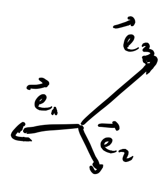
Aula Téorica 14

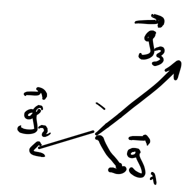
Bom Dia

Lembre que

Em V^3 existem dois tipos de bases:



BASE DESTRA



BASE SINISTRA

- Matriz de Mudança de Base

Sejam $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ base de V^3

- Podemos escrever os vetores da base $\mathcal{E}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{F}$

$$\vec{e}_1 = a_{11}\vec{f}_1 + a_{21}\vec{f}_2 + a_{31}\vec{f}_3 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})_{\mathcal{F}}$$

$$\vec{e}_2 = a_{12}\vec{f}_1 + a_{22}\vec{f}_2 + a_{32}\vec{f}_3 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})_{\mathcal{F}}$$

$$\vec{e}_3 = a_{13}\vec{f}_1 + a_{23}\vec{f}_2 + a_{33}\vec{f}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})_{\mathcal{F}}$$

A <u>Matriz</u> <u>de</u> <u>mudança</u> <u>de</u> <u>base</u> da base $\mathcal{E}$ para a base $\mathcal{F}$ é a matriz

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

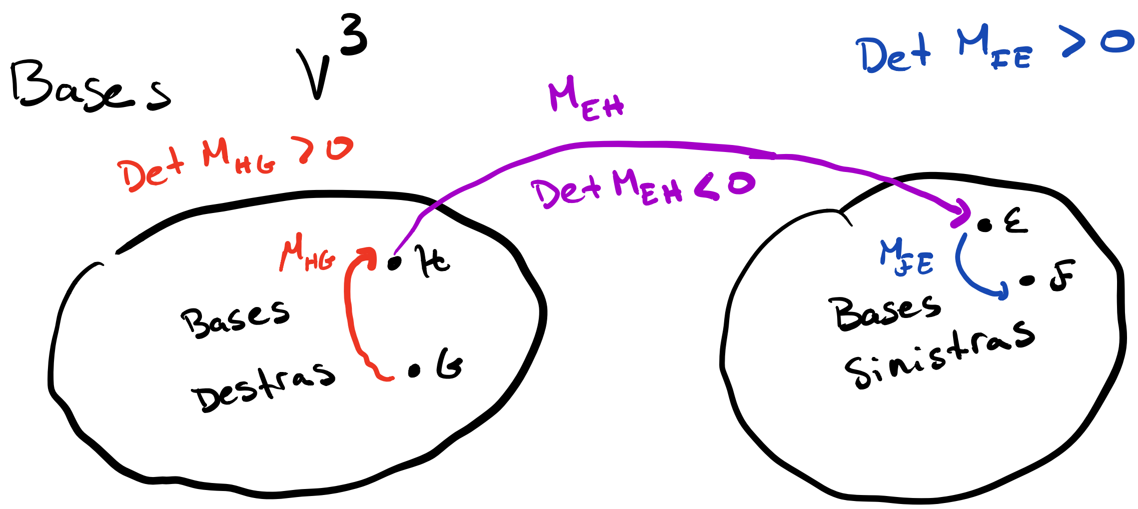
$$= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{e}_{1\mathcal{F}} & \vec{e}_{2\mathcal{F}} & \vec{e}_{3\mathcal{F}} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Notação

<u>Definição</u>: • Dizemos que $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ determinam a <u>mesma</u> <u>orientação</u>

de V^3 se $\text{Det}\, M_{\mathcal{FE}} > 0$

- Quando $\text{Det}\, M_{\mathcal{FE}} < 0$ dizemos que $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ determinam orientações opostas



As bases de V^3 ficam separadas em duas classes: Bases da mesma classe são as que satisfaz

$$\text{Det}\, M_{\mathcal{FE}} > 0$$

Def: Uma orientação em V^3 é a escolha de uma dessas classes como sendo positiva

OBS: • Uma base de V^3 determina uma orientação em V^3.

• Outra base pode determinar a mesma orientação

• Duas bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ determinam a mesma orientação de V^3 se $\operatorname{Det} M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} > 0$

• Fixada uma orientação, dizemos que uma base é positiva se ela determina a mesma orientação da orientação fixada. Caso contrário a base é negativa

Exemplo

Seja $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$

onde

$$\vec{e}_1 = \vec{f}_2, \quad \vec{e}_2 = \vec{f}_1, \quad \vec{e}_3 = \vec{f}_3$$

$\vec{e}_1 = (0,1,0)_{\mathcal{F}}$

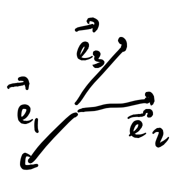
$\vec{e}_2 = (1,0,0)_{\mathcal{F}}$

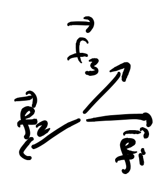
$\vec{e}_3 = (0,0,1)_{\mathcal{F}}$

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det} M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ determinam orientações opostas





Produto Vetorial em V^3

Fixe uma orientação em V^3 (Escolha)

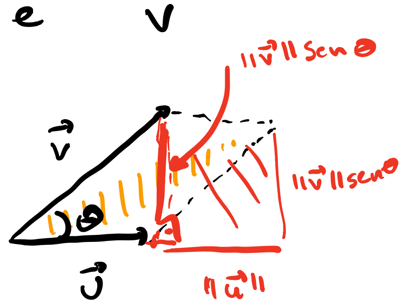
Definição Conceitual do Produto Vetorial:

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, o produto vetorial de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é um vetor de V^3 denotado por

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ou $\vec{u} \times \vec{v}$)

Definida por:

- Módulo de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$



$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$

(OBS: Em particular, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}$ são L.D.)

Logo se $\vec{u}, \vec{v}$ L.D. $\Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Suponha agora $\vec{u}, \vec{v}$ L.I.

<u>Direção de $\vec{u} \wedge \vec{v}$</u>: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor perpendicular ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

($\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$)

<u>Sentido de $\vec{u} \wedge \vec{v}$</u>: O sentido da $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é tal que a base

$B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é positiva

(para a orientação que fixamos)

<u>Definição em Coordenadas</u>

Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma <u>base O.N.</u>

Positiva de V^3

Seja $\vec{u} = (a, b, c)_E$, $\vec{v} = (x, y, z)_E$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \underbrace{\mathrm{Det} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}}_{\text{Notação para a expressão seguinte}} =$$

$$= \mathrm{Det} \begin{pmatrix} b & c \\ y & z \end{pmatrix} \vec{e}_1 - \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a & c \\ x & z \end{pmatrix} \vec{e}_2$$

$$+ \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \vec{e}_3$$

$$= \boxed{(bz - cy, \; cx - az, \; ay - bx)_E}$$

CUIDADO! ESSA FÓRMULA SÓ VALE SE E for BASE

O.N. POSITIVA

Vamos ver que as duas definições coincidem:

Precisamos mostra que se

$$\vec{u} = (a, b, c)_E \ , \quad \vec{v} = (x, y, z)_E$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (bz - cy, cx - az, ay - bx)_E$$

onde E é base O.N. positiva

Então

① $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta$

② $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

③ $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base positiva ($\vec{u}, \vec{v}$ L.I.)

(1) Vou mostrar que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Como $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2}$

Quero

$$\Rightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$$

Agora é só conta

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (bz - cy)^2 + (cx - ay)^2 + (ay - bz)^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2$$

FAÇAM A CONTA e vejam que são iguais.

(2) $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle (bz - cy, cx - az, ay - bx), (a, b, c) \rangle$$

$$= a(\cancel{bz} - \cancel{cy}) + b(\cancel{cx} - \cancel{az}) + c(\cancel{ay} - \cancel{bx}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$$

FAÇAM A CONTA PARA MOSTRAR QUE $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$

③ $\vec{u} = (a, b, c)_E$

$\vec{v} = (x, y, z)_E$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (bz - cy, \; cx - az, \; ay - bx)_E$

Quero mostrar que $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é base positiva

$$M_{EB} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{u}_E & \vec{v}_E & \vec{u} \wedge \vec{v}_E \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & x & bz - cy \\ b & y & cx - az \\ c & z & ay - bx \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det} M_{EB} = (ay-bx)^2 + (cx-az)^2 + (bz-cy)^2 \geq 0$$

e $\operatorname{Det} M_{EB} = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}$ L.D.

Ou seja se $\vec{u}, \vec{v}$ L.I.

então $\operatorname{Det} M_{EB} > 0$

$\Rightarrow$ orientação de B coincide com a orientação de E (positiva)

$\Rightarrow$ B é base positiva.