Aula 18

Bom Dia !!!

Última Aula

- Sistema de Coordenadas (lineares) em $\mathbb{E}^3$

$$\Sigma = (O, \mathcal{E})$$

onde $O \in \mathbb{E}^3$ (ponto), $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base de V^3

- Coordenadas de $P \in \mathbb{E}^3$

$$P = (a,b,c)_\Sigma \iff \vec{OP} = (a,b,c)_\mathcal{E}$$

$$\iff P = O + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

- $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ é sistema de coordenadas ortonormal se $\mathcal{E}$ é base O.N.

<u>OBS</u>: Ao trabalhar em $\mathbb{R}^3$ com o sistema de <u>coordenadas</u> <u>canônico</u>: $\Sigma = (O, \mathcal{E})$

onde $O = (0,0,0)$, $\mathcal{E} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Vamos omitir Σ da notação

$$\underbrace{P = (a,b,c)}_{\substack{\text{Sistema de Coord.} \\ \Sigma}} \iff \underbrace{\overrightarrow{OP} = (a,b,c)}_{\text{Base Canônica}}$$

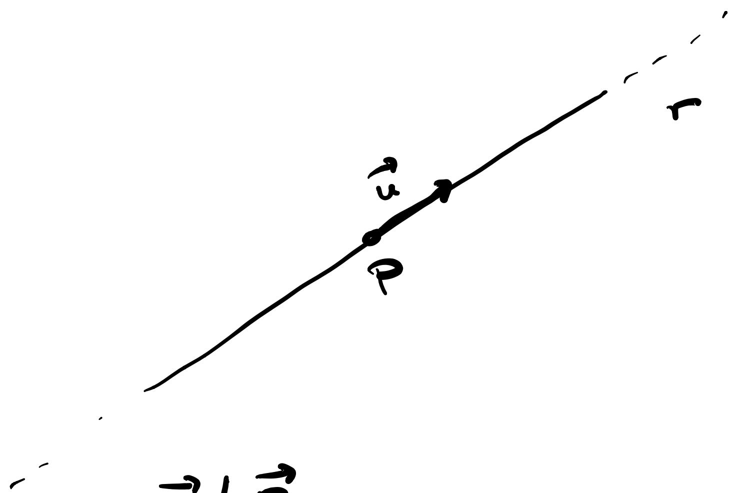
Retas em $\mathbb{E}^3$ ($\mathbb{R}^3$)

Assuma que esteja fixado um sistema de coordenadas O.N. em $\mathbb{E}^3$

($\mathbb{E}^3 \cong \mathbb{R}^3$ com coordenadas canônicas)

Vou omitir o sistema de coordenadas da notação!

Equação Vetorial da Reta



$\vec{u} \neq \vec{0}$

$$r = \{ X \in \mathbb{E}^3 \mid X = P + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Notação: $\underbrace{r: \quad X = P + \lambda \vec{u}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}}_{\text{Equação Vetorial da reta } r}$

Em coordenadas

$X = (x, y, z) \qquad P = (p_1, p_2, p_3)$

$\vec{u} = (a, b, c)$

$$X \in r \iff (x,y,z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(a,b,c)$$
$$= (p_1 + \lambda a,\ p_2 + \lambda b,\ p_3 + \lambda c)$$

$$\iff \begin{cases} x = p_1 + \lambda a \\ y = p_2 + \lambda b \\ z = p_3 + \lambda c \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(Equação Paramétrica da reta r)

Notação

$$r: \begin{cases} x = p_1 + \lambda a \\ y = p_2 + \lambda b \\ z = p_3 + \lambda c \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\iff \quad r = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x = p_1 + \lambda a \\ y = p_2 + \lambda b \\ z = p_3 + \lambda c \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Equação da reta na forma simétrica:

$$r: \quad \frac{x - p_1}{a} = \frac{y - p_2}{b} = \frac{z - p_3}{c} \qquad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{matrix}$$

Notação para

$$r = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x - p_1}{a} = \frac{y - p_2}{b} = \frac{z - p_3}{c} \right\}$$

Exemplo Descreva uma equação vetorial para a reta

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = z+1$$

Solução:

Seja $\lambda = \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = z+1$

- $\frac{x-2}{3} = \lambda \iff x = 2+3\lambda$
- $\frac{y}{2} = \lambda \iff y = 2\lambda$
- $z+1 = \lambda \iff z = -1+\lambda$

Logo, $(x,y,z) \in r \iff \begin{cases} x = \overbrace{2}^{P} + \overbrace{3}^{\vec{v}}\lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = -1 + 1\cdot\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(Equação paramétrica da reta r)

$$\iff (x,y,z) = \underbrace{(2,0,-1)}_{P} + \lambda \underbrace{(3,2,1)}_{\vec{v}} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Equação Vetorial:

$$r: \ X = (2,0,-1) + \lambda(3,2,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Equação Planar da reta

Vendo uma reta como interseção de dois planos

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$ onde

$$(a,b,c) \not\parallel (A,B,C)$$

Exemplo: Encontre uma equação vetoria para a reta

$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 3 & (1) \\ x \quad\ \ + z = 0 & (2) \end{cases}$$

Solução: $(2) \Rightarrow x = -z$

$(1) \Rightarrow \quad -z - y + 2z = 3 \quad \Rightarrow y = -3 + z$

Logo $\quad x = -z$

$y = -3+z$

z é arbitrário

Chamando $z = \lambda$ temos

$$\begin{cases} x = 0 - \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(Eq. paramétrica da reta r)

$$r: X = (0,-3,0) + \lambda(-1,1,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Eq. vetorial da reta r.

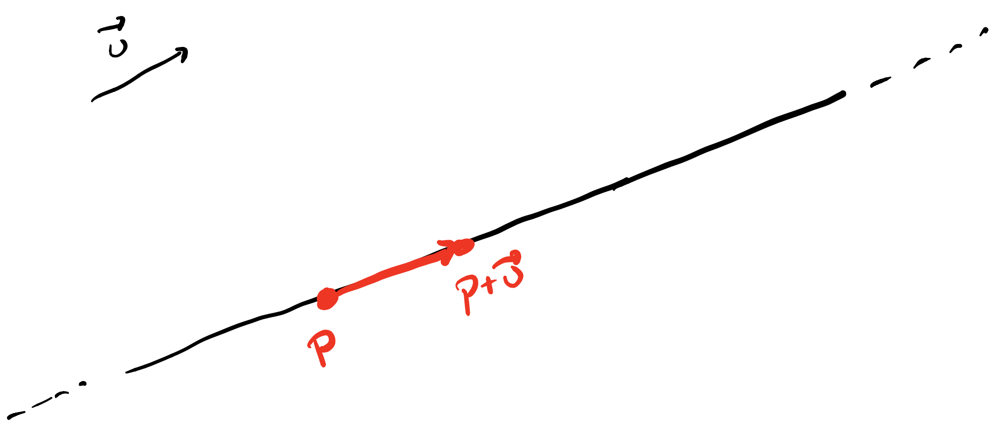
<u>OBS</u>: A mesma reta pode ser descrita de várias formas diferentes usando diferentes eq. vetoriais (ou paramétricas, simétrica, planar)

Nomeclatura:

Dada uma reta $r \subset \mathbb{E}^3$, um **vetor diretor** da reta r é um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{u} \parallel r$

OBS: $\vec{u} \parallel r$ por definição se

$P \in r \Rightarrow P + \vec{u} \in r$



Planos em $\mathbb{E}^3$

(Sistema de coordenadas Está fixado)

- **Equação Vetorial**

$\pi = \{ X \in \mathbb{E}^3 \mid X = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

$P \in \mathbb{E}^3$, $\vec{u}, \vec{v}$ são L. I.

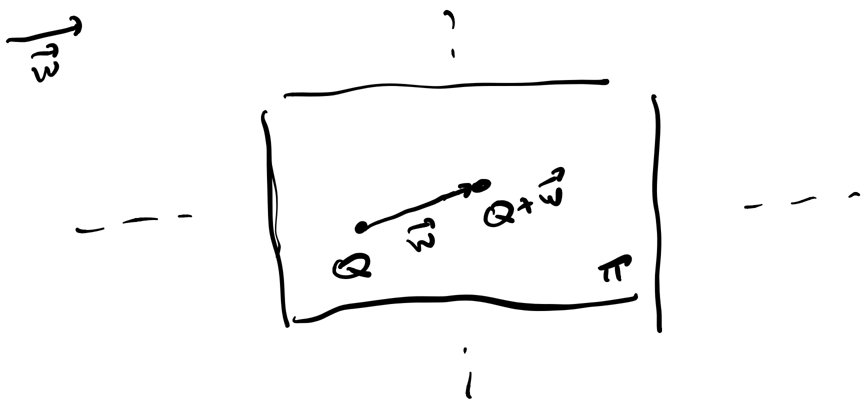
<u>Notação</u>: $\pi : X = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

<u>Definição</u>: um par de vetores L.I. $(\vec{u}, \vec{v})$ é chamado de <u>vetores diretores do plano</u> π se

$\vec{u} \parallel \pi$ e $\vec{v} \parallel \pi$

<u>OBS</u>: $\vec{w} \parallel \pi$ por definição

se $Q \in \pi \Rightarrow Q + \vec{w} \in \pi$



- Equação Paramétrica do Plano

$$\pi: \ X = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

Em coordenadas

$X = (x, y, z)$

$P = (p_1, p_2, p_3)$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$X = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \iff \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Equação Paramétrica do plano π

- Equação Geral do plano π

$$\pi: \ ax + by + cz + d = 0 \quad \text{onde } (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

Notação para:

$$\pi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0 \}$$

Exemplo: Encontre uma equação vetorial para o plano

$$\pi: \; 2x - 3z + y = 1$$

Vamos resolver a equação:

$$2x - 3z + y = 1 \iff y = 1 - 2x + 3z$$

x, z são arbitrários

Vamos chamar $x = \lambda$, $z = \mu$

$$\begin{cases} x = 0 + 1\lambda + 0\mu \\ y = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ z = 0 + 0\lambda + 1\mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(Eq. Paramétrica de π)

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = \underbrace{(0,1,0)}_{P} + \lambda \underbrace{(1,-2,0)}_{\vec{u}} + \mu \underbrace{(0,3,1)}_{\vec{v}}$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\pi: \; X = (0,1,0) + \lambda(1,-2,0) + \mu(0,3,1) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

OBS: Seguindo a sugestão do Rafael:

$$\pi: \; 2x - 3z + y = 1$$

Vamos achar 3 pontos não colineares que satisfazem a equação geral de π:

$P = (0,1,0)$

$Q = (0,0,-\frac{1}{3}) \quad \in \pi$

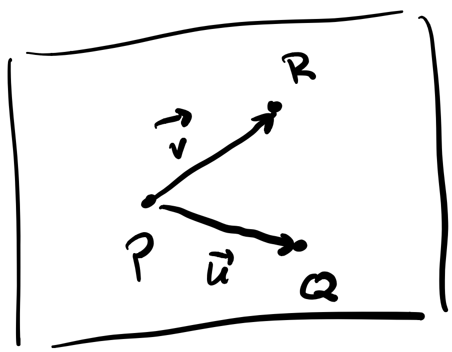
$R = (\frac{1}{2},0,0)$

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ | $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$

$\vec{u} = (0, -1, -\frac{1}{3})$ | $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -1, 0)$

$$\pi: \; X = P + \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{PR} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$= (0,1,0) + \lambda(0,-1,-1/3) + \mu(\tfrac{1}{2},-1,0) \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



Exemplo: Encontre uma equação geral para o plano

$$\pi: \; X = (0,-1,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(1,-1,2)$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Vou fazer isso **sem** usar que nosso sistema de coordenadas é ortonormal:

Queremos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tais que

$$\pi: \quad ax + by + cz + d = 0$$

Para fazer isso usando 3 pontos não colineares de π:

- $P = (0,-1,1) \in \pi$ $\quad (\lambda=0, \mu=0)$
- $Q = (1,0,2) \in \pi$ $\quad (\lambda=1, \mu=0)$
- $R = (1,-2,3) \in \pi$ $\quad (\lambda=0, \mu=1)$

Como $P \in \pi$ temos:

$$a \cdot 0 + b \cdot (-1) + c(1) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{-b + c + d = 0}$$

Como $Q \in \pi$

$$\boxed{a + 2c + d = 0}$$

Como $R \in \pi$

$$\boxed{a - 2b + 3c + d = 0}$$

Logo, a, b, c, d devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} -b + c + d = 0 & (1) \\ a + 2c + d = 0 & (2) \\ a - 2b + 3c + d = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow b = c + d$

$(2) \Rightarrow a = -2c - d$

$(3) \Rightarrow -2c - d - 2(c+d) + 3c + d = 0$

$\Rightarrow -c - 2d = 0$

$\Rightarrow c = -2d$

Substituindo:

$a = 3d$

$b = -d$

Logo

$(d \neq 0)$

$\pi: \; 3dx - dy - 2dz + d = 0$

Para encontrar <u>uma</u> equação geral do plano π, tome $d = 1$

$$\boxed{\pi: \; 3x - y - 2z + 1 = 0}$$

Agora vamos resolver o mesmo problema usando que estamos em um sistema de coordenadas O. N..

Antes, um pouco de geometria:

(i) Seja π um plano.

Dizemos que um vetor $\vec{n}$ é perpendicular ao plano, se

$$\langle \vec{n}, \vec{w} \rangle = 0 \quad \text{para todo } \vec{w} \parallel \pi$$

(ii) Se $\pi: P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

então $\vec{w} \parallel \pi \iff \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pois: $\vec{w} \parallel \pi \iff$

$P + \vec{w} \in \pi \iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais

$P + \vec{w} = P + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

$\iff \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

(iii) Se $\pi: P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ então

$$\vec{n} \perp \pi \iff \vec{n} \perp \vec{u} \ \text{ e } \ \vec{n} \perp \vec{v}$$

Vamos demonstrar isso

($\Rightarrow$) Suponha que $\vec{n} \perp \pi$

Isso significa que $\vec{n} \perp \vec{w}$ para todo $\vec{w} \parallel \pi$

Em particular, $\vec{n} \perp \vec{u}$ e $\vec{n} \perp \vec{v}$ //

($\Leftarrow$) Suponha que $\vec{n} \perp \vec{u}$ e $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Queremos mostrar que $\vec{n} \perp \vec{w}$ para todo $\vec{w} \parallel \pi$

- Usando (ii) temos que

$$\vec{w} \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Logo

$$\langle \vec{n}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{n}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \rangle = \alpha \underbrace{\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle}_{0} + \beta \underbrace{\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle}_{0}$$
$$= 0$$

$\Rightarrow \vec{n} \perp \vec{w}$ para todo $\vec{w} \parallel \pi$

$\Rightarrow \vec{n} \perp \pi$ $\blacksquare$

iv) Se $\pi: ax+by+cz+d=0$ em um sistema de coord. O. N. então

$$\boxed{\vec{n}=(a,b,c) \perp \pi}$$

Vamos demonstrar isso:

Seja $P=(p_1,p_2,p_3) \in \pi$

Seja $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3) \parallel \pi$

Quero mostrar que

$$\underbrace{\langle (a,b,c),(w_1,w_2,w_3)\rangle}_{aw_1+bw_2+cw_3} = 0$$

Como $\vec{w} \parallel \pi$ temos que $\underset{(p_1+w_1;\, p_2+w_2,\, p_3+w_3)}{\overset{\shortparallel}{P+\vec{w}}} \in \pi$

$\Rightarrow \quad a(p_1+w_1)+b(p_2+w_2)+c(p_3+w_3)+d=0$

$\Rightarrow (ap_1+bp_2+cp_3+d)+(aw_1+bw_2+cw_3)=0$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$ pois $P \in \pi$

$\Rightarrow \quad a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0$

$\Rightarrow \quad \langle (a,b,c), (w_1, w_2, w_3) \rangle = 0$

$\Rightarrow \quad (a,b,c) \perp \vec{w}$ para todo $\vec{w} \parallel \pi$

$\Rightarrow \quad \vec{n} = (a,b,c) \perp \pi$ ■

VAMOS USAR ISSO PARA ENCONTRAR UMA EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

$$\pi: \quad X = (0,-1,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(1,-1,2)$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(Escrito em um sist. de coord. ON.)

Sabemos que $\pi : ax+by+cz+d=0$

onde $(a,b,c) \perp \pi$

Um vetor perpendicular a π

é $\vec{n} = (1,1,1) \wedge (1,-1,2)$

$$= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (3,-1,-2)$$

$\Rightarrow \pi : 3x - y - 2z + d = 0$

Falta determinar o valor de

d.

Para isso usamos que

$P = (0,-1,1) \in \pi$

$\Rightarrow 1 - 2 + d = 0$

$\Rightarrow \boxed{d = 1}$

$$\boxed{\pi:\ 3x - y - 2z + 1 = 0}$$