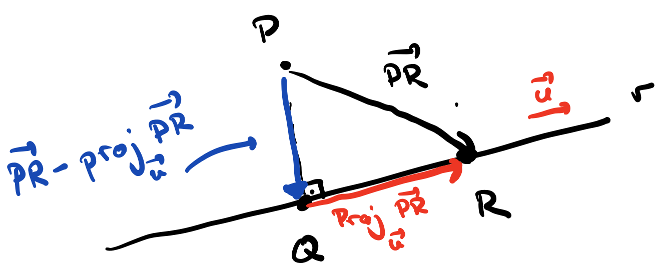
Aula 22

Bom Dia

Lembre que

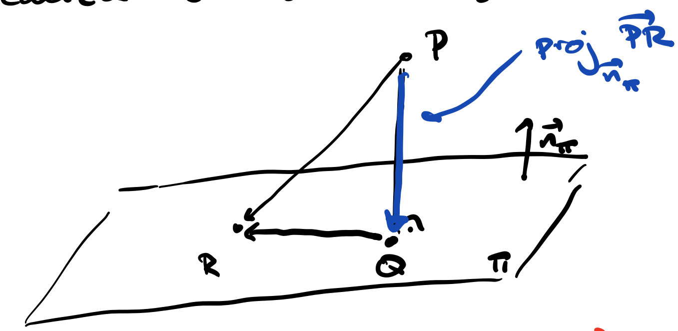
- $d(P,r) = \min\limits_{R \in r} d(P,R) = \|\overrightarrow{PR} - \text{proj}_{\vec{u}_r} \overrightarrow{PR}\|$

- $Q \in r$ "realiza" a distância se $d(P,Q) = d(P,r)$



- $d(P,\pi) = \min\limits_{R \in \pi} d(P,R) = \|\text{proj}_{\vec{n}_\pi} \overrightarrow{PR}\|$

- $Q \in \pi$ realiza a distância se $d(P,Q) = d(P,\pi)$



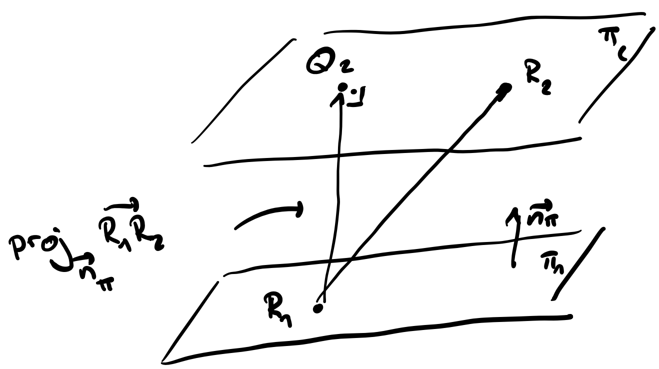
$\{Q\} = \pi \cap \ell$ onde $\ell : X = P + \lambda \vec{n}_\pi$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- $d(\pi_1, \pi_2) = \min\limits_{\substack{P_1 \in \pi_1 \\ P_2 \in \pi_2}} d(\pi_1, \pi_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } \pi_1 \nparallel \pi_2 \\ \left\| \operatorname{proj}_{\vec{n}_1} \overrightarrow{R_1R_2} \right\| & \text{se } \pi_1 /\!/ \pi_2 \end{cases}$

$(R_1 \in \pi_1 \,,\ R_2 \in \pi_2)$ q.q.

$= d(R_1, \pi_2)$

onde $R_1 \in \pi_1$ ponto qualquer de π_1



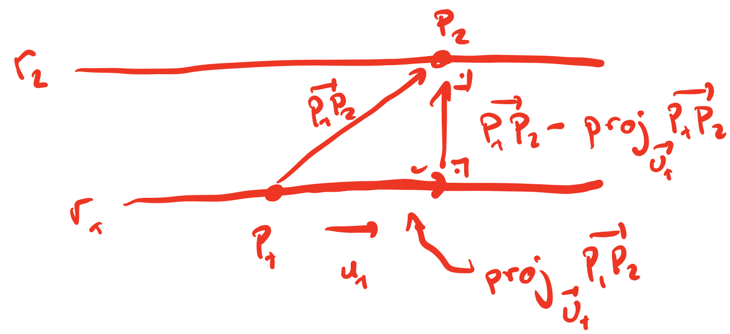
- $d(r, \pi) = \min\limits_{\substack{R' \in r \\ P \in \pi}} d(R', P) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \nparallel \pi \\ d(R, \pi) & \text{se } r \parallel \pi \end{cases}$

(R qualquer ponto de r)

- $d(r_1, r_2) = \min\limits_{\substack{R_1 \in r_1 \\ R_2 \in r_2}} d(R_1, R_2)$

Caso 1: $r_1 \parallel r_2$

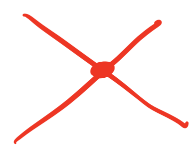
$$d(r_1, r_2) = \| \overrightarrow{P_1P_2} - proj_{\vec{u}_1} \overrightarrow{P_1P_2} \| = d(P_1, r_2)$$ onde $P_1 \in r_1$ é q.q. ponto.



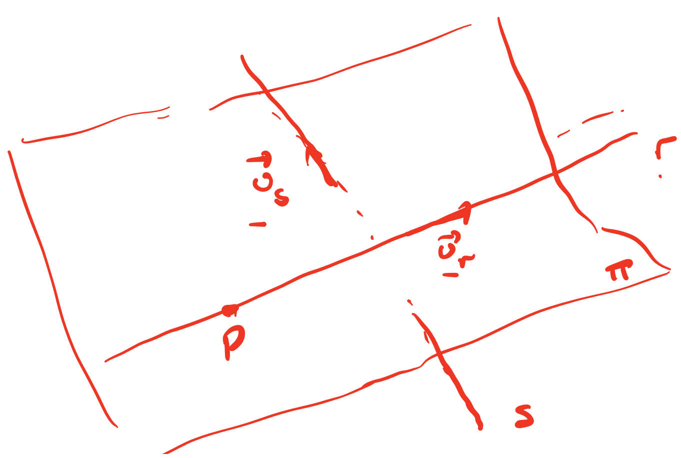
Caso 2: $r_1 \nparallel r_2$

Se r_1 e r_2 são concorrentes

$\Rightarrow d(r_1, r_2) = 0$



Se r_1 e r_2 são reversas



Tem um único plano π que contém a reta r e é tal que $s \parallel \pi$

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = \| \mathrm{proj}_{\vec{n}_\pi} \overrightarrow{P_sQ} \|$$

onde
- Q é um ponto qualquer de π
- $\vec{n}_\pi$ é vetor normal ao π

Podemos tomar $Q = P_r$ (pois $r \subset \pi$)

$$\vec{n}_\pi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_s$$

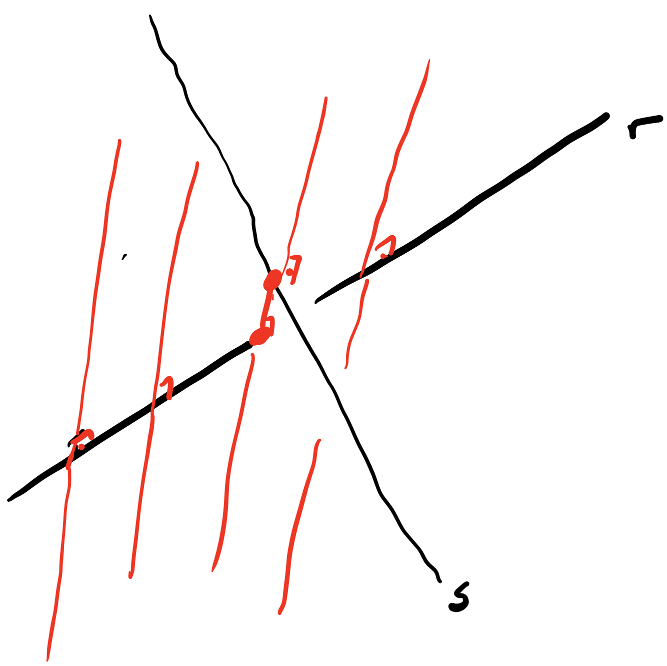
$$\Rightarrow \boxed{d(r,s) = \| \mathrm{proj}_{\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s} \overrightarrow{P_sP_r} \|.}$$

<u>Pergunta</u>: Dados r, s reversos, como encontrar pontos $P \in r$, $Q \in s$ tais que $d(P,Q) = d(r,s)$?

Seja $r: R + \lambda \vec{u}_r$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$s: S + \mu \vec{v}_s \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Ideia: Para cada ponto de r vou considerar uma reta que passa por esse ponto e tal que seu vetor diretor é $\perp$ à $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$



Vamos escrever isso:

Seja R_λ o ponto $R + \lambda \vec{v}_r \in r$

Consideramos

$$\boxed{\ell_\lambda : X = R_\lambda + \alpha\, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

ℓ_λ é concorrente à r $\forall \lambda$

$\ell_\lambda \perp r$ $\forall \lambda$

Vai existir somente um valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que ℓ_λ, s são concorrentes

Para esse valor λ_0 teremos que:

ℓ_{λ_0} concorrente à r e s

$\ell_{\lambda_0} \perp r$, $\ell_{\lambda_0} \perp s$

Logo os pontos $P \in r$, $Q \in s$ tais que $d(P,Q) = d(R,S)$ são

$$\{P\} = l_{\lambda_0} \cap r \qquad P = R_{\lambda_0}$$

$$\{Q\} = l_{\lambda_0} \cap s$$

Falta saber como determinar o valor $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.q. l_{λ_0}, s são concorrentes

Para isso temos que ver quando que

$$\boxed{\overrightarrow{R_\lambda S}, \ \vec{v}_s, \ \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \quad \text{são L.D.}}$$

Isso determina λ totalmente!

Exemplo:

$$r : X = (1,0,1) + \lambda(1,1,1) \quad s : X = (1,1,1) + \mu(1,0,-1).$$

$$R_\lambda = (1+\lambda, \lambda, 1+\lambda)$$

$$S = (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{R_\lambda S} = (-\lambda, 1-\lambda, -\lambda)$$

$$\vec{u}_s = (1, 0, -1)$$

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1, 2, -1)$$

$\overrightarrow{R_\lambda S}$, $\vec{u}_s$, $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s$ L.D.

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\lambda + 2(1-\lambda) + -\lambda(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -6\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1/3}$$

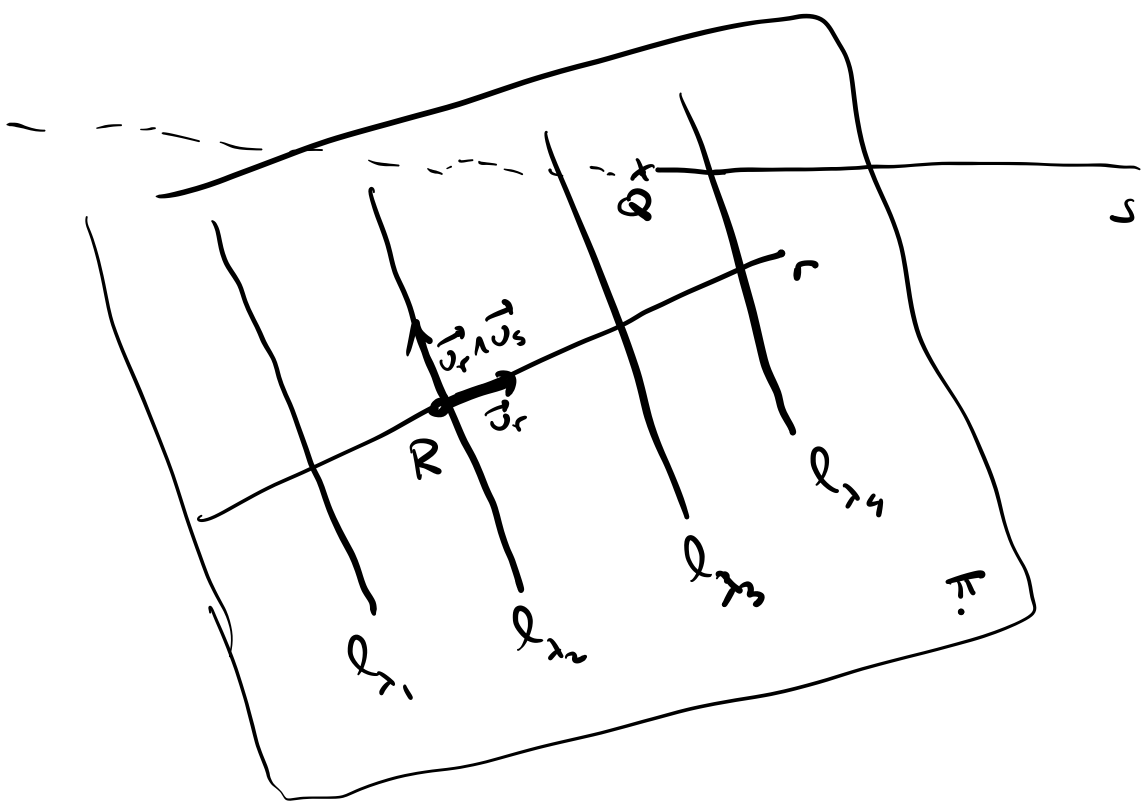
$$\boxed{P = R_{1/3} = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}\right)}$$

Q é a interseção da reta $l_{1/3}$ com s (vou deixar p/ vcs calcularem).

<u>OBS</u>: Para cada λ fixo

$$\boxed{l_\lambda : X = R_\lambda + \alpha\, \vec{v_r} \wedge \vec{v_s}\ , \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

Se deixarmos λ variar obtemo um plano



$$\ell_\lambda : X = R + \lambda \vec{v}_r + \alpha\, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Variando t.b. λ obtemos

$$\pi : X = R + \lambda \vec{v}_r + \alpha\, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$$

$$\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$$

Portanto o ponto $Q \in s$ mais próximo de r é $\boxed{\pi \cap s = \{Q\}}$