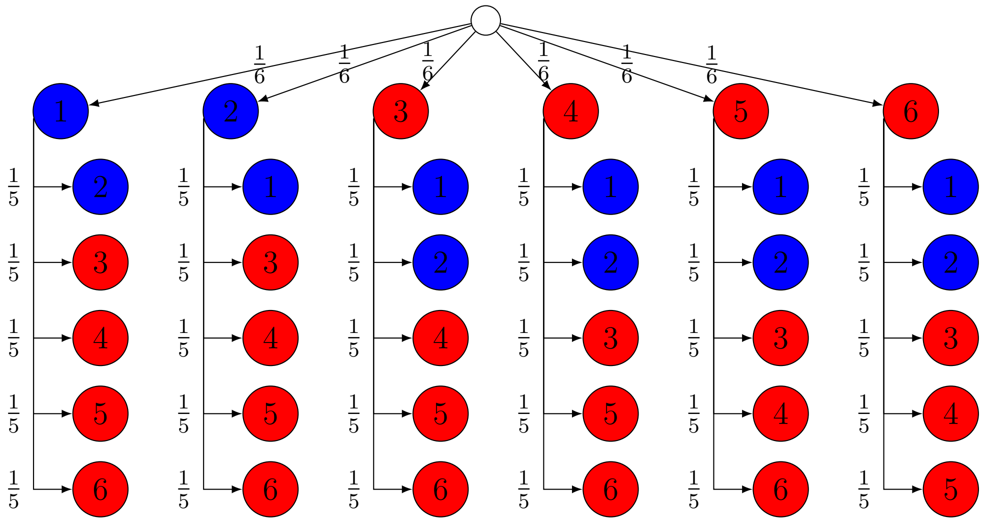


Figura 1.17: O diagrama de árvore para o experimento aleatório descrito no Exc. 12, no qual um par de meias é retirado de uma gaveta.

$$\Omega = \{(1a,2a),(1a,3v),\dots,(6v,5v)\}\,,\ I\!P[\omega] = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{30} \text{ para cada } \omega\in\Omega$$

O evento, cuja probabilidade nos interessa, compões-se de 16 resultados (são os nos quais uma da sletras é "a" e outra é "v", sem importância à ordem). Portanto, a resposta final é $16/30 = 8/15$.

Observe que toda a solução poderia ter se desenvolvendo pelo caminho diferente daquilo apresentado acima, se desde o início, as méias não fossem enumeradas. Isso sugere que a enumeração é disnecessária. E ela realmente é disnecessária. Entretanto, o resultado final não se alterou por causa dela. E é exatamente isso que quiz lhe mostrar no exemplo do presente exercício: se na etapa de elaboração do espaço amostral introduz-se às observações um atributo extra, irrelevante para a dedução da resposta final, então essa resposta não será afetada.

Solução do do Exc. 13. O diagrama de árvore para o experimento aleatóriodeste exercício está desenhado na Figura 1.18, veja que em cinza estão os nodos nos quais terminam os caminhos da árvore que correspondem aos resultados nos quais dentro das três pessoas escolhidas haja

Solução feita em 30/03/19 por mo- nitor. Requer exatamente uma mulher e dois homens, sendo que os homens não são irmãos. De acordo com a figura, a probabilidade requerida é

$$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{360}{720}=\frac{1}{2}.$$

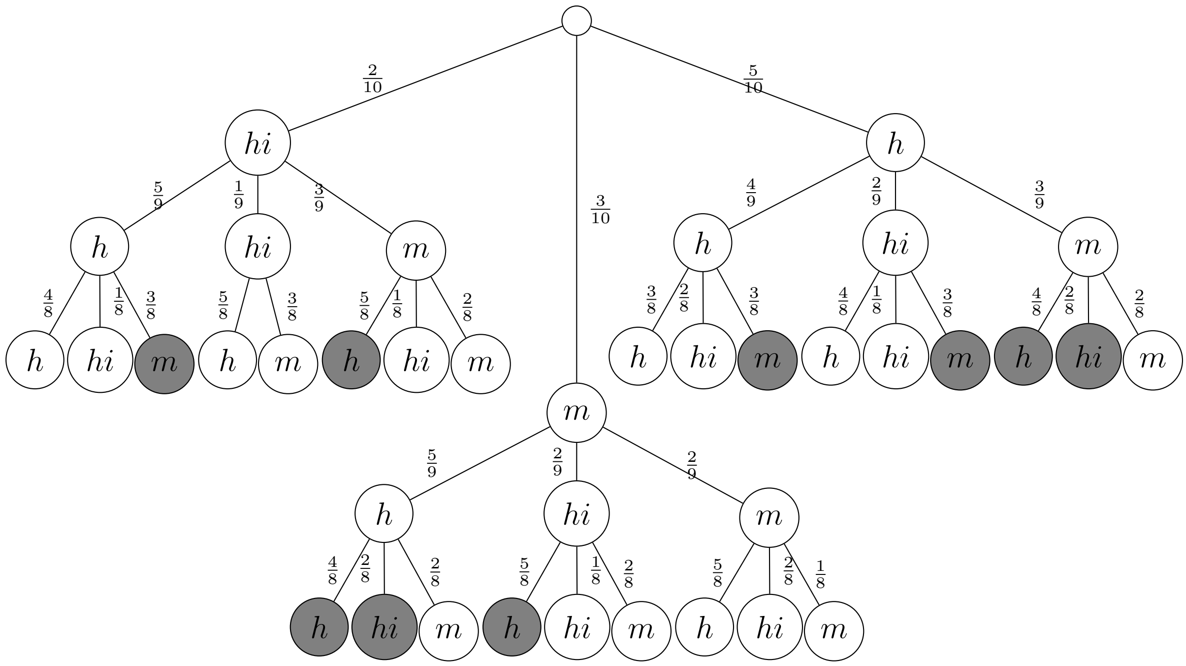


Figura 1.18: O diagrama de árvore para o experimento aleatório descrito no Exc. 13. Nos nodos do diagrama hi representa os professores que são irmãos, h os demais professores e m as professoras. Destacado em cinza estão os nodos nos quais acabam os caminhos da árvore que correspondem aos resultados de interesse.