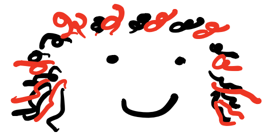
Aula Teórica 15

Bom Dia!



Lembre que:

- V^3, Fixa uma orientação.
- Produto vetorial:

Área do Paralelogramo gerado por $\vec{u}, \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{cases} \to \text{Norma: } \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta \\ \to \text{Direção: } \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v} \\ \to \text{Sentido: } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ é base positiva}^* \text{ de } V^3 \end{cases}$$

* $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \iff \vec{u}, \vec{v}$ L.I. e nesse caso $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base de V^3.

- Em coordenadas numa base O.N. positiva $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{u} = (a, b, c)_E$

$\vec{v} = (x, y, z)_E$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} = (bz - cy, cx - az, ay - bx)_E$$

Exemplo: Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ON positiva de V^3 e sejam

$\vec{u} = (2, -1, 1)_E$

$\vec{v} = (1, 0, 2)_E$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\vec{e}_1 \, (-2) - \vec{e}_2 \, (4-1) + \vec{e}_3 \, (1) =$$

$$= -2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (-2, -3, 1)_E$$

Propriedades do PRODUTO VETORIAL

$$\wedge : V^3 \times V^3 \longrightarrow V^3$$

① $\wedge$ é bilinear

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{w}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{v}$$

$$(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$$

② $\wedge$ é anti-simétrico (alternado)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = - \vec{v} \wedge \vec{u}$$

(3) $\wedge$ é não degenerado

Dado $\vec{u} \neq 0$ existe $\vec{v} \in V^3$ tal que $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$

(4) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}, \vec{v}$ são L.D.

(consequência de (1) e (2))

OBS: Vamos mostra que qualquer produto que satisfaça (1) e (2), satisfaz a seguinte afirmação: $\vec{u}, \vec{v}$ L.D. $\Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Suponha que $\vec{u}, \vec{v}$ são L.D.

$\Rightarrow \exists \; a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ tais que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$

Vamos supor que $b \neq 0$ (caso $b = 0$ faça o mesmo argumento abaixo trocando os papéis de $\vec{u}$ e $\vec{v}$)

$$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{a}{b}\vec{u} = \lambda \vec{u}$$

Logo,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda \vec{u} \overset{(1)}{=} \lambda (\vec{u} \wedge \vec{u}) = \lambda \vec{0} = \vec{0}$$

Mas note que $\quad \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

$$\vec{u} \wedge \vec{u} \underset{(2)}{=} - \vec{u} \wedge \vec{u} \Rightarrow$$

(2) (troca a ordem de $\vec{u}$ com $\vec{u}$)

$\blacksquare$

<u>OBS</u>: O produto vetorial satisfaz mais uma propriedade importante que é a identidade de Jacobi

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$$

Equivalente:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

<u>Exemplo</u>: Considere uma orientação fixada em V^3.

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ L.I.

Determine se as seguintes bases são positivas ou negativas

(a) $$E = \left(\overset{\vec{e}_1}{\vec{u}\wedge\vec{v}},\ \overset{\vec{e}_2}{\vec{u}},\ \overset{\vec{e}_3}{(\vec{u}+2\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})+\vec{v}}\right)$$

(b) $$E = \left((\vec{v}\wedge\vec{u})\wedge\vec{u},\ \vec{u}\wedge\vec{v},\ \vec{u}\right)$$

Sabemos que a base

$$B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v})$$ é positiva

(a) Vamos achar as coordenadas dos vetores da base E na base B (para poder escrever a matriz de mudança de base

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{e}_{1\,B} & \vec{e}_{2\,B} & \vec{e}_{3\,B} \\ | & | & | \end{pmatrix})$$

$\vec{e}_1$ na base B:

$$\vec{e}_1 = \vec{u} \wedge \vec{v} = 0\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + 1 \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = (0,0,1)_B$$

$$\vec{e}_2 = \vec{u} = 1 \cdot \vec{u} + 0\,\vec{v} + 0 \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = (1,0,0)_B$$

$$\begin{aligned}
\vec{e}_3 &= (\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} \\
&= \cancel{\vec{u} \wedge \vec{u}} + \vec{u} \wedge (-\vec{v}) + (2\vec{v}) \wedge \vec{u} + \cancel{2\vec{v} \wedge (-\vec{v})} + \vec{v} \\
&= -\vec{u} \wedge \vec{v} + 2(\vec{v} \wedge \vec{u}) + \vec{v} \\
&= -3\,\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \\
&= 0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} + -3 \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} \\
&= (0, 1, -3)_B
\end{aligned}$$

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } M_{BE} = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ E é base positiva