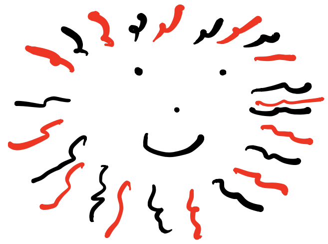
Aula Teórica 6

BOM DIA!



Revisão:

- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ vetores

- Considere a Equação abaixo com incógnitas $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{0} \qquad (*)$$

- $(*)$ sempre admite a solução trivial $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

- Os vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ são L.I. se a <u>única</u> solução de $(*)$ for a solução trivial, ou seja,

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{0} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

• Os vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ são L.D. se ⊛ admite alguma solução que não seja a trivial, ou seja, se existem $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, com $a_i \neq 0$ para ao menos algum $i \in \{1, \dots, k\}$, tais que

$$a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

<u>Prop</u> (***): 4 vetores em $\mathbb{R}^3$ são sempre L.D.

<u>Prop</u>: Se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ são L.D.
$\Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}$ são L.D.

<u>Prop</u> (**): Se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ são L.I. e $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}$ são L.D. então existem $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\boxed{\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_k \vec{v}_k}$$

BASES DE V^3

<u>Definição</u>: Uma <u>base de V^3</u> é uma tripla ordenada de vetores $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ tais que $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são L.I.

<u>OBS</u>: A ordem é importante! Mudar a ordem muda qual é a base!

<u>Teorema</u>: Seja $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ uma base de V^3. Dado $\vec{u} \in V^3$, existem únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2} + c\vec{f_3}$$

Demonstração

(i) Existência:

Vamos usar as proposições (**), (***) demonstrada na última aula

Note que por definição de base $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são L.I.

Mas $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{u}$ são L.D. pois 4 vetores em $\mathbb{R}^3$ são sempre L.D. (***)

Logo, temos que existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que (**)

$$\vec{u} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2} + c\vec{f_3}$$

Unicidade: Suponha que

$$\vec{u} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2} + c\vec{f_3}$$

$$\vec{u} = x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}$$

Quero provar que $a = x$, $b = y$, $c = z$

$$\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} = \underbrace{(a\vec{f_1} + b\vec{f_2} + c\vec{f_3})}_{\vec{u}} \underbrace{-}_{-} \underbrace{(x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3})}_{\vec{u}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{0} = (a-x)\vec{f_1} + (b-y)\vec{f_2} + (c-z)\vec{f_3}$$

Como $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são L.I.

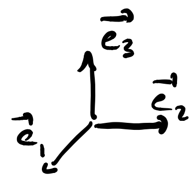
$$\Rightarrow \begin{cases} a - x = 0 \\ b - y = 0 \\ c - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = x \\ b = y \\ c = z \end{array} \qquad \blacksquare$$

Exemplos:

(1) Base canônica de V^3

$$\vec{e}_1 = (1,0,0)$$
$$\vec{e}_2 = (0,1,0)$$
$$\vec{e}_3 = (0,0,1)$$

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$



Dado $\vec{u} \in V^3$, $\vec{u} = (a, b, c)$

$\Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$

$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (a, b, c)$

Definição: Coordenadas de um vetor $\vec{u}$ com respeito à uma base $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$

Se $\vec{u} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2} + c\vec{f_3}$ dizemos que a, b, c são as coordenadas de $\vec{u}$ com respeito à base F e escrevemos

$$\vec{u} = (a, b, c)_F$$

Para deixa explícito:

$\vec{u} = (a,b,c)_F$ é uma notação

que significa $\vec{u} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2} + c\vec{f_3}$

<u>OBS</u>: Quando não indicamos a base

na notação e escrevemos

$\vec{u} = (a,b,c)$

está sub-entendido que estamos

usando a base canônica de V^3

explicada no exemplo acima.

<u>Exemplo</u>: Sejam

$\vec{f_1} = (1,-1,0)$

$\vec{f_2} = (0,1,0)$

$\vec{f_3} = (1,0,1)$

Vamos mostrar que $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é base de V^3 e encontrar as coordenadas de $\vec{u} = (1,2,3)$ na base $\mathcal{F}$.

Para mostrar que $\mathcal{F}$ é uma base, temos que mostrar que $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são L.I.

Para isso, considere a equação

(*)

$$x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad x(1,-1,0) + y(0,1,0) + z(1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,-x,0) + (0,y,0) + (z,0,z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+z, -x+y, z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 0 & (1) \\ -x+y = 0 & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow z=0$

substitui em $(1) \Rightarrow x=0$

substitui em $(2) \Rightarrow y=0$

Logo $\circledast \Rightarrow x=y=z=0$

e portanto $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são L.I.

Agora queremo encontrar as coordenadas do vetor $\vec{u} = (1,2,3)$ na base $\mathcal{F}$

Ou seja, queremos encontra $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2} + c\vec{f_3}$$

$$\Leftrightarrow (1,2,3) = a(1,-1,0) + b(0,1,0) + c(1,0,1)$$

$$\Leftrightarrow (1,2,3) = (a+c, -a+b, c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ -a+b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

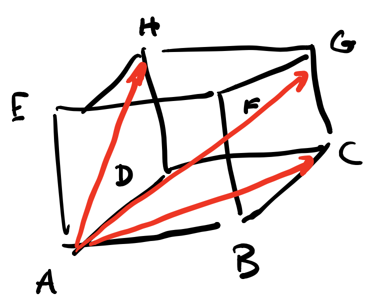
$(3) \Rightarrow c = 3$

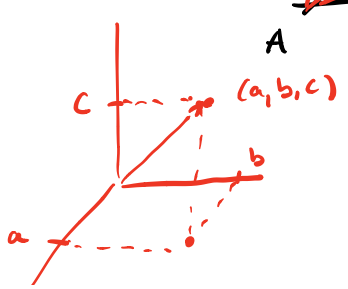
$(1) \Rightarrow a = -2$

$(2) \Rightarrow b = 0$

Ou seja

$$\boxed{\vec{u} = (-2, 0, 3)_{\beta}}$$





OBS: No exercício 4 da minha lista (e em outros) vcs já estavam encontrando as coord. de vetores com respeito à bases

Mudança de Base

- Sejam $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ e $G = (\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ bases de V^3

- Dado $\vec{u} = (a, b, c)_{\mathcal{F}}$ queremos encontrar as coordenadas de $\vec{u}$ na base G (e vice versa)

Exemplo: (Exercício 10 da Lista 1)

$F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ base de V^3

$\vec{u} = (1, 0, -2)_F$, $\vec{v} = (1, 1, 0)_F$, $\vec{w} = (0, -1, -1)_F$

(a) Mostre que $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base de V^3

(b) Se $\vec{a} = (1, 2, 3)_B$ encontre as coord. na base F

(c) Se $\vec{b} = (1, 2, 3)_F$ encontre as coord. na base B.

(a) Precisamos mostrar que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.I.

$\vec{u} = (1,0,-2)_F \Rightarrow \vec{u} = \vec{f_1} + 0\vec{f_2} - 2\vec{f_3} = \vec{f_1} - 2\vec{f_3}$

$\vec{v} = (1,1,0)_F \Rightarrow \vec{v} = \vec{f_1} + \vec{f_2} + 0\vec{f_3} = \vec{f_1} + \vec{f_2}$

$\vec{w} = (0,-1,-1)_F \Rightarrow \vec{w} = -\vec{f_2} - \vec{f_3}$

Consideramos a equação (*)

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow x(\vec{f_1} - 2\vec{f_3}) + y(\vec{f_1} + \vec{f_2}) + z(-\vec{f_2} - \vec{f_3}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow x\vec{f_1} - 2x\vec{f_3} + y\vec{f_1} + y\vec{f_2} - z\vec{f_2} - z\vec{f_3} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (x+y)\vec{f_1} + (y-z)\vec{f_2} + (-2x-z)\vec{f_3} = \vec{0}$

Como $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ L.I.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ y-z = 0 \\ -2x-z = 0 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow y = -x$

$(3) \Rightarrow z = -2x$

$(2) \Rightarrow -x - (-2x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow z = 0$

Logo $(*) \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.I. $\Rightarrow B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base.

(b) $\vec{a} = (1, 2, 3)_B$ (quero $\vec{a} = (x, y, z)_F$)

$\vec{a} = (1, 2, 3)_B \Rightarrow a = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} =$

$= \vec{f}_1 - 2\vec{f}_3 + 2(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) + 3(-\vec{f}_2 - \vec{f}_3)$

$= 3\vec{f}_1 - \vec{f}_2 - 5\vec{f}_3$

$\Rightarrow \vec{a} = (3, -1, -5)_F$

(c) $\vec{b} = (1, 2, 3)_F$ (Quero $\vec{b} = (\alpha, \beta, \gamma)_B$)

$\vec{b} = \vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 + 3\vec{f}_3 = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$

Quero encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \vec{f_1} + 2\vec{f_2} + 3\vec{f_3} = \alpha(\vec{f_1} - 2\vec{f_3}) + \beta(\vec{f_1} + \vec{f_2}) + \gamma(-\vec{f_2} - \vec{f_3})$$

$$\Rightarrow \vec{f_1} + 2\vec{f_2} + 3\vec{f_3} = (\alpha+\beta)\vec{f_1} + (\beta-\gamma)\vec{f_2} + (-2\alpha-\gamma)\vec{f_3}$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta-1)\vec{f_1} + (\beta-\gamma-2)\vec{f_2} + (-2\alpha-\gamma-3)\vec{f_3} = \vec{0}$$

Como $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ L.I.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-1=0 \\ \beta-\gamma-2=0 \\ -2\alpha-\gamma-3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \beta-\gamma=2 \\ -2\alpha-\gamma=3 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \beta = 1-\alpha$

$(3) \Rightarrow \gamma = -2\alpha-3$

$(2) \Rightarrow (1-\alpha) - (-2\alpha-3) = 2 \quad \Rightarrow \alpha + 4 = 2$

$\Rightarrow \alpha = -2$

$\Rightarrow \beta = 3$

$\Rightarrow \gamma = 1$

$$\boxed{\vec{b} = (-2, 3, 1)_B}$$

OBS: Se

$\vec{u} = (a, b, c)_{\mathcal{F}}$ $\quad\quad$ $\vec{v} = (x, y, z)_{\mathcal{F}}$

$\Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} = (a+x, b+y, c+z)_{\mathcal{F}}$

Pois

$\vec{u} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2} + c\vec{f_3}$

$\vec{v} = x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}$

$\vec{u} + \vec{v} = (a+x)\vec{f_1} + (b+y)\vec{f_2} + (c+z)\vec{f_3}$

- $(a, b, c)_{\mathcal{F}} = (x, y, z)_{\mathcal{F}} \iff \begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = z \end{cases}$