Aula Teórica 4

Bom Dia!

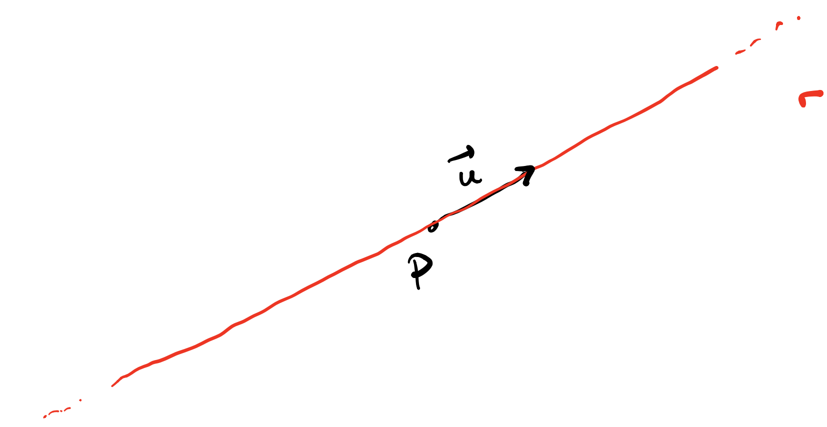
Lembre que

(1) Se $P \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{u} \in V^3$, $\vec{u} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\boxed{r: X = P + \lambda \vec{u}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma reta

Equação vetorial da Reta.

Notação para: $r = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid X = P + \lambda \vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R} \}$



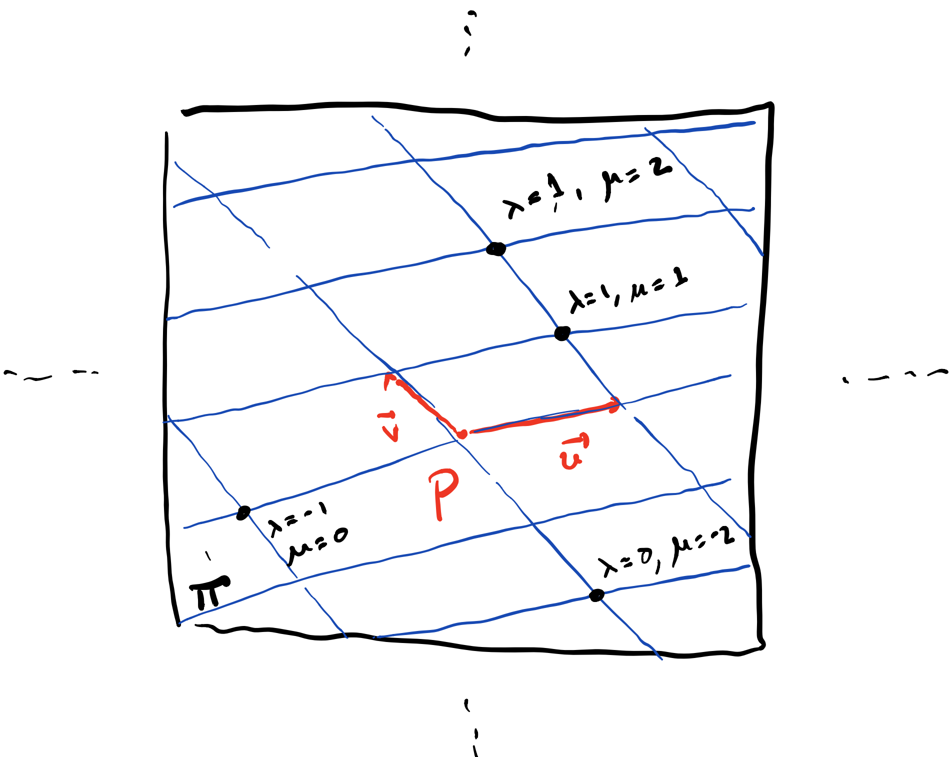
CUIDADO: A mesma reta pode ser descrita por equações diferentes

② Se $P \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, vetores não nulos e não paralelos

$$\pi: \; X = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

é um plano.

$$\pi = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid X = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$



CUIDADO: O mesmo plano pode ser descrito por outras equações.

③ $\mathbb{R}^3 = \{ O + \lambda \vec{e_1} + \mu \vec{e_2} + \gamma \vec{e_3} \mid \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \}$

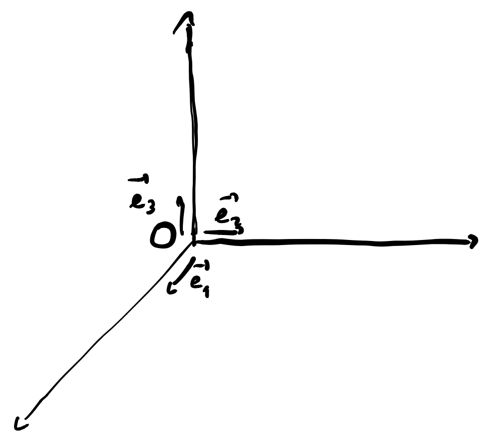
onde:

$O = (0,0,0)$

$\vec{e_1} = (1,0,0)$

$\vec{e_2} = (0,1,0)$

$\vec{e_3} = (0,0,1)$



<u>Pergunta</u>: Fixado um ponto $P \in \mathbb{R}^3$:

① Um vetor sempre determina uma reta?
NÃO! Precisa ser não nulo

② Dois vetores sempre determinam um plano? NÃO! Precisam ser não paralelos

③ três vetores determinam todo o $\mathbb{R}^3$? Não! Precisam ser NÃO "coplanares"

④ O que acontece com 4 ou mais vetores?

(São sempre L.D. em $\mathbb{R}^3$)
(ver abaixo)

Dependência e Independência Linear

Definição:

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ vetores (em $\mathbb{R}^3$)

- Dizemos que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ são Linearmente Independentes (L.I.) se a equação

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

- Dizemos que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ são Linearmente Dependentes (L.D.) se não são L.I. ou seja, se existem $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ com $a_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$ tais que $a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}$

Primeiras Explicações

① Ser L.I. /L.D. é uma propriedade do conjunto de vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ (A relação entre esses vetores) e não de cada vetor independentemente dos outros

② Dados $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ podemos considerar a equação

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{0} \qquad (*)$$

que tem com incógnitas $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$

- A equação (*) sempre admite ao menos uma solução dada por

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \qquad \text{(Solução Trivial)}$$

- $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k$ L.I. $\iff$ A <u>única</u> solução da equação (*) é a solução $a_1 = \dots = a_k = 0$

- $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ L.D. $\iff$ (*) admite outra solução que não seja a solução $a_1 = \dots = a_k = 0$

Nomeclatura :

Um vetor da forma

$a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k$ é chamado uma combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$

- Interpretação Geométrica

- $k = 1$

$\vec{v}$ é L.I. se e somente se a equação

$a\vec{v} = \vec{0}$ admite somente a solução trivial $a = 0$

$\vec{v}$ é L.I. $\iff$ $\vec{v} \neq \vec{0}$
$\vec{v}$ é L.D. $\iff$ $\vec{v} = \vec{0}$

- $\underline{K=2}$

Pergunta: Quando que $\vec{v}, \vec{w}$ são L.I.?

Note que se $\vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{v}, \vec{w}$ são L.D. pois, nesse caso,

$$1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w} = \vec{0} \qquad (\vec{v} = \vec{0})$$

$a_1 = 1$, $a_2 = 0$ é uma solução não trivial da equação $\circledast$

$$(a_1 \vec{v} + a_2 \vec{w} = \vec{0})$$

Para continuar a investigação de quando $\vec{v}, \vec{w}$ são L.I. vamos assumir que $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Suponha que $a\vec{v} + b\vec{w} = \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

Possibilidade 1 : $b = 0$

$\Rightarrow a\vec{v} = 0 \Rightarrow a = 0$ (pois $\vec{v} \neq \vec{0}$)

Possibilidade 2 : $b \neq 0$

$\Rightarrow b\vec{w} = -a\vec{v} \Rightarrow \vec{w} = -\frac{a}{b}\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{w} = \lambda \vec{v}$ $\left(\lambda = -\frac{a}{b}\right)$

Em conclusão :

$\vec{v}, \vec{w}$ são L.D. se e somente se uma das seguintes coisas acontece:

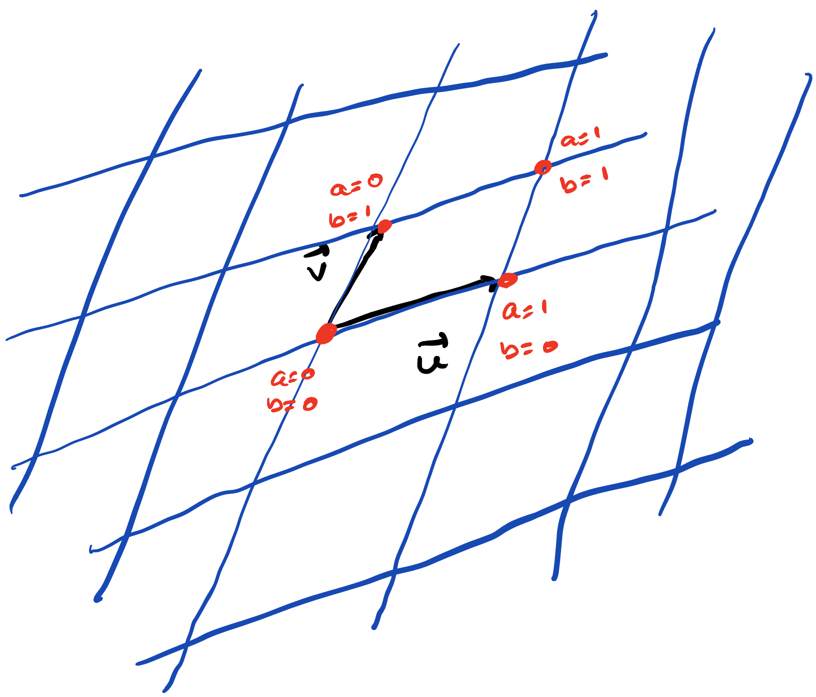
1. $\vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{w} = \vec{0}$
3. $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ $(\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \neq \vec{0})$

$\rightarrow \vec{v}, \vec{w}$ são paralelo

Dito de outra forma:

$\vec{v}, \vec{w}$ são L.D. $\iff$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ ou $\vec{w} = \lambda \vec{v}$

Desenho no caso de 2 vetores L.I.



<u>K=3</u>: Quando que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.I / L.D. ?

- Note que se dois dos vetores forem L.D. então os três são L.D. Vamos provar isso:

Suponha que $\vec{u}, \vec{v}$ L.D.

Isso significa que existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ tais que

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$$

Mas então

$$a\vec{u} + b\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$$

e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.D. $\blacksquare$

Agora vamos continuar nossa investigação assumindo que $\vec{u}, \vec{v}$ são L.I.

E vamos tentar entender quando que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.D.

Assuma que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.D.

Ou seja, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$

tais que $\underbrace{a \neq 0, \text{ ou } b \neq 0, \text{ ou } c \neq 0}_{***}$

e

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \qquad **$$

AFIRMAÇÃO: Nesse caso ($\vec{u}, \vec{v}$ são L.I.)

$c \neq 0$ pois se $c = 0$ então

$$** \Rightarrow a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \xrightarrow[(\vec{u}, \vec{v} \text{ L.I.})]{} a = 0,\ b = 0$$

O que contradiz o fato ***

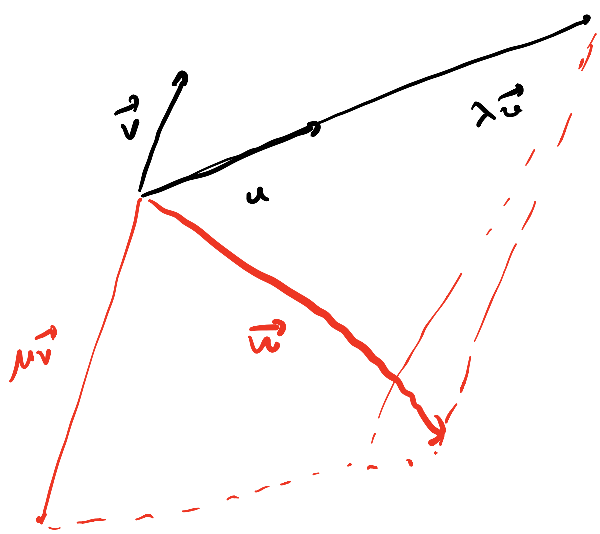
Logo

$$c\vec{w} = -a\vec{u} - b\vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{w} = -\frac{a}{c}\vec{u} - \frac{b}{c}\vec{v}}$$

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Conclusão: Se $\vec{u}, \vec{v}$ L.I. e

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.D. $\Rightarrow$ $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$



Geometricamente:

Dado $P \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.D.

$\Longleftrightarrow$ $P+\vec{u}$, $P+\vec{v}$, $P+\vec{w}$ são coplanares

($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanares)

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.I. $\iff$ $P+\vec{u}$, $P+\vec{v}$, $P+\vec{w}$ não são coplanares.

Exemplos (Numéricos):

① $\vec{u} = (1,2,1)$, $\vec{v} = (-1,1,2)$

Pergunta: L.I. ou L.D.?

Suponha que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ ⊛

$\iff a(1,2,1) + b(-1,1,2) = (0,0,0)$

$\iff (a, 2a, a) + (-b, b, 2b) = (0,0,0)$

$\iff (a-b, 2a+b, a+2b) = (0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} a-b = 0 & (1) \\ 2a+b = 0 & (2) \\ a+2b = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow a = b$

$(2) \Rightarrow 3b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0$

Logo $\circledast \Rightarrow a=0,\ b=0$

Portanto $\vec{u}, \vec{v}$ são L.I.

(2) $\vec{u} = (1,-1,2)$, $v = (-2,2,-4)$

L.I. / L.D. ?

Suponha que

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad a(1,-1,2) + b(-2,2,-4) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a,-a,2a) + (-2b,2b,-4b) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-2b, -a+2b, 2a-4b) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-2b = 0 \\ -a+2b = 0 \\ 2a-4b = 0 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow a = 2b$

$(2) \Rightarrow 0 = 0$

$(3) \Rightarrow 0 = 0$

Solução $a = 2b$
b é arbitrário

Em particular, uma solução não trivial de ⊛ é obtida tomando

$b=1, \quad a=2$

$2\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ os vetores são L.D.

$\Rightarrow \quad \vec{v}=-2\vec{u}$

③ $\vec{u}=(1,0,-1), \quad \vec{v}=(1,1,-2)$

$\vec{w}=(2,1,-3)$

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ L.I. / L.D. ?

Suponha que

$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0} \iff a(1,0,-1)+b(1,1,-2)+c(2,1,-3)$
$=(0,0,0)$

$\iff (a+b+2c,\ b+c,\ -a-2b-3c)=(0,0,0)$

$\iff$

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ b+c=0 \\ -a-2b-3c=0 \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \ b = -c$

$(1) \Rightarrow \ a - c + 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad a + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -c$

$(3) \Rightarrow -(-c) - 2(-c) - 3c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$

Solução $\quad a = -c$

$b = -c$

c arbitrário

Solução particular $\quad (c = -1)$

$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1$

$\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$ Vetores L.D.

$\Leftrightarrow \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

4 $\quad \vec{u} = (1, -1, 0), \quad \vec{v} = (0, 1, -1), \quad \vec{w} = (2, 1, -2)$

L.I. / L.D. ?

Suponha que

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad a(1,-1,0)+b(0,1,-1)+c(2,1,-2)=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow \quad (a+2c,\ -a+b+c,\ -b-2c)=(0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \qquad\quad + 2c = 0 \\ -a+b+c = 0 \\ \quad\ -b-2c = 0 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \quad a=-2c$

$(3) \Rightarrow \quad b=-2c$

$(2) \Rightarrow \quad -(-2c)+(-2c)+c=0$

$\qquad \Rightarrow \quad c=0$

A única solução de (*) é

$a=b=c=0$

Vetores L.I.