Aula Teórica 7

Bom Dia

Sistemas de Equações Lineares

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um sistema de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Homogênio: $b_i = 0 \ \forall i$

Não Homogênio: $b_i \neq 0$ para algum i

Onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ e $x_1, \ldots, x_n$ são as incógnitas (que também são números reais)

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 = 1 \\ \sqrt{7}\, x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ e^{\pi} x_1 \qquad -\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right) x_4 = -1 \end{cases}$$

3 equações e 4 incógnitas

OBS: Note que $a_{12} = 0$ nesse sistema (e tbm $a_{21} = a_{24} = a_{32} = a_{33} = 0$)

NÃO EXEMPLO

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \operatorname{sen} x_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

(NÃO É LINEAR)

DADO UM SISTEMA

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O objetivo é:

① Saber se o sistema admite

<u>soluções</u>

<u>soluções</u>: $S = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid$ "ao substituir $x_1, \dots, x_n$ no sistema (*) todas as equações são satisfeitas" $\}$

② "Entender" o conjunto S das soluções

<u>Possibilidades</u>:

① Sistema Impossível (SI)

NÃO ADMITE SOLUÇÕES

② Sistema Possível Determinado (SPD)

ADMITE UMA ÚNICA SOLUÇÃO

③ Sistema Possível Indeterminado (SPI)

ADMITE INFINITAS SOLUÇÕES

OPERAÇÕES COM SISTEMAS

(NÃO MUDAM AS SOLUÇÕES DO SISTEMA)

① Trocar a Linha i com a Linha j

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \underset{L_i \leftrightarrow L_j}{\overset{L_i \leftrightarrow L_j}{\rightleftarrows}} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

② Multiplicar uma linha inteira por $\lambda \neq 0$

$$L_i \longrightarrow \lambda L_i \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ \underline{\lambda \neq 0})$$

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \underset{L_i \to \lambda L_i}{\overset{L_i \to \frac{1}{\lambda} L_i}{\rightleftarrows}} \quad (**) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Vamos mostrar que se $(x_1, \dots, x_n)$ é solução de (*) então tbm é solução de (**)

A única equação diferente nos dois sistemas é a equação i

Basta verificar que se

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{então} \quad \lambda a_{i1}x_1 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i$$

Mas

$$\lambda a_{i1}x_1 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = \lambda(b_i) = \lambda b_i \checkmark$$

(3) Trocar a linha i pela soma da linha i com um múltiplo da linha j

$$L_i \longrightarrow L_i + \mu L_j \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad \underset{L_i \to L_i - \mu L_j}{\overset{L_i \to L_i + \mu L_j}{\rightleftarrows}} \quad (**) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ (a_{i1} + \mu a_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + \mu a_{jn})x_n = b_i + \mu b_j \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Vamos mostrar que se $(x_1, \dots, x_n)$ é solução de $(*)$ então é solução de $(**)$

Novamente, basta verificar que a i-ésima equação de $(**)$ é satisfeita por uma solução $(x_1, \dots, x_n)$ de $(*)$

Mas,

$$(a_{i1} + \mu a_{j1}) x_1 + \dots + (a_{in} + \mu a_{jn}) x_n =$$

$$= a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n + \mu a_{j1} x_1 + \dots + \mu a_{jn} x_n$$

$$= (a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n) + \mu (a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n)$$

$$= b_i + \mu b_j \quad \checkmark \qquad \blacksquare$$

Ideia: Usar as operações para deixar o sistema da forma mais simples possível!

ANTES DISSO VAMOS FALAR SOBRE A MATRIZ DE UM SISTEMA DE EQ. LINEARES

Dado um sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

chamos a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

de matriz do sistema.

E a <u>matriz estendida do sistema</u>

é

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Note que a matriz $\tilde{A}$ contém toda a informação do sistema:

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Matriz Estendida

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo:

Se $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Então o sistema correspondente é

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

PARA "ECONOMIZAR ENERGIA"
VAMOS FAZER AS OPERAÇÕES
NA MATRIZ ESTENDIDA DO SISTEMA

Sistema na forma mais simples Possível

O sistema estará na forma mais simples possível quando a sua matriz estiver na forma escalonada reduzida

Uma matriz $\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$ está na forma escalonada reduzida se:

1. O elemento não nulo mais à esquerda de cada linha é 1 (pivô da linha)

② O pivô da linha i está à esquerda do pivô da linha $i+1$

③ Se uma coluna tem um pivô todos os outros elementos da coluna são zero

④ As linhas nulas estão no final da matriz

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ESTÁ NA FORMA ESCALONADA REDUZIDA

"NÃO EXEMPLOS"

• $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

NÃO ESTÁ NA FORMA ESCALONADA REDUZIDA POIS FALHA ①

- $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ FALHA (2)

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ FALHA (3)

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ FALHA (4)

Vamos explicar por exemplos o pq desses sistemas serem os mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

<u>Sistema</u>:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 = -1 \\ \quad x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad\qquad 0 \qquad = 0 \end{cases}$$

Soluções:

$$x_1 = -1 - x_4$$
$$x_2 = 2 - 2x_3 - x_4$$

x_3, x_4 arbitrários

OBS: Vamos escrever o conjunto das soluções deste sistema

Vamos chamar $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 0\lambda - \mu \\ x_2 = 2 - 2\lambda - \mu \\ x_3 = 0 + \lambda + 0\cdot\mu \\ x_4 = 0 + 0\cdot\lambda + 1\cdot\mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$S = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} X = (-1,2,0,0) + \lambda(0,-2,1,0) + \mu(-1,-1,0,1) \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Exemplo:

Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z + w = 1 \\ x \quad - z + 2w = 0 \\ x - y + 2z - w = 1 \end{cases}$$

Matriz Estendida do Sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \begin{array}{ccccc} x & y & z & w & b \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \end{array}$$

Sistema

$$\begin{cases} x \quad - z + 2w = 0 \\ y - 3z + 3w = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Soluções:

$$x = z - 2w$$
$$y = -1 + 3z - 3w$$
z, w arbitrário

Chamando $z = \lambda, \ w = \mu$

$$\begin{cases} x = 0 + \lambda - 2\mu \\ y = -1 + 3\lambda - 3\mu \\ z = 0 + \lambda + 0\mu \\ w = 0 + 0\lambda + \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$S = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} (x,y,z,w) = (0,-1,0,0) + \lambda(1,3,1,0) + \\ \qquad + \mu(-2,-3,0,1) \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

<u>Exemplo</u>:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + z = -1 \\ y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{9} L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 4L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

Sistema:

$$\begin{cases} x = -2/3 \\ y = -4/3 \\ z = 1/3 \end{cases}$$

$$S = \{(-2/3, -4/3, 1/3)\}$$