Aula Teórica 12

Bom Dia!

O Espaço de Minkowski e Relatividade Especial

- M^4 espaço de Minkowski

→ Espaço de Dimensão 4 $(\mathbb{R}^4)$

→ V^4 vetores em M^4

→ Produto Interno de Minkowski em V^4

$$\boxed{\begin{aligned}&\langle (u_0, u_1, u_2, u_3), (v_0, v_1, v_2, v_3) \rangle = \\ &= u_0 v_0 - u_1 v_1 - u_2 v_2 - u_3 v_3\end{aligned}}$$

- 3 tipos de vetores:

→ vetor tipo tempo: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$

→ vetor tipo luz: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$

→ vetor tipo espaço: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle < 0$

__Exemplos__:

(i) $\vec{u} = (2,1,0,-1)$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 2^2 - 1^2 - 0^2 - (-1)^2 = 2 > 0$$

Tipo Tempo

(ii) $\vec{u} = (2, \sqrt{2}, 1, 1)$

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 4 - 2 - 1 - 1 = 0$ Tipo Luz

(iii) $\vec{u} = (1,1,1,1)$

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 - 1 - 1 - 1 = -3$ Tipo espaço

Vamos Falar de Física:

a) Pontos em M^4

- Um ponto em M^4 é um "evento" localizado no espaço-tempo
    - Emissão de foton
    - colisão de particulas
- A origem de um sistema de coordenadas

em M^4 é um evento que acontece "aqui e agora" para algum observador

b) Unidades de Medidas

- Física Clássica (Newton) $\begin{cases} \to \text{Temporal} \\ \to \text{Espacial} \end{cases}$

- Relatividade: Princípio: Velocidade da luz é constante c

  - Unidade de Tempo está relacionada à unidade de espaço

$$\ell_0 = c\, t_0$$

  - $\|\text{velocidade}\| = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \lambda c$ onde $0 \leq \lambda \leq 1$

Na matemática usamos unidades "geométricas" onde $c = 1$

c) Intervalos no Espaço Tempo

$P, Q \in M^4$, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ é o quadrado do intervalo espaço-temporal entre P e Q.

→ Positivo : Intervalo tipo temporal

→ Nulo : Intervalo tipo Luz

→ Negativo : Intervalo tipo espacial

d) World Line (Linha do universo) de observador

$$L \subset M^4 \quad \text{Reta tipo tempo}$$

$$L = \{ P_0 + \lambda \vec{l} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$\vec{l}$ vetor tipo tempo

- Pense por exemplo em eventos que ocorrem em uma nave espacial viajando em velocidade constante longe das estrelas

• Se dois eventos ocorrem em L

$$P_1 = P_0 + \lambda_1 \vec{\ell}$$

$$P_2 = P_0 + \lambda_2 \vec{\ell}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, \vec{\ell}$$

$$\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \langle \vec{\ell}, \vec{\ell} \rangle$$

$$\| \overrightarrow{P_1P_2} \| = |\lambda_2 - \lambda_1| \, \| \vec{\ell} \|$$

Tempo medido entre os eventos P_1 & P_2 por um observador em L (o relógio se move junto)

e) Eventos simultâneos (Espaço de um observador)

L é a linha do universo de um observador

$$\mathbb{E}_L = Q + L^{\perp} = \{ Q + \vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{\ell} \rangle = 0 \}$$

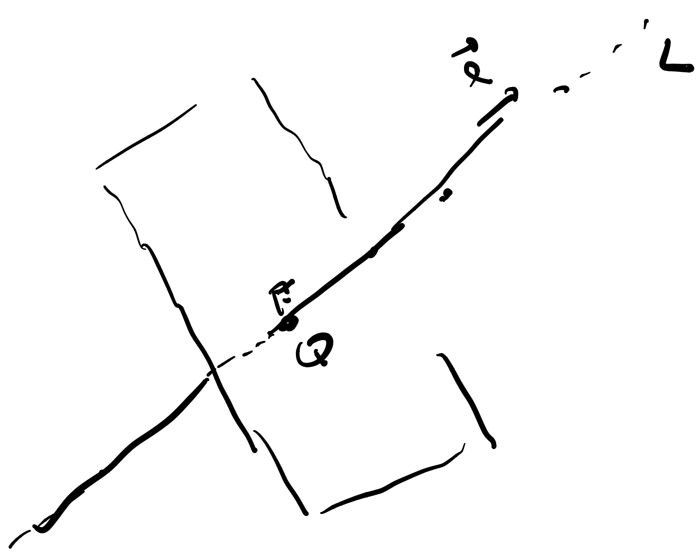
$Q \in L$

- $\mathbb{E}_L$ é um espaço de dimensão 3
- "Tipo espaço"

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0 \qquad \forall \vec{v} \parallel \mathbb{E}_L$$
$$(\vec{v} \perp \vec{\ell})$$

- $-\langle\, , \rangle\big|_{\mathbb{E}_L}$ é um produto escalar Euclideana em $\mathbb{E}_L$

Interpretação: O que acontece em $\mathbb{E}_L$ são eventos simultâneos à Q para o observador em L



<u>Exemplo</u>: Em coordenada (t, x, y, z) de $\mathbb{R}^4$

Suponha que $\vec{\ell} = (1, 0, 0, 0)$

$\langle \vec{\ell}, \vec{\ell} \rangle = 1 > 0$ tipo tempo

$L = \{ O + t\vec{\ell} \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ (t, 0, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R} \}$

Seja $Q \in L$ o ponto

$(2, 0, 0, 0)$

$$\mathbb{E}_L = \{ Q + \vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{\ell} \rangle = 0 \}$$
$$= \{ (2, x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

$\langle (a, b, c, d), (2, 0, 0, 0) \rangle = 2a$

$\Rightarrow (a, b, c, d) \perp (2, 0, 0, 0) \iff a = 0$

$\mathbb{E}_L = \{ Q + (0, b, c, d) \mid b, c, d \in \mathbb{R} \}$

f) Sistema de Coordenadas Inerciais

$L \subset M^4$ linha do universo

$\vec{e}_0 \parallel L$ um vetor unitário

$\langle \vec{e}_0, \vec{e}_0 \rangle = 1$

$$L = \{ O + t\,\vec{e}_0 \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$O \in L$

Um sistema de coordenadas inerciais par o observador em L

é $\Sigma = (O, B)$ onde B

é uma base de V^4

tal que

$$B = (\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$

$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = -1 \quad \forall i \in \{1,2,3\}$

Dado $X \in M^4$

Considere $\vec{OX} = (x_0, x_1, x_2, x_3)_B$

$\vec{OY} = (y_0, y_1, y_2, y_3)_B$

$$\langle \vec{OX}, \vec{OY} \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

- Dado $X \in M^4$ ⇝ Intervalo espaço-temporal entre X e a origem

$$\langle \vec{OX}, \vec{OX} \rangle^{1/2} = \sqrt{t_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

(unidades espaciais $x_0 = c\, t_0$ $(c=1)$

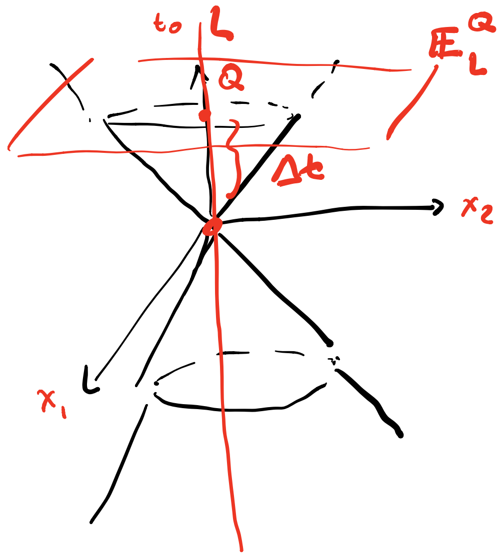
Só tem significado físico se

$$t_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0$$

Quando $t_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$\Rightarrow \vec{OX}$ é tipo luz

$$C = \{ x \in M^4 \mid \langle \vec{OX}, \vec{OX} \rangle = 0$$



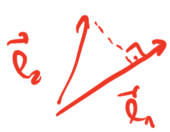
Voltar um pouco p/ matemática

Desigualdade de Cauchy-Schwartz Reversa

Sejam $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ vetores tipo tempo

tais que $\langle \vec{l}_1, \vec{l}_2 \rangle > 0$

$\Updownarrow$

(

$proj_{\vec{l}_1} \vec{l}_2$ tem mesmo sentido que $\vec{l}_1$)

Então

$$\langle \vec{l}_1, \vec{l}_2 \rangle^2 \geqslant \|\vec{l}_1\|^2 \|\vec{l}_2\|^2$$

<u>Dem</u>: Vamos decompor $\vec{l}_2$ como

$$\vec{l}_2 = \vec{l}_2^{\,\parallel} + \vec{l}_2^{\,\perp} \quad \text{onde}$$

$$\vec{l}_2^{\,\parallel} = \operatorname{proj}_{\vec{l}_1} \vec{l}_2$$

$$= \underbrace{\frac{\langle \vec{l}_2, \vec{l}_1 \rangle}{\|\vec{l}_1\|^2}}_{=\lambda} \vec{l}_1 \qquad (\parallel \vec{l}_1)$$

$$\vec{l}_2^{\,\perp} = \vec{l}_2 - \operatorname{proj}_{\vec{l}_1} \vec{l}_2 \qquad (\perp \vec{l}_1)$$

$$\langle \vec{l}_1, \vec{l}_2 \rangle^2 = \langle \vec{l}_1, \vec{l}_2^{\,\parallel} + \vec{l}_2^{\,\perp} \rangle^2 = \Big(\langle \vec{l}_1, \vec{l}_2^{\,\parallel} \rangle + \underbrace{\cancel{\langle \vec{l}_1, \vec{l}_2^{\,\perp} \rangle}}_{0} \Big)^2$$

$$= \langle \vec{l}_1, \vec{l}_2^{\,\parallel} \rangle^2 = \langle \vec{l}_1, \lambda \vec{l}_1 \rangle^2 =$$

$$= \lambda^2 \langle \vec{l}_1, \vec{l}_1 \rangle^2$$

Note que:

$$\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_2^{\parallel} + \vec{e}_2^{\perp}, \vec{e}_2^{\parallel} + \vec{e}_2^{\perp} \rangle$$

$$= \langle \vec{e}_2^{\parallel}, \vec{e}_2^{\parallel} \rangle + \cancelto{0}{2 \langle \vec{e}_2^{\parallel}, \vec{e}_2^{\perp} \rangle} + \langle \vec{e}_2^{\perp}, \vec{e}_2^{\perp} \rangle$$

$$= \lambda^2 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + \underbrace{\langle \vec{e}_2^{\perp}, \vec{e}_2^{\perp} \rangle}_{<0}$$

pois $\vec{e}_2^{\perp}$ é tipo espaço

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \lambda^2 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle^2 = \underbrace{\lambda^2 \langle e_1, e_1 \rangle} \langle e_1, e_1 \rangle$$

$$= \left(\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle - \langle \vec{e}_2^{\perp}, \vec{e}_2^{\perp} \rangle \right) \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle$$

$$= \|\vec{e}_2\|^2 \|\vec{e}_1\|^2 - \underbrace{\langle \vec{e}_2^{\perp}, \vec{e}_2^{\perp} \rangle \|\vec{e}_1\|^2}_{>0}$$

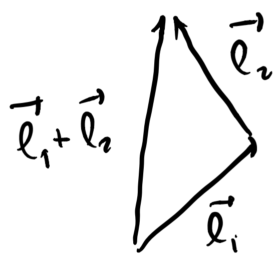
$$\geq \|\vec{e}_2\|^2 \|\vec{e}_1\|^2 \qquad \blacksquare$$

Exercício: Sejam $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ tipo tempo tais que $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle > 0$

Mostre que

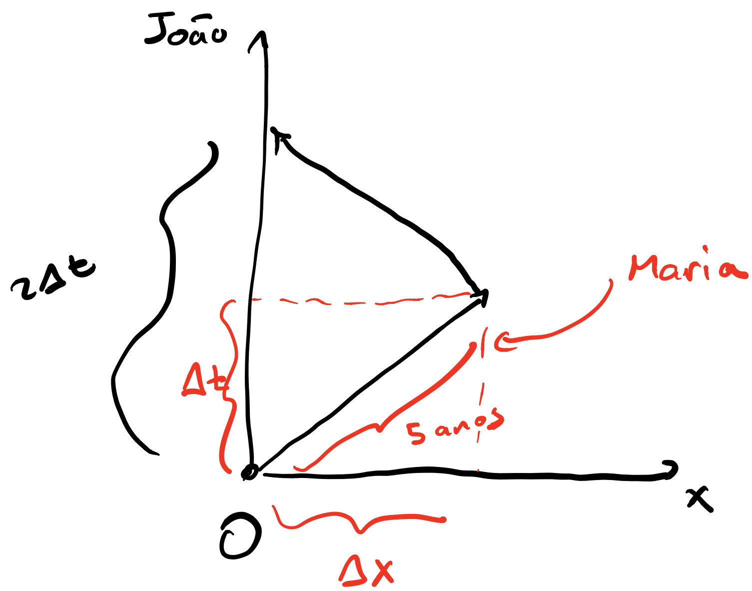
$$\|\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2\| \geqslant \|\vec{\ell}_1\| + \|\vec{\ell}_2\|$$

Isso é a dilatação do tempo



Paradoxo do Gêmeos

- João e Maria são gêmeos
- Maria viajou 5 anos à 0,95 c
  cansou e decidiu voltar
  (No relógio da Maria)
- Na volta Maria tinha 10 anos
- O João tinha 32 anos!



$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0{,}95 \Rightarrow \Delta x = 0{,}95\,\Delta t$$

$$\|(\Delta t, \Delta x)\|^2 = 5^2 \Rightarrow \Delta t^2 - \Delta x^2 = 25$$

$$\Rightarrow \Delta t^2 - (0{,}95)^2 \Delta t^2 = 25$$

$$\Rightarrow \Delta t \approx 16 \text{ anos}$$

$$\Rightarrow \boxed{2\Delta t = 32 \text{ anos}}$$