EDO LINEARES : CONTINUAÇÃO

Na aula passada, vimos, por adivinhação, que

Ex1

- $y' = y \iff y(t) = Ce^t$ EDO

- (*) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \iff y(t) = e^t$ PVI.

Vimos também que, do PVI, podemos produzir uma SÉRIE DE TAYLOR

$y(0) = 1$

$y'(0) = y(0) = 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow y^{(n)}(0) = 1$

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2!}t^2 + \frac{y'''(0)}{3!}t^3 + \cdots$$

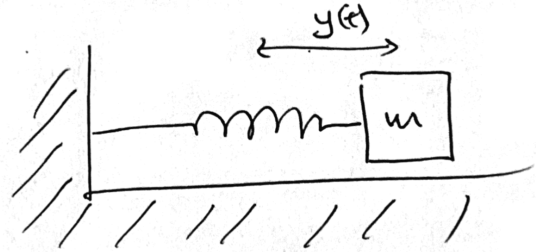
$$\boxed{y(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots}$$

Esta é uma solução para a PVI (*) que não usa conhecimento prévio da função exponencial e suas propriedades

A EDO mais importante do mundo é a 2ª Lei de Newton:

$$ma = F \iff my'' = F$$

Ex 2 Lei de Hooke - Sistema Massa-mola - Oscilador harmônico



$$my'' = -ky$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y'' = -\tfrac{k}{m}\, y} \qquad k, m > 0$$

Supondo, por simplicidade (ou mudando unidades de medida), que $k/m = 1$, obtemos

$$\boxed{y'' = -y}$$

Cujas soluções, por "adivinhação" novamente, são as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$.

Mais precisamente, se

$$y(t) = A\cos t + B \operatorname{sen} t \,, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

então

$$y'(t) = -A \operatorname{sen} t + B\cos t$$

$$y''(t) = -A\cos t - B \operatorname{sen} t = -y(t)$$

Como esperávamos nestes casos, há duas "constantes de integração". Para encontrá-las, não basta apenas sabermos a "posição inicial" $y(0) = y_0$ da massa: precisamos saber também sua "velocidade inicial" $y'(0) = v_0$.

$y(0) = y_0 \iff A\cos 0 + B \sin 0 = y_0 \iff \boxed{A = y_0}$

$y'(0) = v_0 \iff -A \sin 0 + B \cos 0 = v_0 \iff \boxed{B = v_0}$

Assim, a soluçã do P.V.I.

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases} \quad \text{é} \quad \boxed{y(t) = y_0 \cos t + v_0 \operatorname{sen} t}$$

Vejamos se é possível fazer o mesmo que fizemos com essa equaçã

$y(0) = y_0$

$y'(0) = v_0$

$y''(0) = -y(0) = -y_0$

$y''' = (y'')' = (-y)' = -y' \Rightarrow y'''(0) = -y'(0) = -v_0$

$y^{(iv)} = (y''')' = -(y')' = -y'' = y \Rightarrow y^{(iv)}(0) = y(0) = y_0$

Em geral, temos, em termos de y e y': $y = \underline{y}$ $y' = \underline{y'}$

$y'' = -\underline{y}$, $y''' = -\underline{y'}$, $y^{(4)} = \underline{y}$, $y^{(5)} = \underline{y'}$, $y^{(6)} = -\underline{y}$, $y^{(7)} = -\underline{y'}$

Portanto, avaliando em 0, temos:

$y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$, $y''(0) = -y_0$, $y'''(0) = -v_0$, y_0, v_0, $-y_0$, $-v_0$, ...

Podemos então escrever a série

$$y(t) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2!}t^2 + \frac{y'''(0)}{3!}t^3 + \cdots$$

$$= y_0 + v_0 t - \frac{y_0}{2}t^2 - \frac{v_0}{3!}t^3 + \frac{y_0 t^4}{4!} + \frac{v_0 t^5}{5!} - \frac{y_0 t^6}{6!} - \frac{v_0 t^7}{7!} + \cdots$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= y_0\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + - \cdots\right) \\ &+ v_0\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + - \cdots\right) \end{aligned}}$$

Aqui, mais uma vez, nós poderíamos ter DEFINIDO (CHAMADO) a primeira série de $c(t)$ e a segunda de $s(t)$ e derivado propriedades das funções $c(t)$ e $s(t)$.

Por exemplo, tomando $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$; $\begin{matrix} v_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{matrix}$, temos que $c(t), s(t)$ são soluções das equações

$$c(t): \begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad s(t): \begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

~~Isto quer dizer que~~ Derivar as várias propriedades de $c(t), s(t)$ a partir destas equações e das séries acima é um exercício muito interessante.

$$c(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + - \cdots$$

$$s(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + - \cdots$$

Por exemplo, se podemos diferenciar a série termo-a-termo, obtemos

$$c'(t) = -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + - \cdots = -s(t)$$

$$s'(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - + \cdots = c(t)$$

E $c^2(t) + s^2(t) = 1$?

$$\frac{t^4}{4\cdot 3} + \frac{3t^4}{4\cdot 3} = \frac{t^4}{3}$$

$$c^2(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - + \cdots\right)\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - + \cdots\right) =$$

$$= 1 - t^2 + \left(2\frac{t^4}{4!} + \frac{t^4}{2!\,2!}\right) + \cdots$$

$$\cancel{2\left(\frac{t^4}{4\cdot 3\cdot 2} + \frac{t^4}{2}\right)}$$

$$s^2(t) = \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right)\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= t^2 - 2\frac{t^4}{3!} + \cancel{2\left(\frac{t^6}{5!} + \frac{t^6}{3!}\right)} + \cdots$$

6

Outra forma de olhar para equações de 2ª ordem:

$$y'' = -y \qquad \text{(Oscilador harmônico)}$$

$$y'' = -\operatorname{sen} y \qquad \text{(Pêndulo simples)}$$

Em geral, se estamos lidando com a 2ª lei de Newton e ~~se a força depende apenas da~~ se a força depende apenas da posição e da velocidade da partícula (e não do instante de tempo)

$$\boxed{y'' = F(y, y')}$$

Podemos introduzir uma nova ~~var~~ incógnita

$$z(t) = y'(t) \Rightarrow z'(t) = y''(t) = F(y, y') = F(y, z)$$

Obtemos então um <u>SISTEMA DE DUAS EDO de ordem 1</u>

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = F(y, z) \end{cases} \iff \boxed{Y'(t) = \Phi(Y(t))}$$

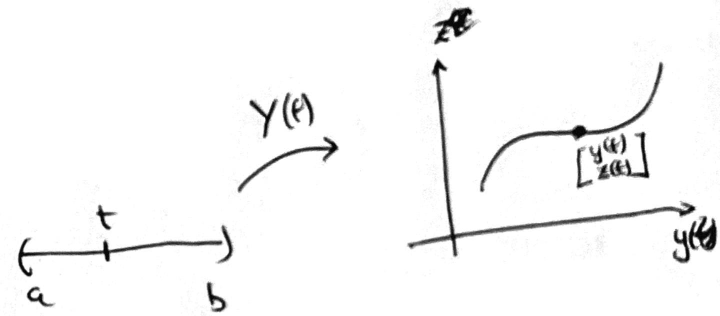
$$Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \qquad Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \qquad \Phi(Y) = \begin{bmatrix} z \\ F(y, z) \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$

Aqui vale a pena fazermos uma pausa para explicar melhor as funções $Y(t)$ e $\Phi(Y)$.

$Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ tem duas coordenadas e, se ambas são funções da variável t, sabemos

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$



Supondo $y, z : (a,b) \to \mathbb{R} \Rightarrow$

$$Y : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

isto é, Y é uma função da variável real t e toma valores em $\mathbb{R}^2$.

Já a função Φ é uma função que depende de Y, que é uma "variável" em $\mathbb{R}^2$ e também toma valores em $\mathbb{R}^2$

$$\Phi(Y) = \Phi(y,z) = (z, F(y,z))$$

Isso porquê estávamos assumindo que a equação $y'' = F(y,y')$ é uma equação escalar, isto é,

$$F(y,y') = \text{número real e}$$

$$y'' = F(y,y') \Leftrightarrow \underbrace{y'(t) = F(y(t), y'(t))}_{\text{equação numérica}}$$

OH $\quad y'' = -y \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases} \qquad \Phi\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -y \end{pmatrix}$

PS $\quad y'' = -\operatorname{sen} y \iff \begin{cases} y' = z \\ z' = -\operatorname{sen} y \end{cases} \qquad \Phi\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -\operatorname{sen} y \end{pmatrix}$

O primeiro desses sistemas é particularmente interessante pois podemos escrevê-lo

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

$$Y' = A \cdot Y \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

E, vendo a equação acima, é tentador notar a semelhança com

$$y' = a . y .$$

Será isso apenas coincidência?