Aula 17

Bom Dia!

Sistemas de Coordenadas no Espaço

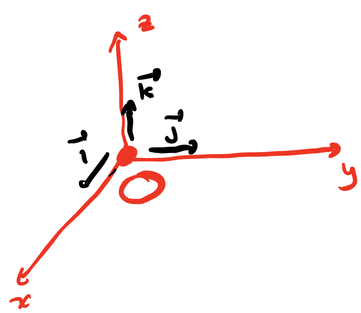
OBJETIVO: Descrever os pontos de $\mathbb{E}^3$ como triplas de números reais

OBS: Neste curso vamos usar somente sistemas de coordenadas lineares. Mas vou discutir alguns exemplos "não lineares" no final da Aula

Antes de Definir vamos re-interpretar as coordenadas de um ponto em $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^3$ temos

- Uma origem O
- A base canônica $\mathcal{E} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



$P \in \mathbb{R}^3$, $\quad P = (a, b, c) \iff P = O + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

(operação de soma de ponto com vetor)

$\Leftrightarrow \quad \vec{OP} = (a,b,c)_{\mathcal{E}}$

- Para obter coordenadas (lineares) em $\mathbb{E}^3$ vamos fazer a mesma coisa

<u>Def</u>: Um <u>sistema de coordenadas</u> (linear) em $\mathbb{E}^3$ é um par

$$\Sigma = (O, \mathcal{E})$$

onde $O \in \mathbb{E}^3$ é um ponto (chamado de <u>origem</u> do sistema de coordenadas)

e $\mathcal{E} = (\vec{e}_x, \vec{e}_z, \vec{e}_3)$ é uma base de V^3

- Coordenadas de um ponto $P \in \mathbb{E}^3$ em um sistema de coord. $\Sigma = (O, \mathcal{E})$

$$P = (a,b,c)_\Sigma \iff P = O + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

$$\iff \vec{OP} = (a,b,c)_\mathcal{E}$$

- <u>Mudança</u> de <u>Coordenadas</u> (via exemplo)

Seja $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$

Sejam $A = (1,3,-2)_\Sigma$ $\left(\vec{OA} = (1,3,-2)_\mathcal{E}\right)$

$\vec{f}_1 = (1,0,2)_\mathcal{E}$, $\vec{f}_2 = (0,1,-1)_\mathcal{E}$, $\vec{f}_3 = (1,1,0)_\mathcal{E}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é base de V^3 (Exercício) e $\Lambda = (A, \mathcal{F})$ é um sistema de coord. em $\mathbb{E}^3$

$\vec{OP} = (-2,1,0)_{\mathcal{E}}$

<u>Pergunta</u>: Se $P = (-2,1,0)_{\Sigma}$ quais são as coordenadas de P no sistema de coord. Λ.

<u>Quero</u>: $P = (a,b,c)_{\Lambda}$

$\iff \vec{AP} = (a,b,c)_{\mathcal{F}}$

- $\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = -\vec{OA} + \vec{OP} =$

$$= (-1,-3,2)_{\mathcal{E}} + (-2,1,0)_{\mathcal{E}}$$

$$= (-3,-2,2)_{\mathcal{E}}$$

Queremo encontrar $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(-3,-2,2)_{\mathcal{E}} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2} + c\vec{f_3}$$

$$= a(1,0,2)_{\mathcal{E}} + b(0,1,-1)_{\mathcal{E}} + c(1,1,0)_{\mathcal{E}}$$

$$= (a,0,2a)_{\mathcal{E}} + (0,b,-b)_{\mathcal{E}} + (c,c,0)_{\mathcal{E}}$$

$$= (a+c,\ b+c,\ 2a-b)_{\mathcal{E}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c = -3 & (1) \\ b+c = -2 & (2) \\ 2a-b = 2 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow a = -3-c$

$(2) \Rightarrow b = -2-c$

$(3) \Rightarrow 2(-3-c) - (-2-c) = 2$

$\Rightarrow -4-c = 2$

$\Rightarrow c = -6$

$\Rightarrow a = 3$

$\quad\ b = 4$

$$\Rightarrow \boxed{P = (3,4,-6)_{\Lambda}}$$

OBS: Um tipo de sistema de coordenadas que será útil, são os sistemas de coordenadas ortonormais (ortogonais)

$\Sigma = (O, \mathcal{E})$ onde $\mathcal{E}$ é base O.N. de V^3

Exemplo /Aplicação

Fixe um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ e seja

$$\pi = \{ (x, y, z)_\Sigma \mid x + y - z = 0 \}$$

π é um plano

Pois escrevendo $z = x + y$ e tomando $x = \lambda$, $y = \mu$

$$\pi = \{ X \in \mathbb{E}^3 \mid X = O + \lambda (1,0,1)_\mathcal{E} + \mu (0,1,1)_\mathcal{E} \}$$
$$= \{ X \in \mathbb{E}^3 \mid X = O + (\lambda, \mu, \lambda + \mu)_\mathcal{E} \}$$

$= \{ X \in \mathbb{E}^3 \mid X = (\lambda, \mu, \lambda+\mu)_{\mathcal{E}} \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

Seja $\Lambda = (O, \mathcal{F})$
onde $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$

$\vec{f}_1 = (1, 0, 1)_{\mathcal{E}}$

$\vec{f}_2 = (0, 1, 1)_{\mathcal{E}}$

$\vec{f}_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{E}}$

Então o mesmo plano π é descrito por:

$$\pi = \{ (x, y, z)_{\Lambda} \mid z = 0 \}$$

$$= \{ (\lambda, \mu, 0)_{\Lambda} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$X = (\lambda, \mu, 0)_{\Lambda} \iff X = O + \lambda \vec{f}_1 + \mu \vec{f}_2$$

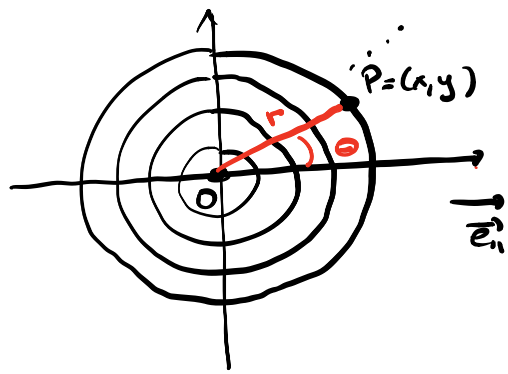
$$\iff X = O + \lambda (1, 0, 1)_{\mathcal{E}} + \mu (0, 1, 1)_{\mathcal{E}}$$

$$\iff X \in \pi$$

$\_\_\_\_\_\_ \ // \ \_\_\_\_\_\_ \ // \ \_\_\_\_\_\_$

Um pouco sobre alguns exemplos de sistemas de coordenadas "não-lineares"

① Coordenadas Polares em $\mathbb{R}^2$



$P = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ onde $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$r = d(P,O)$, θ é o ângulo entre $\vec{OP}$ e $\vec{e}_1$

Em coordenadas polares

$P = (r, \theta)$ onde $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\theta \in [0, 2\pi)$

<u>OBS</u>: Nas coordenadas usuais de $\mathbb{R}^2$

um círculo de raio R
é dado pela equação

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = R^2 \}$$

Em coordenadas polares $\left(\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \right)$

$$r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta = R^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) = R^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r = R \qquad \text{(pois ambos são } \geq 0 \text{)}$$

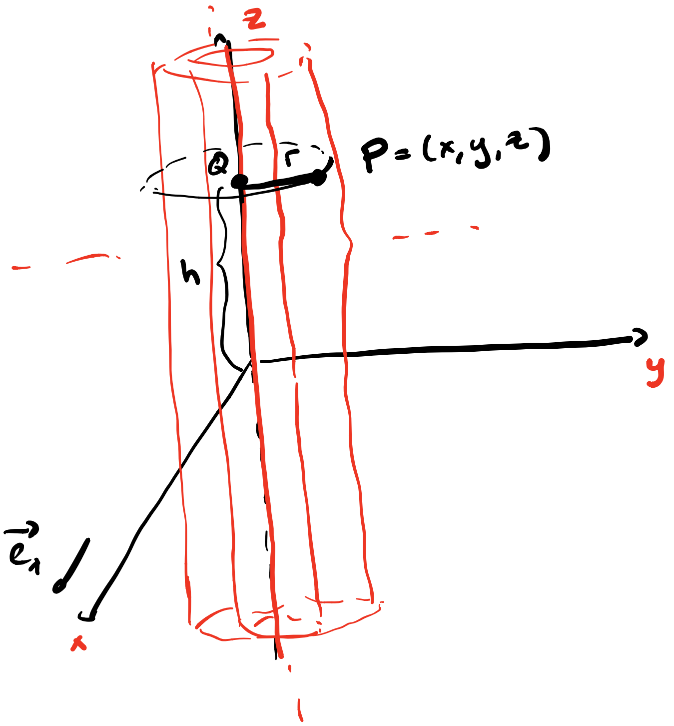
$$C = \{ (r,\theta)_P \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mid r = R \}$$

(Em coordenadas polares)

$$R_{\geq 0} = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0 \}$$

② Coordenadas Cilindricas em $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$



$P = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, h)$

$r = \|\vec{QP}\|$ onde $Q = (0, 0, h)$

θ é o ângulo entre $\vec{QP}$ e $\vec{e}_1$

$h = z$ é a <u>altura</u> do ponto

Coordenadas cilíndricas de P

$P = (r, \theta, h)_C$ onde $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
$\theta \in [0, 2\pi)$
$h \in \mathbb{R}$

Vamos ver como descrever um cilindro em $\mathbb{R}^3$ nas coordenadas usuais (cilindro de raio R)

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R \}$$

Em coordenadas cilindricas

$$C = \{ (r, \theta, h)_e \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mid r = R \}$$

<u>OBS</u>:

Uma esfera de raio R em $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}$$

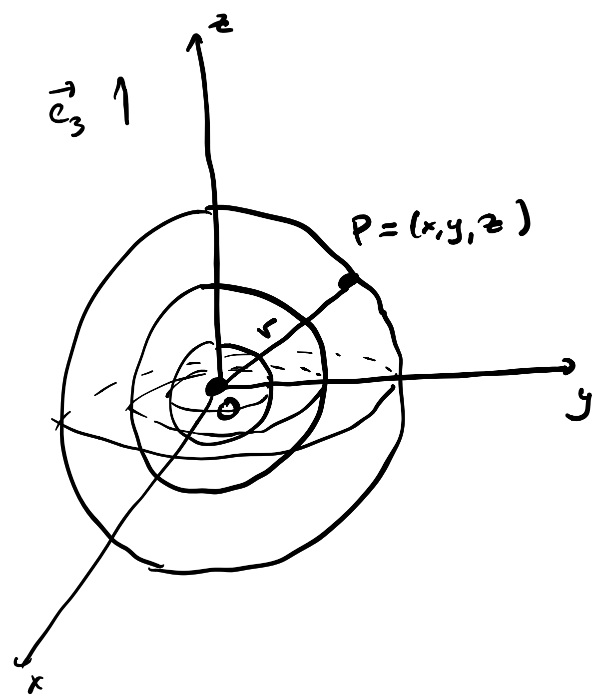
$x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$
$z = h$

$$r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta + h^2 = R^2$$

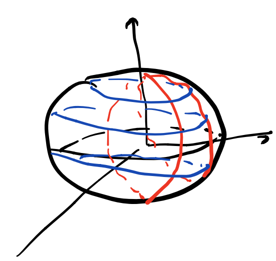
$$\iff r^2 + h^2 = R^2$$

$$S = \{ (r,\theta,h)_{\mathcal{C}} \mid r^2 + h^2 = R^2 \}$$

③ Coordenadas Esféricas em $\mathbb{R}^3$



$$P = (r\cos\theta \, \text{sen}\,\varphi \, , \; r\,\text{sen}\,\theta\, \text{sen}\,\varphi \, , \; r\cos\varphi)$$



onde $\quad r = \|\vec{OP}\|$

θ é o ângulo entre
$\vec{OP} - \text{proj}_{\vec{e}_3}\vec{OP}$ e $\vec{e}_1$

φ é o ângulo entre $\vec{OP}$ e $\vec{e}_3$

(longitude e latitude)

Coord. Esféricas de P

$P = (r, \theta, \varphi)_{\mathcal{S}}$ onde $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$\varphi \in [0, \pi]$

Esfera de raio R

$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2 \}$

$x = r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi$

$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$

$z = r\cos\varphi$

$$r^2\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = R^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)}_{r^2} \operatorname{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = R^2$$

$$\Leftrightarrow r^2\operatorname{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = R^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = R^2 \Leftrightarrow r = R \quad \begin{pmatrix} r \geq 0 \\ R \geq 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \{ (r, \theta, \varphi)_S \mid r = R \}$$