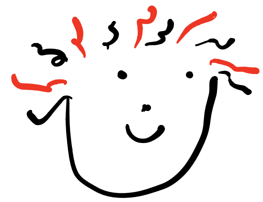
Aula 16

Bom Dia!



Lembre que

- V^3, Fixa uma orientação.
- Produto vetorial:

Área do Paralelogramo gerado por $\vec{u}, \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{cases} \to \text{Norma: } \quad \underbrace{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta \\ \to \text{Direção: } \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u} \,, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v} \\ \to \text{Sentido: } \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ é base positiva}^{*} \text{ de } V^3 \end{cases}$$

* $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \iff \vec{u}, \vec{v}$ L.I. e nesse caso $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base de V^3.

- Em coordenadas numa base O.N. positiva $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{u} = (a, b, c)_E$

$\vec{v} = (x, y, z)_E$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} = (bz - cy, \, cx - az, \, ay - bx)_E$$

Exemplo/ Exercício deixado na última Aula

(Exercício 12(c) da Lista) (orientação fixada em V^3)

$\vec{u}, \vec{v}$ L.I. Determine a orientação da seguinte base:

$$E = \Big(\underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u}}_{\vec{e}_1}, \underbrace{\vec{u} \wedge \vec{v}}_{\vec{e}_2}, \underbrace{\vec{u}}_{\vec{e}_3} \Big)$$

Sejam
$$\vec{a} = \vec{v} \wedge \vec{u}$$
$$\vec{b} = \vec{u}$$
$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$\Rightarrow$ $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é uma base positiva de V^3

Escrevemos as coordenadas dos vetores da base E em termos da base B

$$\vec{e}_1 = \vec{c} = 0 \cdot \vec{a} + 0\vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = (0,0,1)_B$$
$$\vec{e}_2 = \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{a} = -\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} = (-1,0,0)_B$$
$$\vec{e}_3 = \vec{u} = \vec{b} = (0,1,0)_B$$

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{e}_{1B} & \vec{e}_{2B} & \vec{e}_{3B} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Det} M_{BE} = -1 < 0 \Rightarrow E$ é base negativa ∎

Produto Misto: (orientação fixada em V^3)

$$[\cdot, \cdot, \cdot] : V^3 \times V^3 \times V^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle}$$

- Em coordenadas:

Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base O.N. Positiva de V^3 e

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$= u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

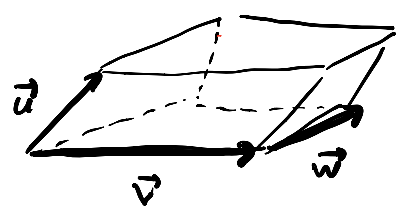
Demonstração da fórmula em coordenadas:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) +$$
$$+ u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) \qquad \blacksquare$$

Interpretação Geométrica

$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| =$ Volume do Paralelepido gerado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$



Dem: $\mathrm{Vol}(P) = A_{base} \cdot h$

$A_{base} = \| \vec{v} \wedge \vec{w} \|$

$h = \| \mathrm{proj}_{\vec{v} \wedge \vec{w}} \vec{u} \|$ $\qquad \left(\vec{v} \wedge \vec{w} \perp \text{plano}(\vec{v}, \vec{w}) \right)$

$$\mathrm{Vol}(P) = \| \vec{v} \wedge \vec{w} \| \left\| \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle}{\| \vec{v} \wedge \vec{w} \|^2} \vec{v} \wedge \vec{w} \right\|$$

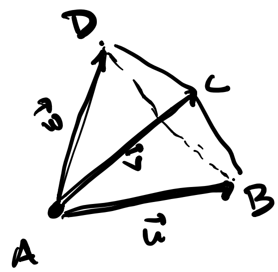
$$= \| \vec{v} \wedge \vec{w} \| \cdot \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle|}{\cancel{\| \vec{v} \wedge \vec{w} \|^2}} \cancel{\| \vec{v} \wedge \vec{w} \|} = |\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle|$$

$$= |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \blacksquare$$

OBS: Volume do Tetraedro =

$= \frac{1}{6} \left| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right|$

(Mostre que com 6 tetraedros vc forma o paralelepípedo!)



OBS: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.I. $\iff [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$

Propriedades:

① Multilinear (trilinear)

$[\vec{u}+\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}]$

$[\vec{u}, \vec{v}+\vec{a}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{a}, \vec{w}]$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}+\vec{a}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}]$

$[\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}] =$

$= \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

② Alternado

Se vc troca a posição de 2 dos três vetores (mantém o outro fixo) $\Rightarrow$ muda o sinal

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$$
$$= -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$$
$$= -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

OBS: $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

③ Se $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base O.N. Positiva de V^3 $\Rightarrow$ $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = 1$

OBS: A melhor definição do determinante de uma matriz $n \times n$ é uma função

$$D : \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{Matrizes} \\ n \times n}}{\mathcal{M}_{n \times n}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz

- D é multi-linear nas linhas da matriz
- D é alternada nas linhas da matriz
- $D\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$

Exemplo / Exercício 13 da lista 3

Sabendo que a área do paralelogramo gerado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é 1 calcule o volume do paralelepípedo gerado por

$$\vec{v}-\vec{w}, \quad \vec{v}+2\vec{w}, \quad (\vec{v}+\vec{w})\wedge(\vec{v}-\vec{w})$$

Queremos calcular

$$V(P) = \left| [\vec{v}-\vec{w}, \vec{v}+2\vec{w}, (\vec{v}+\vec{w})\wedge(\vec{v}-\vec{w})] \right|$$

Simplificando:

$$(\vec{v}+\vec{w})\wedge(\vec{v}-\vec{w}) = \cancel{\vec{v}\wedge\vec{v}} + \vec{w}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge(-\vec{w}) + \cancel{\vec{w}\wedge(-\vec{w})}$$

$$= -2\,\vec{v}\wedge\vec{w}$$

$\Rightarrow$

$$[\vec{v}-\vec{w},\ \vec{v}+2\vec{w},\ (\vec{v}+\vec{w})\wedge(\vec{v}-\vec{w})] =$$

$$= [\vec{v}-\vec{w},\ \vec{v}+2\vec{w},\ -2\vec{v}\wedge\vec{w}]$$

$$= [\vec{v},\ \vec{v}+2\vec{w},\ -2\vec{v}\wedge\vec{w}] - [\vec{w},\ \vec{v}+2\vec{w},\ -2\vec{v}\wedge\vec{w}]$$

$$= \cancel{[\vec{v},\ \vec{v},\ -2\vec{v}\wedge\vec{w}]} + 2[\vec{v},\vec{w},-2\vec{v}\wedge\vec{w}]$$

$$- [\vec{w},\vec{v},-2\vec{v}\wedge\vec{w}] - \cancel{2[\vec{w},\vec{w},-2\vec{v}\wedge\vec{w}]} = \circledast$$

Note que $[\vec{v},\vec{v},\vec{a}] = 0$

Pois trocando a ordem de $\vec{v}$ com $\vec{v}$

$$[\vec{v},\vec{v},\vec{a}] = -[\vec{v},\vec{v},\vec{a}]$$

$$\Rightarrow [\vec{v},\vec{v},\vec{a}] = 0$$

$$\circledast = 2[\vec{v}, \vec{w}, -2\vec{v}\wedge\vec{w}] + [\vec{v}, \vec{w}, -2\vec{v}\wedge\vec{w}]$$

$$= -4 \; [\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}\wedge\vec{w}] - 2 \; [\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}\wedge\vec{w}]$$

$$= -6 [\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}\wedge\vec{w}]$$

$$= 6 [\vec{v}, \vec{v}\wedge\vec{w}, \vec{w}] = -6 [\vec{v}\wedge\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$= -6 \langle \vec{v}\wedge\vec{w}, \vec{v}\wedge\vec{w} \rangle$$

$$= -6 \, \|\vec{v}\wedge\vec{w}\|^2$$

$$= -6$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Vol}(P) = |-6| = 6}$$