EDO Continuação

Na aula passada, discutimos o oscilador harmônico

$$y'' = -y$$

Vimos duas maneiras de encontrar as soluções:

① Adivinhando que seno e cosseno satisfazem a equação e observando que, para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}$

$$y(t) = A\cos t + B\,\text{sen}\,t$$

é solução e é, embora não o tenhamos provado, a solução geral.

Para o Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

a solução é

$$y(t) = y_0 \cos t + v_0 \operatorname{sen} t .$$

② Série de Taylor: Começando do P.V.I.

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

obtemos, da equação $y'' = -y$, que as derivadas de y são

$$y, \quad y', \quad y'' = -y, \quad y''' = -y', \quad y^{(4)} = y, \quad y^{(5)} = y', \quad y^{(6)} = -y, \quad y^{(7)} = -y', \ldots$$

e, usando os valores iniciais, podemos escrever uma série de potências

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{y_0}{2!}t^2 - \frac{v_0}{3!}t^3 + \frac{y_0}{4!}t^4 + \frac{v_0}{5!}t^5 - \frac{y_0}{6!}t^6 - \frac{v_0}{7!}t^7 + - \cdots$$

$$y(t) = y_0 \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + - \cdots\right)} + v_0 \underbrace{\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + - \cdots\right)}.$$

$$= y_0 \cdot c(t) + v_0 \cdot s(t)$$

Vimos que as "funções" (as aspas são para lembrar que ainda não provamos que essas séries fazem sentido) têm propriedades como

- $c'(t) = -s(t)$ e $s'(t) = c(t)$

- $c^2(t) + s^2(t) = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}$

E provar que c e s são funções periódicas de período 2π, como fazer?

TROCANDO UMA EQUAÇÃO DE 2ª ORDEM POR DUAS DE 1ª

$$my'' = f(y) \iff \begin{cases} y' = z \\ mz' = f(y) \end{cases} \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{1}{m} f(y) \end{cases}$$

$$\iff Y' = F(Y) \quad \text{onde} \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{m} f(y) \end{bmatrix}.$$

Nos casos que vimos:

OH: $y'' = -y \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}$, isto é, $F\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$

Pêndulo Simples: $y'' = -\operatorname{sen} y \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = -\operatorname{sen} y \end{cases}$, isto é, $F\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -\operatorname{sen} y \end{bmatrix}$

EDO LINEARES 2×2

OH. $y'' = -y \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases} \iff \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$

$\iff Y' = A \cdot Y$, onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, é qualquer matriz 2×2, podemos estudar a EDO, chamada LINEAR,

$$Y' = A \cdot Y \iff \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y' = ay + bz \\ z' = cy + dz \end{cases}$$

Podemos diferenciar em paz:

$$(A \cdot Y)' = A \cdot Y' \iff \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} ay + bz \\ cy + dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ay' + bz' \\ cy' + dz' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Portanto

$$Y' = A \cdot Y \Rightarrow Y'' = A \cdot Y' = A^2 \cdot Y \Rightarrow Y''' = A^3 Y \Rightarrow \cdots$$

$$\Rightarrow Y^{(n)} = A^n \cdot Y$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

Se nos são dados valores iniciais

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases} \iff Y(0) = Y_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

então

$$Y(0) = Y_0 \qquad Y'(0) = A \cdot Y(0) = A \cdot Y_0 \qquad Y''(0) = A^2 \cdot Y(0) = A^2 \cdot Y_0$$

$$\ldots \quad Y^{(n)}(0) = A^n \cdot Y_0 \quad \ldots$$

e podemos então, tomando a mesma atitude corajosa com que escrevemos as séries de Taylor anteriores, escrever uma para esse caso também:

$$Y(t) = Y(0) + t \cdot Y'(0) + \frac{t^2}{2!} Y''(0) + \frac{t^3}{3!} Y'''(0) + \dots$$

$$Y(t) = Y_0 + t\, A \cdot Y_0 + \frac{t^2}{2!} A^2 \cdot Y_0 + \frac{t^3}{3!} A^3 \cdot Y_0 + \frac{t^4}{4!} A^4 \cdot Y + \dots$$

$$= \underbrace{\left(I + t \cdot A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots \right)}_{\overset{\text{def}}{=}\; e^{tA}} \cdot Y_0$$

Isto é, $\boxed{Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0}$ e esperamos que essa $Y(t)$ seja a solução da EDO linear $Y' = A \cdot Y$.

O.H. (de novo): vejamos se estamos no caminho certo refazendo o oscilador harmônico deste novo ponto de vista.

$$y'' = -y \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases} \iff \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\iff Y' = A \cdot Y \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esperamos então que $Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0$ seja a solução para o P.V.I.

$$\begin{cases} Y' = A \cdot Y \\ Y(0) = Y_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

onde

$$e^{A} = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{4!} A^4 + \cdots$$

(para calcular e^{tA} é só troca A por tA (A^2 por t^2A^2, ...))

Calculamos então as potencias $A, A^2, A^3, A^4, \dots$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^5 = A \qquad A^6 = A^2 = -I \qquad A^7 = A^3 = -A \qquad A^8 = I \quad \dots$$

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \dots$$

$$= I + tA - \frac{t^2}{2!}I - \frac{t^3}{2!}A + \frac{t^4}{4!}I + \frac{t^5}{5!}A - \frac{t^6}{6!}I - \frac{t^7}{7!}A +- \dots$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} +- \dots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} +- \dots\right) A$$

$$= c(t)\, I + s(t)\, A = \begin{bmatrix} c(t) & \\ & c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & s(t) \\ -s(t) & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(t) & s(t) \\ -s(t) & c(t) \end{bmatrix}$$

Isto é,

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} c(t) & s(t) \\ -s(t) & c(t) \end{bmatrix}$$

e

$$Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0 = \begin{bmatrix} c(t) & s(t) \\ -s(t) & c(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 c(t) + z_0 s(t) \\ -y_0 s(t) + z_0 c(t) \end{bmatrix}$$

isto é

$$\begin{cases} y(t) = y_0 c(t) + z_0 s(t) \\ z(t) = y'(t) = -y_0 s(t) + z_0 c(t) \end{cases},$$

que é exatamente o que tínhamos antes.

Equações lineares homogêneas de ordem 2

A equação $y'' = -y$ é equivalente a $y'' + y = 0$. Mais geralmente, podemos considerar a equação

$$c y'' + b y' + a y = 0$$

Se $c = 0$, estamos de volta a uma equação de ordem 1, que já sabemos resolver. Se $c \neq 0$, dividindo por c, obtemos

$$y'' + a y' + b y = 0 \iff y'' = -by - ay'$$

$$\iff \begin{cases} y' = z \\ z' = -by - az \end{cases} \iff \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \quad Y' = A \cdot Y \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

A solução é, como sempre,

$$Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0$$

onde Y_0 é a condição inicial. A questão é como calcular e^{tA} nesse caso geral. Para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, podemos fazê-lo graças à periodicidade

$$A, \quad A^2 = -I, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = I.$$

Tentem calcular algumas potências $A^2, A^3, \dots$, para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$,

Potências e a exponencial de uma matriz 2×2

Para $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, calcular as potências A^n diretamente é não apenas computacionalmente trabalhoso, mas também pouco instrutivo. Vejamos como fazê-lo de forma mais eficiente e instrutiva.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & \\ & \mu^n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{bmatrix}} = I + \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \\ & \mu^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} \lambda^3 & \\ & \mu^3 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots & \\ & 1+\mu+\frac{\mu^2}{2!}+\frac{\mu^3}{3!}+\cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^\lambda & \\ & e^\mu \end{bmatrix}$$

Suponha que S é uma matriz inversível tal que

$$A = S \Lambda S^{-1} \qquad \text{onde} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{bmatrix} \text{ é diagonal}$$

Então

$$A^2 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^2 S^{-1}$$

e, em geral,

$$A^n = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) \cdots (S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^n S^{-1}$$

$$= S \begin{bmatrix} \lambda^n & \\ & \mu^n \end{bmatrix} S^{-1}$$

Nesse caso,

$$e^A = I + S\Lambda S^{-1} + \frac{1}{2!} S\Lambda^2 S^{-1} + \frac{1}{3!} S\Lambda^3 S^{-1} + \cdots$$

$$= S \cdot \left(I + \Lambda + \frac{1}{2!}\Lambda^2 + \frac{1}{3!}\Lambda^3 + \cdots \right) \cdot S^{-1}$$

$$= S e^\Lambda S^{-1}$$

Isto é, se conseguimos, por algum milagre, encontrar uma matriz S inversível tal que

$$A = S\Lambda S^{-1} \quad \text{onde } \Lambda \text{ é diagonal}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{bmatrix}$$

então

$$e^A = S e^\Lambda S^{-1} \quad \text{e } e^\Lambda \text{ é diagonal}, \quad e^\Lambda = \begin{bmatrix} e^\lambda & \\ & e^\mu \end{bmatrix}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tomando $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e calculando

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

$A \cdot S = S \cdot \Lambda$ onde $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$

$$S^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Obs: Inversa de uma matriz 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Portanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

e

$$e^{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & \\ & 1/e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Exemplo continuado: $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot Y \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$

$$Y(t) = e^{tA} Y_0 = e^{t(S\Lambda S^{-1})} \cdot Y_0 = S e^{t\Lambda} S^{-1} \cdot Y_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & \\ & e^{-t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}}$$

$\rightsquigarrow$ isto é $\begin{cases} c_0 = (y_0 + z_0)/2 \\ d_0 = (y_0 - z_0)/2 \end{cases}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & \\ & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = c_0 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d_0 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_0 e^{t} + d_0 e^{-t} \\ c_0 e^{t} - d_0 e^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = c_0 e^{t} + d_0 e^{-t} \\ z(t) = c_0 e^{t} - d_0 e^{-t} \end{cases}$$

VERIFIQUE QUE ESSA É MESMO A SOLUÇÃO DO P.V.I. $\begin{cases} Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot Y \\ Y(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \end{cases}$

De volta à Álgebra Linear

As perguntas então são: (i) quando existe uma matriz inversível S e uma matriz diagonal Λ tais que $A = S\Lambda S^{-1}$? e (ii) como encontrá-las?

Vejamos a equação para as matrizes $S = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$ e $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot S = S \cdot \Lambda \iff$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{e} \quad Av_2 = \lambda_2 v_2$$

Isto é, precisamos resolver a equação

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

onde tanto λ quanto $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ são incógnitas. Isso é um sistema linear 2×2

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\iff (A - \lambda I)v = 0$$

Note que $v = 0$ é sempre solução, mas é a solução que NÃO NOS INTERESSA, já que, se colocamos uma coluna de 0's em uma matriz, ela não pode ser inversível.

Façamos um pequeno desvio para lembrar quando um sistema linear 2x2 homogêneo (isto é, cujo lado direito é 0) tem soluções não nulas.

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \gamma x + \delta y = 0 \end{cases}$$

$x = y = 0$ sempre é solução, mas queremos saber quando há outras.

Suponha $\alpha \neq 0$, por exemplo.
Nesse caso, podemos isolar

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} y$$

e, substituindo na segunda equação, obtemos

$$-\frac{\gamma\beta}{\alpha} y + \delta y = 0 \iff \left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha}\right) \cdot y = 0$$

Essa última equação terá solução $y \neq 0 \iff \alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

Teorema: O sistema

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \gamma x + \delta y = 0 \end{cases}$$

tem solução diferente de

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se e somente se

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

O número $\alpha\delta - \beta\gamma$ é o DETERMINANTE do sistema acima.

Prova: Fizemos o caso $\alpha \neq 0$. Verifique as outras possibilidades. ■

Voltando ao sistema que queremos resolver

$$(A - \lambda I) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} (a-\lambda)\, x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda) y = 0 \end{cases}$$

Segue do teorema anterior que, para ser possível encontrar solução não-nula, é necessário que

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$\iff$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, batizamos os números

$$\operatorname{tr} A = a+d \longleftarrow \text{o TRAÇO de } A$$

$$\det A = ad - bc \longleftarrow \text{o DETERMINANTE de } A$$

Batizamos ainda o POLINÔMIO CARACTERÍSTICO de A

$$\boxed{p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A}.$$

As raízes de $p_A(\lambda) = 0$

$$\boxed{\lambda_{\pm} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}}$$

são os AUTOVALORES de A.

Vejamos exemplos...

Ex 1 Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Seu polinômio característico é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A \\ &= \lambda^2 - 0.\lambda - 1 \\ &= \lambda^2 - 1. \end{aligned}$$

Os autovalores de A são, portanto $\boxed{\lambda_\pm = \pm 1}$

Números complexos que discutiremos em breve

Ex 2: $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_B(\lambda) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_\pm = \pm\sqrt{-1} = \pm i}$

Ex 3: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_C(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$. Neste caso $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = 0$ e portanto há apenas uma raiz para $p_C(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = 0$: $\boxed{\lambda = 1}$.

Voltemos à teoria. Queremos encontrar soluções para

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0$$

mas precisamos de soluções $v \neq 0$, já que queremos colocar v nas colunas de uma matriz S inversível tal que

$$A \cdot S = S \cdot \Lambda \ , \text{ onde } \quad S = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix},$$

para podermos escrever

$$A = S \Lambda S^{-1}.$$

Vimos ainda que o sistema $(A - \lambda I)v = 0$ tem soluções $v \neq 0$

se e somente se $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. As raízes dessa equação são os AUTOVALORES de A.

Seja $\bar{\lambda}$ um autovalor de A e suponha que resolvemos o sistema

$$\begin{cases} (a-\bar{\lambda})x + by = 0 \\ cx + (d-\bar{\lambda})y = 0 \end{cases}$$

encontrando uma solução

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{v}$ é chamado um AUTOVETOR de A associado ao autovalor $\bar{\lambda}$.

Ex. 1 novamente: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e vimos que os autovalores são $\lambda_\pm = \pm 1$

Para encontrar autovetores associados resolvemos $(A - \lambda I)v = 0$ para $\lambda = \lambda_+$ e $\lambda = \lambda_-$.

$\boxed{\lambda_+ = 1}$ $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Note que as duas equações são equivalentes: uma é o negativo da outra.
Podemos, portanto, ignorar a segunda, digamos e resolver apenas a primeira.

$$-x + y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Assim qualquer vetor da forma $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$, com $x \neq 0$, é autovetor de A associado ao autovalor 1. Tomamos $\boxed{v_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$\boxed{\lambda_- = -1}$ $\quad A-\lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-\lambda I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

Novamente podemos jogar uma equação fora e resolver a outra:

$$x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$$

e, portanto, qualquer vetor da forma $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$, $x \neq 0$, é autovetor associado ao autovalor $\lambda_- = -1$. Tomamos $v_- = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Fazendo

$$S = \begin{bmatrix} | & | \\ v_+ & v_- \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

obtemos uma matriz inversível (Por quê?) tal que $A \cdot S = S \cdot \Lambda$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{E os outros exemplos?}}$

Nesse momento, deveríamos analizar o que acontece nos exemplos 2 e 3 acima. Antes de fazê-lo, esclarecemos que exemplos como o Ex. 1, nos quais há dois autovalores distintos (lembre-se que estamos tratando o caso 2x2), são os mais simples por causa do seguinte teorema de Álgebra Linear:

$\boxed{\text{Teorema 1}}$: Se v_1 e v_2 são autovetores(*) da matriz A associados a autovalores distintos λ_1 e λ_2, respectivamente, então nenhum deles é um múltiplo do outro, isto é, não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $cv_1 = v_2$.

(*) Lembre-se de que autovetores são sempre $\neq 0$.

Desse teorema vamos concluir que a matriz $S = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$ é inversível, como veremos depois da prova.

<u>Prova</u>: Suponha que $Av_1 = \lambda_1 v_1$ e $Av_2 = \lambda_2 v_2$, $v_1, v_2 \neq 0$.

Então se $c \in \mathbb{R}$,

$$A(cv_1) = c(Av_1) = c(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 (cv_1)$$

Todo múltiplo não-nulo de um autovetor também é autovetor, associado ao mesmo autovalor.

Mas, se $v_2 = cv_1$, também teremos

$$A(cv_1) = Av_2 = \lambda_2 v_2$$

de forma que

$$\lambda_2 v_2 = \lambda_1 (cv_1)$$

e, lembrando que $v_2 = cv_1$, segue que

$$\lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_2 .$$

Como $v_2 \neq 0$, devemos ter $\lambda_1 = \lambda_2$ ∎

<u>Obs</u>: Note que não usamos que A é uma matriz 2×2: o teorema vale em qualquer dimensão.

$\boxed{\text{Teorema 2}}$: Seja S uma matriz 2×2. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) S é inversível.

(ii) $\det S \neq 0$.

(iii) Nenhuma coluna de S é um múltiplo da outra.

(iv) Nenhuma linha de S é um múltiplo da outra.

(v) O sistema linear

$$Sx = \beta$$

tem solução única $\forall \beta$.

<u>Prova</u>: Seja $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e defina $T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Faça as contas e verifique que

$$S\cdot T = T\cdot S = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det S & 0 \\ 0 & \det S \end{bmatrix} = (\det S)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$S.T = T.S = (\det S).I$$

Portanto, se $\det S \neq 0$, segue que $S.\left(\frac{1}{\det S}T\right) = \left(\frac{1}{\det S}T\right)S = I$, isto é, se $\det S \neq 0$

$$\boxed{S^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}.$$

Isso mostra que (ii) $\Rightarrow$ (i) (e ainda fornece a <u>fórmula explícita</u> para S^{-1})

Para mostrar que (i) $\Rightarrow$ (ii) prove o seguinte

<u>Lema</u>: $\det(S.T) = \det S . \det T$

<u>Prova</u>: Escreva

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

calcule $S \cdot T$ e calcule

$$\det(S.T)$$

Você vai ver que o resultado é $\det S \cdot \det T$. ■

Assim, se S é inversível, existe T tal que

$$S \cdot T = I \implies \det(S \cdot T) = \det I = 1.$$

Portanto, do lema segue que $(\det S) \cdot (\det T) = 1$ e portanto $\det S \neq 0$. Isso mostra que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Até aqui provamos que (i) e (ii) são equivalentes. Vejamos agora que (ii) e (iii) são equivalentes. Na verdade, provaremos o contrapositivo, isto é, provaremos que [não (ii)] e [não (iii)] são equivalentes, isto é, mostraremos que

$$\det S = 0 \iff \text{uma coluna de } S \text{ é um múltipla real da outra.}$$

Suponha que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$S = \begin{bmatrix} a & ra \\ c & rc \end{bmatrix} \Rightarrow \det S = rac - rac = 0$$

Por outro lado, se $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $ad - bc = 0 \iff ad = bc$.
Suponha que a e d são diferentes de 0. Então segue que

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

Chamando de r o número acima, segue que $b = ra$, $d = rc$.

Exercício: Termine a prova acima considerando o que acontece se $a = 0$ ou $c = 0$. Mostre também que (iv) é equivalente a todas as outras afirmações.

Chegamos agora ao item (v): o sistema linear $S\vec{x} = \vec{\beta}$.

A notação:

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longleftarrow$$ A matriz do sistema, dada.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$ O vetor incógnita que queremos descobrir

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \longleftarrow$$ O "lado direito", um vetor de duas coordenadas, dado.

$$S\cdot\vec{x} = \vec{\beta} \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = \beta_1 \\ cx_1 + dx_2 = \beta_2 \end{cases}$$

Primeiro vamos mostrar que $\det S \neq 0$ implica que $S\vec{x} = \vec{\beta}$ tem uma única solução para cada escolha do lado direito $\vec{\beta}$.

Se $ad - bc \neq 0$, pelo menos um de a ou c tem que ser diferente de 0. Podemos então assumir que $a \neq 0$. Se não, troque a ordem das equações e proceda analogamente.

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = \beta_1 \\ cx_1 + dx_2 = \beta_2 \end{cases}$$

Passo 1: Subtraia, da segunda equação, a primeira equação multiplicada por $\frac{c}{a}$. Mantenha a primeira equação como está.

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = \beta_1 \\ \left(d - \frac{bc}{a}\right) x_2 = \beta_2 - \frac{c\beta_1}{a} \end{cases}$$

Eliminamos, dessa forma, a variável x_1 da segunda equação e podemos, portanto, resolver a segunda equação:

$$\boxed{x_2 = \frac{a\beta_2 - c\beta_1}{ad - bc}}.$$

Substituindo agora na primeira equação, encontramos

$$\boxed{x_1 = \frac{d\beta_1 - b\beta_2}{ad - bc}}.$$

Note que, cada um dos passos que demos para chegar aos valores de x_1 e x_2 acima é reversível. Assim, podemos concluir que esses são os únicos valores de x_1 e x_2 que satisfazem as equações do sistema.

Mas massageemos um pouco os resultados que acabamos de obter:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{ad-bc}\,(d\beta_1 - b\beta_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{ad-bc}\,(-c\beta_1 + a\beta_2) \end{cases} \iff$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d\beta_1 - b\beta_2 \\ -c\beta_1 + a\beta_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}^{S^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Isto é, a solução de $S\vec{x} = \vec{\beta}$ é

$$\boxed{\vec{x} = S^{-1} \cdot \vec{\beta}}$$

Isso termina a prova de que (i) $\Longrightarrow$ (v).

Para provar (v) $\Rightarrow$ (i), usemos a hipótese de que $S\cdot\vec{x} = \vec{\beta}$ tem solução para toda escolha de β e tomemos $\vec{x}$ e $\vec{y}$ as soluções de

$$S.\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S.\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Isto é, resolva esses dois sistemas e encontre os dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Juntando os vetores coluna $\vec{x}$ e $\vec{y}$ numa matriz 2×2 temos:

$$S.\begin{bmatrix} | & | \\ \vec{x} & \vec{y} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ S\vec{x} & S\vec{y} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Isso mostra que $\begin{bmatrix} | & | \\ \vec{x} & \vec{y} \\ | & | \end{bmatrix}$ é a inversa de S e, como vimos, S é inversível $\Leftrightarrow$ $\det S \neq 0$. Isso termina a prova ∎

Juntemos agora os dois teoremas:

O Teorema 1 afirma que autovetores associados a autovalores diferentes não são múltiplos um do outro.

O Teorema 2 diz que se as colunas de uma matriz S 2×2 não são múltiplas uma da outra, então seu determinante é $\neq 0$ e a matriz é inversível.

Assim, concluímos que se o polinômio característico $p_A(\lambda)$ de A tem duas raízes distintas, isto é, se A tem dois autovalores distintos, então, pondo os autovetores associados nas colunas de uma matriz S, segue que S é inversível e podemos escrever

$$A\begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ Av_1 & Av_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\boxed{A \cdot S = S \cdot \Lambda}\ , \text{ onde } \boxed{S = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}}$$

e, como S é inversível,

$$\boxed{A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1}}$$

Disso segue que

$$\boxed{A^n = S \Lambda^n S^{-1}} \quad \text{e que} \quad \boxed{e^A = S \cdot e^\Lambda \cdot S^{-1} = S \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \\ & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} \cdot S^{-1}.}$$

<u>Exercícios</u>: Para as matrizes abaixo, verifique, um-a-um, os cinco itens do Teorema 2 acima (para se certificar, estatisticamente, de que ele é mesmo verdadeiro).

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Depois calcule, para cada uma delas, os autovalores e autovetores.