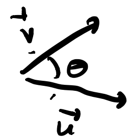
Aula Teórica 13

BOM DIA!

Lembre que:

- Produto escalar (interno) de V^3

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$$



- Base O.N. de V^3:

  $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ Base tal que

  - $\|\vec{f_i}\| = 1 \quad \forall i \in \{1,2,3\}$
  - $\underbrace{\langle \vec{f_i}, \vec{f_j} \rangle}_{\vec{f_i} \perp \vec{f_j}} = 0 \quad \forall i \neq j, \quad i,j \in \{1,2,3\}$

- Se $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é base O.N. e

  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{F}}$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{F}}$

$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

<u>Propriedades</u>: $\langle \cdot , \cdot \rangle : V^3 \times V^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

(i) $\langle \cdot , \cdot \rangle$ é uma forma bilinear

- $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$
- $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

- $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle$

(ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é simétrico:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

(iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não-degenerado:

$\forall \vec{u} \neq \vec{0}$, $\exists\, \vec{v} \in V^3$ tal que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \neq 0$

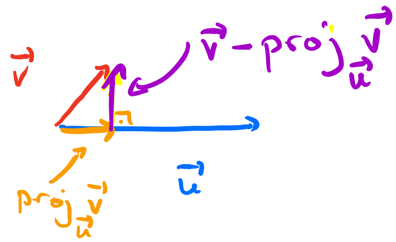
(iv) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positivo definido

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ e $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

- Projeção ortogonal de $\vec{v}$ em $\vec{u} \neq \vec{0}$

$\rightarrow$ $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} \parallel \vec{u}$

$\rightarrow$ $\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} \perp \vec{u}$



$$\boxed{\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\, \vec{u}}$$

- Seja $\pi: X = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v}$ L.I.

Podemos descrever o mesmo plano usando vetores diretores que são O.N.

$\pi' : X = P + \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2 \, , \quad \|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = 1$

$\pi = \pi'$

Construção

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad , \quad \vec{f}_2 = \frac{\vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{f}_1} \vec{v}}{\|\vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{f}_1} \vec{v}\|}$$

Na aula 11 já vimos que

$\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2 \quad$ e $\quad \|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = 1$

Faltou mostrar que $\pi = \pi'$

<u>OBS</u>: $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ são L.I. (veja o exercício 5 da lista 3)

$\Rightarrow \pi'$ é plano

Para mostrar que $\pi = \pi'$ basta mostrar que $\pi' \subset \pi$

Seja $\quad X \in \pi'$

$$\Rightarrow \quad X = P + \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 = P + \frac{\alpha}{\|\vec{u}\|}\vec{u} + \beta \vec{f}_2 = \circledast$$

Note que

$$\vec{f}_2 = \frac{\vec{v} - \operatorname{proj}_{\vec{f}_1}\vec{v}}{\underbrace{\|\vec{v} - \operatorname{proj}_{\vec{f}_1}\vec{v}\|}_{r}} = \frac{1}{r}\left(\vec{v} - \operatorname{proj}_{\vec{f}_1}\vec{v}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\vec{v} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{f}_1\rangle}{\underbrace{\|\vec{f}_1\|^2}_{=1}}\vec{f}_1\right) = \frac{1}{r}\left(\vec{v} - \underbrace{\frac{\langle v, \vec{f}_1\rangle}{\|\vec{u}\|}}_{s}\vec{u}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\vec{v} - \frac{s}{r}\vec{u}$$

Logo, $\quad \circledast = P + \left(\frac{\alpha}{\|\vec{u}\|} - \frac{\beta s}{r}\right)\vec{u} + \frac{\beta}{r}\vec{v}$

$$= P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

$\Rightarrow \quad X \in \pi$. $\qquad$ Logo, $\quad \pi' \subset \pi \;\Rightarrow\; \pi' = \pi$ ∎

Método de Gram-Schmidt

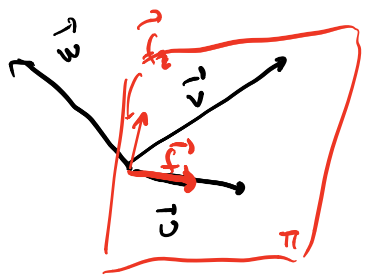
(Exercício 6 da Lista 3)

O objetivo do método de Gram-shmidt é obter a partir de uma base $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma outra base $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ tal que F é uma base ON que satisfaz:

① $\vec{f_1}$ tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$

② $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ são (cada um deles) combinação lineares de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

③ $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ determina a mesma orientação de V^3 que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$



3

$\vec{f_3}$ está "do mesmo lado de fora do plano que $\vec{w}$"

<u>Construção</u>

$$\vec{f_1} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad , \qquad \vec{f_2} = \frac{\vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{f_1}}\vec{v}}{\|\vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{f_1}}\vec{v}\|}$$

$$\vec{f_3} = \frac{\vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{f_1}}\vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{f_2}}\vec{w}}{\|\vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{f_1}}\vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{f_2}}\vec{w}\|}$$

Exercício 6 da lista 3 é demonstrar que $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é O.N.

OBS: $\quad \vec{f}_1 = \lambda \vec{u} \qquad \lambda > 0$

$$\operatorname{proj}_{\vec{f}_1} \vec{v} = \operatorname{proj}_{\lambda \vec{u}} \vec{v} = \frac{\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\| \lambda \vec{u} \|^2} \lambda \vec{u}$$

$$= \frac{\cancel{\lambda^2}}{\cancel{\lambda^2}} \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\| \vec{u} \|^2} \vec{u} = \operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$$

OBS: $\quad \vec{g}_3 = \vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{f}_1} \vec{w}$

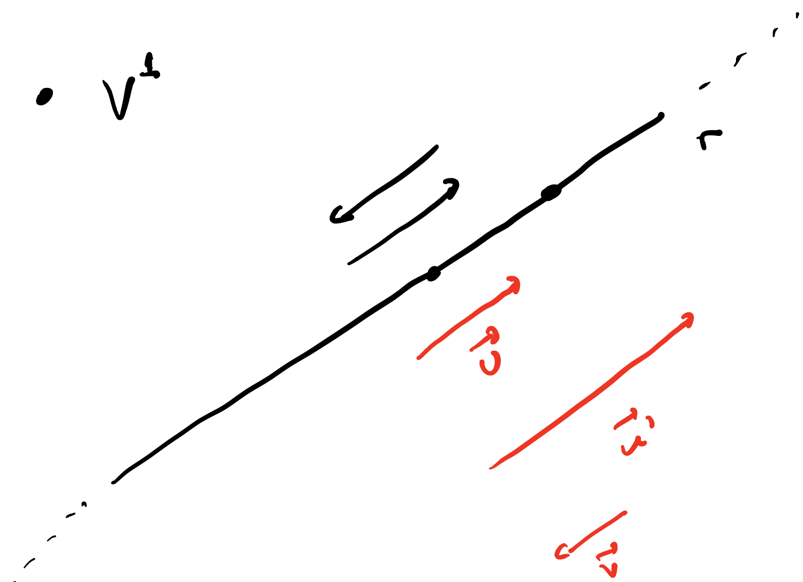
$$\vec{h}_3 = \vec{g}_3 - \operatorname{proj}_{\vec{f}_2} \vec{g}_3 =$$

$$= \vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{f}_1} \vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{f}_2} \left(\vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{f}_1} \vec{w} \right)$$

$$= \vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{f}_1} \vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{f}_2} \vec{w} + \overset{0}{\underbrace{\operatorname{proj}_{\vec{f}_2} \Big(\underbrace{\operatorname{proj}_{\vec{f}_1} \vec{w}}_{= \lambda \vec{f}_1} \Big)}_{\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2}}$$

Orientação "Intuitiva"

- V^1



Uma orientação na reta é a escolha de um sentido para a reta

Como isso é feito?

- Fixa um vetor não nulo paralelo à reta (base de V^1)

- Dois vetores diferentes podem induzir a mesma orientação na reta ou orientações opostas dependo do sentido dos vetores

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ induzem a mesma orientação em r

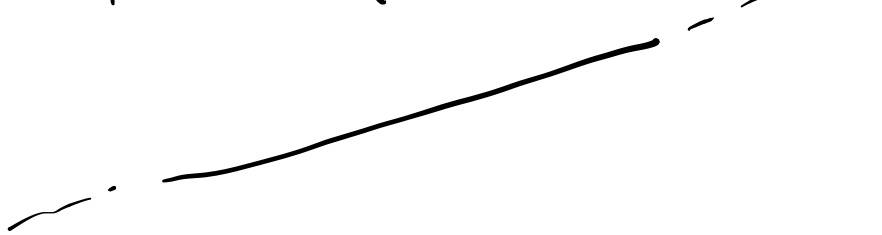
$$\iff \quad \vec{u} = \lambda \vec{v} \quad \text{com} \quad \lambda > 0$$

- Se $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ com $\lambda < 0$ então induzem orientações opostas em r

Pensando em Física

Suponha que

r



representa o tempo

Escolher uma orientação é determinar para qual lado aponta o futuro e qual lado aponta o passado

Pelo menos 3 formas de fazer isso:

1. Orientação Psicológica do tempo

Lembro do passado mas não do futuro

② Orientação cosmológica do tempo

Tempo orientado no sentido da expansão do universo

③ Orientação Termodinâmica do tempo

Tempo orientado no sentido do aumento da entropia

- V^2

Num plano temos duas orientações possíveis:

sentido Horário $\circlearrowright$

sentido anti-horário $\circlearrowleft$

Escolher uma orientação no plano é escolher um desses dois como sendo positivo

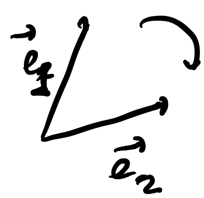
Como isso é feito?

geram o plano

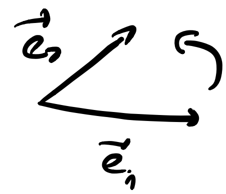
Escolhe vetores L.I. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Base de V^2

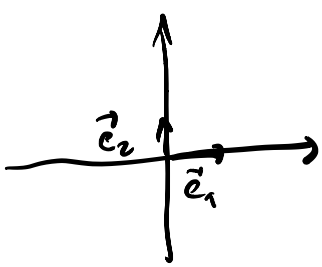
Sentido Horário



Sentido Anti-horário



Exemplo



O sentido do plano $\mathbb{R}^2$ com sua base canônica é o sentido anti-horário

<u>OBS/Brincadeira</u>

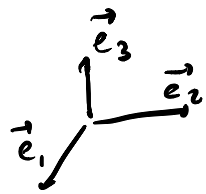
Vou mostrar pq a Faixa de Möbius Não é orientável

(Posto o link no Moodle)

- V^3

Dois tipos de Base

Bases Destras



Bases Sinistras
(canhota)