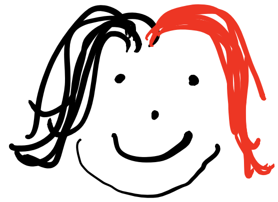
Aula Teórica 2

Bom Dia!



Revisão:

- Na aula 1 vimos a definição de um vetor em $\mathbb{R}^3$:

→ Considere o conjunto dos pares ordenados de pontos de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \{ (P, Q) \mid P \in \mathbb{R}^3, \ Q \in \mathbb{R}^3 \}$$

OBS: $P = (p_1, p_2, p_3)$

$Q = (q_1, q_2, q_3)$

→ Dois pares (P, Q) e (R, S) determinam o mesmo módulo se

$d(P,Q) = d(R,S)$

Onde $d(P,Q) = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$

→ Dois pares (P,Q) e (R,S) <u>determinam a mesma direção</u> se a reta que passa pelos pontos P e Q & a reta que passa pelos pontos R e S são paralelas

<u>OBS</u>: Se $P=Q$ (ou $R=S$) então o para (P,Q) não determina uma reta. Nesse caso, por convenção, temos que

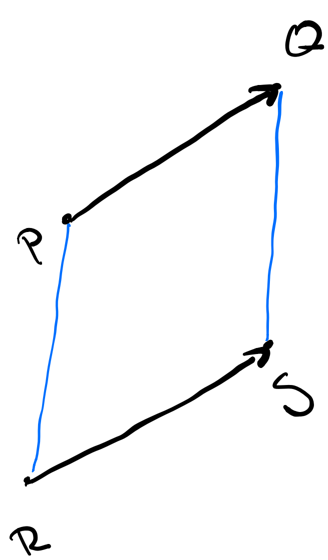
$$\boxed{(P,P) \text{ determina a mesma direção que } (R,S)}$$

Em coordenadas

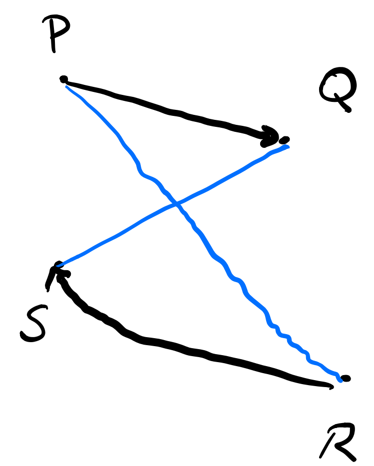
(P,Q) & (R,S) determinam a mesma direção $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} q_1 - p_1 = \lambda(s_1 - r_1) \\ q_2 - p_2 = \lambda(s_2 - r_2) \\ q_3 - p_3 = \lambda(s_3 - r_2) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda(q_1 - p_1) = s_1 - r_1 \\ \lambda(q_2 - p_2) = s_2 - r_2 \\ \lambda(q_3 - p_3) = s_3 - r_3 \end{cases}$$

→ Suponha que (P, Q) & (R, S) determinam a mesma direção. Eles <u>determinam o mesmo sentido</u> se o segmento de reta ligando P à R <u>não</u> intersecta o segmento de reta ligando Q à S



Mesmo sentido



Sentido oposto

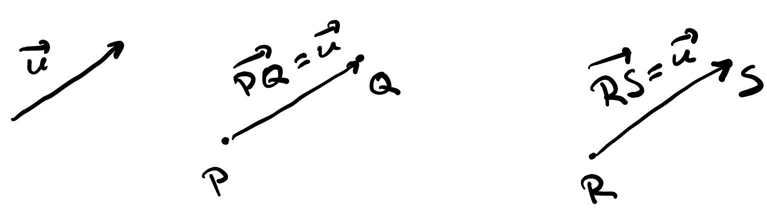
• Em coordenadas: $\lambda > 0 \Leftrightarrow$ Mesmo sentido

→ Um <u>vetor</u> é uma classe de equivalência de pares de pontos (P, Q) onde (P, Q) é equivalente à (R, S) se determinam o mesmo módulo, direção e sentido.

• Cada par de pontos (P, Q) representa um vetor $\overrightarrow{PQ}$

• Cada vetor pode ser representado por um par de pontos (P, Q)

• Dois pares de pontos representam o <u>mesmo</u> vetor se determinam o mesmo módulo, direção e sentido.



Em Coordenadas:

$$\vec{PQ} = \vec{RS} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} q_1 - p_1 = s_1 - r_1 \\ q_2 - p_2 = r_2 - s_2 \\ q_3 - p_3 = r_3 - s_3 \end{cases}$$

- Notação: V^3 = conjunto dos vetores em $\mathbb{R}^3$

- <u>Vetor</u> <u>Nulo</u>:

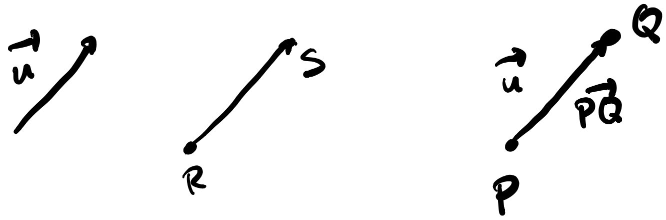
$$\vec{0} = \vec{PP} \qquad \text{(Módulo zero)}$$

- Coordenadas canônicas de um vetor em $\mathbb{R}^3$:

(*) Nos diz que as quantidade $(q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ só depende do vetor e não do par de pontos que representa o vetor

$\vec{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ são as <u>coordenadas</u> canônicas de $\vec{PQ}$ (vetor em $\mathbb{R}^3$)

- Dado $\vec{u} \in V^3$ e $P \in \mathbb{R}^3$ existe um único $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u} = \vec{PQ}$



$\vec{u} = (a, b, c)$

$P = (p_1, p_2, p_3)$

$\Rightarrow Q = (p_1 + a, p_2 + b, p_3 + c)$

<u>Ideia</u> Pense em um vetor como representando um deslocamento no espaço ($\mathbb{R}^3$)

- A partir do momento que vc escolhe um ponto P para começar o deslocamento determinado por $\vec{u}$, vc vai terminar em um ponto Q

$\Rightarrow \quad \vec{u} = \overrightarrow{PQ}$

- Vetor nulo $\vec{0}$ representa o deslocamento que fica parado

- $P = (0, 1, -1) = (p_1, p_2, p_3)$

$Q = (1, -1, 0) = (q_1, q_2, q_3)$

$\overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

$R = (0, 0, 0)$, $S = (1, -2, 1)$

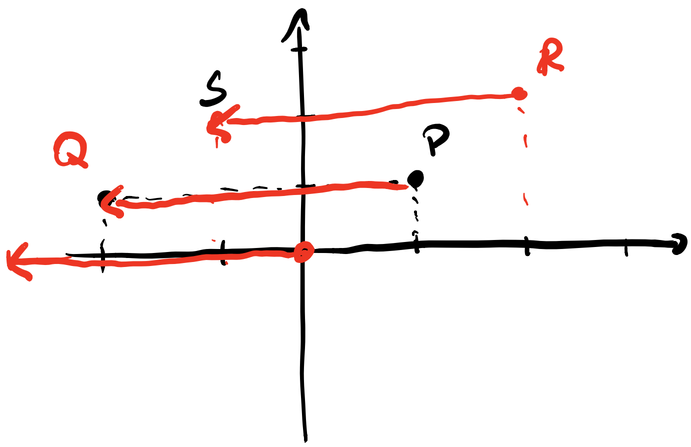
$\vec{RS} = (1, -2, 1)$

$$\boxed{\vec{RS} = \vec{PQ}}$$

Exemplo em $\mathbb{R}^2$

$P = (1, 1) \qquad Q = (-2, 1)$

$R = (2, 2), \quad S = (-1, 2)$



$\vec{PQ} = (-3, 0)$

$\vec{RS} = (-3, 0)$

OPERAÇÕES COM VETORES

- Soma De Vetor com Vetor

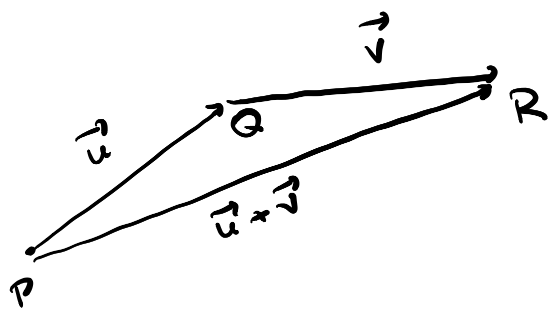
V^3 = conjunto de vetores em $\mathbb{R}^3$

$$+ : V^3 \times V^3 \longrightarrow V^3$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$$

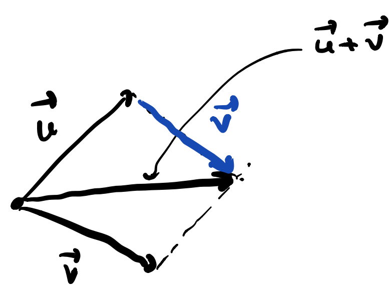
A soma de vetores é definida da seguinte forma:

Se $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$

$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PR}$



Regra do Paralelograma



Proposição

Em coordenadas:

$\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (d, e, f) \Rightarrow$

$\vec{u} + \vec{v} = (a+d,\ b+e,\ c+f)$

Demonstração:

Suponha que $\vec{u} = PQ$

onde $P = (p_1, p_2, p_3)$

$\Rightarrow \quad Q = (p_1 + a,\ p_2 + b,\ p_3 + c)$

$\vec{v} = \overrightarrow{QR}$ onde $Q = (\overbrace{p_1+a}^{q_1},\ \overbrace{p_2+b}^{q_2},\ \overbrace{p_3+c}^{q_3})$

$R = (p_1 + a + d,\ p_2 + b + e,\ p_3 + c + f)$

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (a+d,\ b+e,\ c+f) \qquad \blacksquare$$

- **Produto por Escalar**

Multiplicação de um vetor por um número real.

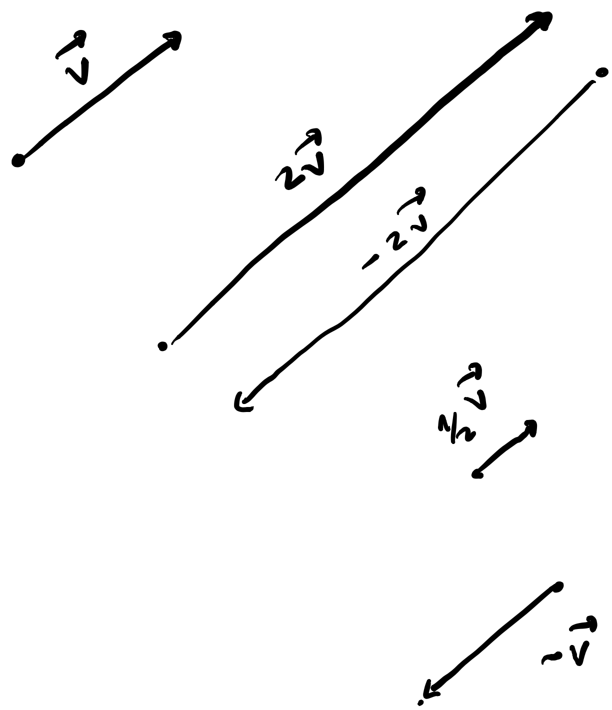
$$\cdot : \mathbb{R} \times V^3 \longrightarrow V^3$$
$$(\lambda, \vec{v}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{v}$$

$\lambda\vec{v}$ é definido da seguinte forma:

$$\lambda\vec{v} = \begin{cases} \text{o vetor com mesma direçao e sentido de } \vec{v}, \text{ com módulo } |\lambda| \cdot \|\vec{v}\| & \text{se } \lambda > 0 \\ \vec{0} & \text{se } \lambda = 0 \\ \text{o vetor com mesma direção, sentido oposto de } \vec{v} \text{ e módulo } |\lambda|\|\vec{v}\| & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

onde $\|\vec{v}\|$ é o módulo/Norma de $\vec{v}$ definido por

$$\|\vec{PQ}\| = d(P, Q)$$



Em coordenadas:

$$\vec{u} = (a, b, c) \Rightarrow \lambda \vec{u} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

<u>OBS</u>: Se $\vec{u} = (a, b, c)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

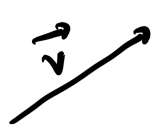
$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ é um vetor que tem a mesma direção, mesmo sentido que $\vec{u}$ mas tem norma 1

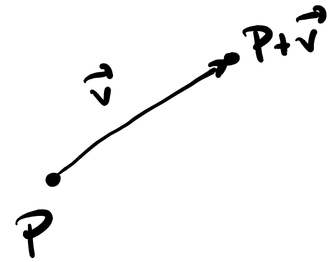
- Somar um vetor à um ponto

$$+ : \mathbb{R}^3 \times V^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(P, \vec{v}) \longmapsto P + \vec{v}$$

Por definição

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q$$





Em coordenadas

$\vec{v} = (a, b, c)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$

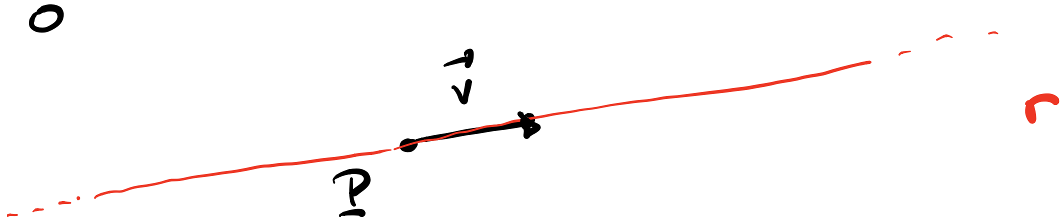
$\Rightarrow P + \vec{v} = (p_1 + a,\ p_2 + b,\ p_3 + c)$

"$P + \vec{v}$ é o ponto final do deslocamento determinado por $\vec{v}$ começando no ponto P"

<u>Aplicação da "linguagem"</u>

- Retas no espaço $\mathbb{R}^3$

Um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $\vec{u} \in V^3$ determinam uma reta
$\vec{u} \neq \vec{0}$



$$r = \{ P + \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Em coordenadas

$$P = (p_1, p_2, p_3), \qquad \vec{v} = (a, b, c)$$

$$r = \{ (p_1 + \lambda a,\ p_2 + \lambda b,\ p_3 + \lambda c) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

<u>Exemplo</u>: Considere o sistema

$$\circledast \begin{cases} x + 2y - z = 1 & (1) \\ x - y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

Vamos ver que a solução é uma reta em $\mathbb{R}^3$

$$z = -\frac{1}{3} + y$$

$(1) \Rightarrow z = x + 2y - 1$

$(2) \Rightarrow x - y + 2(x + 2y - 1) = 0$

$\Rightarrow 3x + 3y - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} - y$

$x = \frac{2}{3} - y$

$z = \frac{-1}{3} + y$ ← Solução

y é arbitrário

Chamando $y = \lambda$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = -\frac{1}{3} + \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y, z) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)}_{P} + \lambda \overbrace{(-1, 1, 1)}^{\vec{u}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P + \lambda \vec{u}$$

A reta que é solução do sistema (*) é a reta

$r = \{P + \lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$P = (\frac{2}{3}, 0, -1/3)$

$\vec{u} = (-1, 1, 1)$