Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
Universidade de São Paulo

Cálculo I - Lista 4: Derivadas II - Extremos

Prof. Responsável: Andrés Vercik

1. (i) Estabeleça fórmulas gerais para Δy e dy. (ii) Se para os valores dados de a e Δx, x varia de a para $a+\Delta x$, ache os valores de Δy e dy.

   a) $y = 2x^2 - 4x + 5$, $a = 2$, $\Delta x = -0.2$

   b) $y = 1/x^2$, $a = 3$, $\Delta x = 0.3$

2. Determine (i) Δy, (ii) dy e (iii) $dy - \Delta y$.

   a) $y = 4 - 9x$

   b) $y = 3x^2 + 5x - 2$

   c) $y = 1/x$

   d) $y = 1/x^2$

3. Ache uma aproximação linear para $f(b)$ se a variável independente varia de a para b.

   a) $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5$; $a = 1$, $b = 1.03$

   b) $f(\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta$; $a = 30^\circ$, $b = 27^\circ$

4. Aproxime, por meio de diferenciais, o erro absoluto, Δy, e o erro relativo percentual, ε_y, no valor calculado de y.

   a) $y = 3x^4$; $x = 2$, $\Delta x = \pm 0.01$

   b) $y = x^3 + 5x$; $x = 1$, $\Delta x = \pm 0.1$

   c) $y = 4\sqrt{x} + 3x$; $x = 4$, $\Delta x = \pm 0.2$

5. Use a regra da cadeia para achar $\dfrac{dy}{dx}$ e expresse a resposta e, termos de x.

   a) $y = u^2$; $u = x^3 - 4$

   b) $y = \sqrt[3]{u}$; $u = x^2 + 5x$

   c) $y = 1/u$; $u = \sqrt{3x-2}$

   d) $y = 3u^2 + 2u$; $u = 4x$

   e) $y = \mathrm{tg}\,u$; $u = x^2$

   f) $y = u\,\mathrm{sen}\,u$; $u = x^3$

   g) $y = \ln u$; $u = x^4 + 1$

   h) $y = e^u$; $u = -x^2$

6. Calcule a derivada

a) $f(x)=(x^2-3x+8)^3$

b) $f(x)=(8x-7)^{-5}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^4}$

d) $N(x)=(6x-7)^3(8x^2+9)^2$

e) $F(v)=\dfrac{5}{\sqrt[5]{v^5-32}}$

f) $g(w)=\dfrac{w^2-4w+3}{w^{3/2}}$

g) $k(x)=\operatorname{sen}(x^2+2)$

h) $H(\theta)=\cos^5 3\theta$

i) $g(z)=\sec(2z+1)^2$

j) $H(s)=\cot(s^3-2s)$

k) $K(z)=z^2\cot 5z$

l) $h(\theta)=\operatorname{tg}^2\theta\sec^3\theta$

m) $N(x)=(\operatorname{sen}5x-\cos 5x)^5$

n) $h(w)=\dfrac{\cos 4w}{1-\operatorname{sen}4w}$

o) $f(x)=\operatorname{sen}\sqrt{x}+\sqrt{\operatorname{sen}x}$

p) $g(x)=\sqrt{x^2+1}\,\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1}$

q) $y(x)=e^{-\sqrt{x}}$

r) $y(x)=xe^{-x^2}$

s) $y(x)=x\ln(2x+1)$

t) $y(x)=(e^x+1)^{-2}$

u) $y(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+e^x+1}$

v) $y(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

w) $y(x)=\ln(x^2+3x+5)$

x) $y(x)=e^{x/(x+1)}$

y) $y(x)=\ln(1+\sqrt{x})$

z) $y(x)=[\ln(3x+1)]^2$

7. Calcule a primeira e a segunda derivadas.

a) $g(z)=\sqrt{3z+1}$

b) $k(s)=(s^2+4)^{2/3}$

c) $k(r)=(4r+7)^5$

d) $f(x)=\sqrt[5]{10x+7}$

e) $f(x)=\operatorname{sen}^3 x$

f) $G(t)=\sec^2 4t$

8. Admitindo que a equação determina uma função diferenciável *f* tal que $y=f(x)$, calcule *y'*.

a) $8x^2+y^2=10$

b) $4x^3-2y^3=x$

c) $2x^3+x^2y+y^3=1$

d) $x^4+4x^2y^2-3xy^3+2x=0$

e) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=100$

f) $x^{2/3}+y^{2/3}=4$

g) $x^2+\sqrt{xy}=7$

h) $2x-\sqrt{xy}+y^3=16$

i) $\operatorname{sen}^2 3y=x+y-1$

j) $x=\operatorname{sen}(xy)$

k) $y=\csc(xy)$

l) $y^2+1=x^2\sec y$

m) $y^2=x\cos y$

n) $xy=\operatorname{tg}y$

o) $x^2+\sqrt{\operatorname{sen}y}-y^2=1$

p) $\operatorname{sen}\sqrt{y}-3x=2$

9. Admitindo que a equação defina uma função *f* tal que $y = f(x)$, calcule y'', se existir.

a) $3x^2 + 4y^2 = 4$

b) $5x^2 - 2y^2 = 4$

c) $x^3 - y^3 = 1$

d) $x^2 y^3 = 1$

e) $\operatorname{sen} y + y = x$

f) $\cos y = x$

10. Determine dy/dx em termos de x e y por derivação implícita.

a) $x^2 + xy + y^2 = 4$

b) $x^3 y - xy^3 = 1$

c) $e^y - e^{-y} = 2x$

d) $y2 + ye^x + e^{2x} = 3$

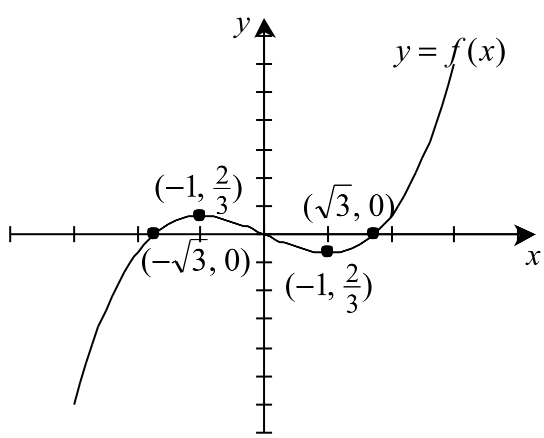
11. Use o gráfico para estimar os extremos de *f* em cada intervalo.

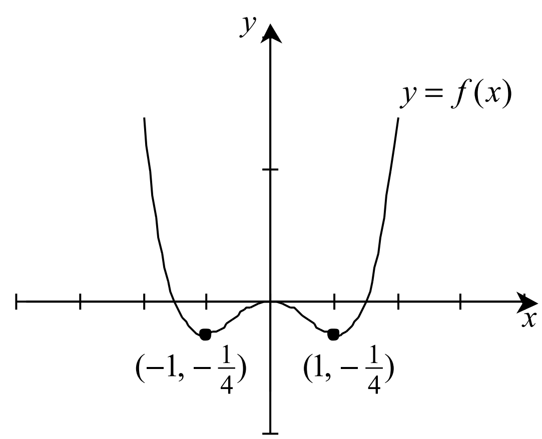
a) i) $[-3, 3)$ ii) $(-3, \sqrt{3})$

iii) $[-\sqrt{3}, 1)$ iv) $[0, 3]$

b) i) $[-2, 2]$ ii) $(0, 2)$

iii) $(-1, 1)$ iv) $[-2, -1)$





12. Esboce o gráfico de *f* e determine os extremos em cada intervalo.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ i) $[0, 5]$ ii) $(0, 2)$ iii) $(0, 4)$ iv) $[2, 5]$

b) $f(x) = (x-1)^{2/3} - 4$ i) $[0, 9]$ ii) $(1, 2]$ iii) $(-7, 2)$ iv) $[0, 1)$

13. Ache os extremos de *f* no intervalo dado.

a) $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3$; $[0, 9]$

b) $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$; $[-1, 3]$

c) $f(x) = 1 - x^{2/3}$; $[-1, 8]$

d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; $[0, 2]$

14. Ache os pontos críticos da função.

d) $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$

e) $F(w) = w^4 - 32w$

f) $f(z) = \sqrt{z^2 - 16}$

g) $h(x) = (2x-5)\sqrt{x^2 - 4}$

h) $g(t) = t^2 \sqrt[3]{2t-5}$

i) $G(x) = \dfrac{2x-3}{x^2 - 9}$

j) $f(s) = \dfrac{s^2}{5s+4}$

k) $f(t) = \operatorname{sen}^2 t - \cos t$

l) $f(x) = 8\cos^3 x - 3\operatorname{sen} 2x - 6x$

m) $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$

n) $k(u) = u - \operatorname{tg} u$

o) $H(\phi) = \cot\phi + \csc\phi$

15. a) Se $f(x) = x^{1/3}$, prove que 0 é o único ponto crítico de *f* e que *f*(0) não é um extremo local.
b) Se $f(x) = x^{2/3}$, prove que 0 é o único ponto crítico de *f* e que *f*(0) é um mínimo local.

16. Se $f(x) = |x|$, prove que 0 é o único ponto crítico de *f* e que *f*(0) é um mínimo local.

17. Encontre os pontos críticos da função dada e use a derivada para determinar em que regiões a função é crescente, decrescente e quais são os máximos e mínimos locais.

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$

b) $f(x) = 1 - 4x - x^2$

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 6$

d) $f(x) = (x^2 - 4)^7$

e) $f(x) = x - \ln x, \quad x > 0$

f) $f(x) = xe^x$

g) $f(x) = 2x^2 e^{5x} + 1$

h) $f(x) = xe^{-x}$

i) $f(x) = |x-1|$

j) $f(x) = e^x - 2x$

k) $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}, \quad x > 0$

18. Para a função $f(x) = x^3 + 1$: (a) Prove que *f* não tem extremos locais. (b) Esboce o gráfico de *f*. (c) Prove que *f* é contínua no ponto (0, 1), mas não tem máximo nem mínimo aí.

19. Determine se *f* satisfaz as hipóteses do teorema do valore médio em [a, b] e, em caso afirmativo, ache todos os números c em (a, b) tais que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

a) $f(x)=3x^2+x-4;$ $[1, 5]$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2};$ $[-2, 3]$

c) $f(x)=x+4/x;$ $[1, 4]$

d) $f(x)=(x+2)^{2/3};$ $[-1, 6]$

e) $f(x)=\operatorname{tg} x;$ $[0, \pi/4]$

20. Se $f(x)=5+3(x-1)^{2/3}$, mostre que $f(0)=f(2)$ mas $f'(c)\neq 0$ para todo número c no intervalo aberto (-1, 1). Por que isto não contradiz o teorema de Rolle?

21. Se $f(x)=4/x$, prove que não há nenhum número real c tal que $f(4)-f(-1)=f'(c)[4-(-1)]$. Por que isto não contradiz o teorema do valor médio aplicado ao intervalo [-1, 4]?

22. Uma estrada retilínea de 50Km liga duas cidades A e B. Prove que é impossível viajar de A para B de automóvel, em exatamente uma hora, sem que o velocímetro registre 50Km/h ao menos uma vez.

23. Determine os extremos locais de *f* e os intervalos em que *f* é crescente ou decrescente; esboce o gráfico de *f*.

a) $f(x)=2x^3+x^2-20x+1$

b) $f(x)=10x^3(x-1)^2$

c) $f(x)=x^{4/3}+4x^{1/3}$

d) $f(x)=x(x-5)^{1/3}$

e) $f(x)=x^{2/3}(8-x)$

f) $f(x)=x^2\sqrt[3]{x^2-4}$

24. Determine os extremos locais de f em [0, 2π] e os subintervalos em que *f* é crescente ou decrescente. Faça o gráfico de *f*.

a) $f(x)=\cos x+\operatorname{sen} x$

b) $f(x)=\frac{1}{2}x-\operatorname{sen} x$

c) $f(x)=x+2\cos x$

d) $f(x)=2\cos x+\operatorname{sen} 2x$

25. Ache os extremos locais de *f*.

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-9x}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

c) $f(x)=(x-2)^3(x+1)^4$

d) $f(x)=x^2(x-5)^4$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+7}}$

26. Esboce o gráfico de uma função diferenciável *f* que satisfaça as condições dadas.

a) $f(0)=3$, $f(-2)=f(2)=-4$; $f'(0)$ não-definida; $f'(-2)=f'(2)=0$; $f'(x)>0$ se $-2<x<0$ ou $x>2$; $f'(x)<0$ se $x<-2$ ou $0<x<2$.

b) $f(3)=5$, $f(5)=f0$; $f'(5)$ não-definida; $f'(3)=0$; $f'(x)>0$ se $x<3$ ou $x>5$; $f'(x)<0$ se $3<x<5$.

c) $f(0)=3$, $f(-2)=f(2)=-4$; $f'(-2)=f'(0)=f'(2)=0$; $f'(x)>0$ se $-2<x<0$ ou $x>2$; $f'(x)<0$ se $x<-2$ ou $0<x<2$.

d) $f(-5)=4$, $f(0)=0$, $f(5)=-4$; $f'(-5)=f'(0)=f'(5)=0$; $f'(x)>0$ se $|x|>5$; $f'(x)<0$ se $0<|x|<5$.

27. Para as funções do exercício 13, determine os extremos locais de *f* usando o teste da derivada segunda quando aplicável. Ache os intervalos em que o gráfico de *f* é côncavo para cima ou para baixo, e determine as coordenadas *x* dos pontos de inflexão. Faça o gráfico de *f*.

28. Use o teste da derivada segunda para achar os extremos locais de *f* no intervalo dado, usando o teste da derivada segunda.

29. Esboce o gráfico de uma função contínua *f* que verifique todas as condições indicadas.

a) $f(0)=1$, $f(2)=3$; $f'(0)=f'(2)=0$; $f'(x)<0$ se $|x-1|>1$; $f'(x)>0$ se $|x-1|<1$; $f''(x)>0$ se $x<1$; $f''(x)<0$ se $x>1$.

b) $f(0)=2$, $f(2)=f(-2)=1$; $f'(0)=0$; $f'(x)>0$ se $x<0$; $f'(x)<0$ se $x>0$; $f''(x)>0$ se $|x|>2$; $f''(x)<0$ se $|x|<2$.

c) $f(-2)=f(6)=-2$, $f(0)=f(4)=0$; $f(2)=f(8)=3$; f' não definida em 2 e 6; $f'(0)=1$; $f'(x)>0$ em todo $(-\infty,2)$ e $(6,\infty)$; $f'(x)<0$ se $|x-4|<2$; $f''(x)<0$ em todo $(-\infty,0)$, $(2,6)$ e $(6,\infty)$; $f''(x)>0$ em todo $(0,2)$ e $(2,4)$.

30. Analise e faça o gráfico de *f*.

a) $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+3}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1}$

c) $f(x)=\dfrac{3x^2-6x}{x^2-x-12}$

d) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

e) $f(x)=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$

f) $f(x)=\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2+4}}$

g) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x+1}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ i) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x+3}$

31. Determine os pontos críticos da função e use o teste da derivada segunda para verificar se são máximos ou mínimos locais. Determine também o valor da função em cada extremo local.

a) e^{-x^2+2x}

b) $f(x)=\ln(x^2+1)$

c) $f(x)=x^2e^{-x}$

d) $f(x)=e^x-2x$