<u>Aula 21</u>

Bom DIA!

<u>Lembre que</u>

- Posição Relativa Entre Reta e Plano em $\mathbb{E}^3$

$r: X = P + \lambda\vec{u} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$\pi: X = Q + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \vec{n} \neq \vec{0}, \ \vec{n} \perp \pi$

Posição	Paralelismo	Interseção	LI / LD
$r \subset \pi$ r contido em π	$r \parallel \pi$ $\cdot\ \vec{u} \perp \vec{n}$ $\cdot\ \vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$	$r \cap \pi = r$ (tem mais do que um ponto) $r \parallel \pi$ e $P \in \pi$	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.D. e $\vec{PQ}, \vec{v}, \vec{w}$ L.D.
$r \parallel \pi$, $r \not\subset \pi$ r é paralelo à π e não está contida em π	$r \parallel \pi$ $\cdot\ \vec{u} \perp \vec{n}$ $\cdot\ \vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$	$r \cap \pi = \emptyset$ $r \parallel \pi$ e $P \notin \pi$	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.D. e $\vec{PQ}, \vec{v}, \vec{w}$ L.I.
r e π são transversais	$r \nparallel \pi$ $\cdot\ \vec{u} \not\perp \vec{n}$ $\cdot\ \nexists\, a, b \in \mathbb{R} \mid \vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$	$r \cap \pi = \{R\}$	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.I

Posição Relativa Entre Planos em $\mathbb{E}^3$

$\pi_1 : X = P + \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{v}_1 \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R} ; \qquad \vec{n}_1 \perp \pi_1 , \ \vec{n}_1 \neq \vec{0}$

$\pi_2 : X = Q + \alpha \vec{u}_2 + \beta \vec{v}_2 \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R} ; \qquad \vec{n}_2 \perp \pi_2 , \ \vec{n}_2 \neq \vec{0}$

Posição	Paralelismo	Interseção	LI/LD
$\pi_1 = \pi_2$ Paralelos Coincidentes	$\pi_1 // \pi_2$ $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$ $\vec{n}_1 \perp \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1$ $\pi_1 // \pi_2$ e $P \in \pi_2$	$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ L.D. $\vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ L.D. $\vec{PQ}, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ L.D.
$\pi_1 // \pi_2$, $\pi_1 \neq \pi_2$ Paralelos Distintos	$\pi_1 // \pi_2$ $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$ $\vec{n}_1 \perp \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ $\pi_1 // \pi_2$ e $P \notin \pi_2$	$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ L.D. $\vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ L.D. $\vec{PQ}, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ L.I.
π_1 e π_2 são Transversais	$\pi_1 \not\parallel \pi_2$ $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$ $\vec{n}_1 \not\perp \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = r$	$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ LI ou $\vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ L.I.

Exemplos: (Coordenadas O.N.)

$$\pi : X = (3,4,3) + \alpha \underset{\vec{u}}{(1,0,-1)} + \beta \underset{\vec{v}}{(0,2,2)}$$

$$\pi_2 : x - 2y + 3z = 0$$

$$\pi_3 : X = (1,0,1) + \lambda (1,1,0) + \mu (1,2,1)$$

π com π_2

$\vec{n}_2 = (1,-2,3)$

$\langle \vec{n}_2, \vec{v} \rangle = 1 - 3 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow \quad \vec{u} \nparallel \pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi \nparallel \pi_2$

São Planos TRASVERSAIS

Vamos encontrar uma equação vetorial da reta $r = \pi \cap \pi_2$:

$$(x,y,z) \in \pi \iff \begin{cases} x = 3+\alpha \\ y = 4+2\beta \\ z = 3-\alpha+2\beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Vamos substituir esses valores de x, y, z na equação geral de π_2 para saber os valore de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(x,y,z) \in \pi \cap \pi_2$:

$$(3+\alpha) - 2(4+2\beta) + 3(3-\alpha+2\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4 - 2\alpha + 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 2+\beta$$

Substituindo $\alpha = 2+\beta$ na equação vetorial do plano π obtemos:

$$(3,4,3) + (2+\beta)(1,0,-1) + \beta(0,2,2)$$

$$= (5,4,1) + \beta(1,2,1)$$

Logo

$$\boxed{\pi \cap \pi_2 = r : X = (5,4,1) + \beta(1,2,1), \ \beta \in \mathbb{R}}$$

<u>π com π_3</u>

Note que $\vec{n}_3 = (1,-1,1) \perp \pi_3$

Logo $\pi_3 : x - y + z + d = 0$

$(1,0,1) \in \pi_3 \Rightarrow d = -2$

$\Rightarrow \boxed{\pi_3 : x - y + z - 2 = 0}$

$\vec{n}_3 \perp \vec{u}, \ \vec{n}_3 \perp \vec{v} \Rightarrow \pi \parallel \pi_3$

Vamos verificar se $P = (3,4,3) \in \pi_3$ ou não

$3-4+3-2=0$ ✓

Logo $P \in \pi \cap \pi_3$, $\pi \parallel \pi_3 \Rightarrow \boxed{\pi = \pi_3}$

Distância (Todas as Coordenadas são O.N.)

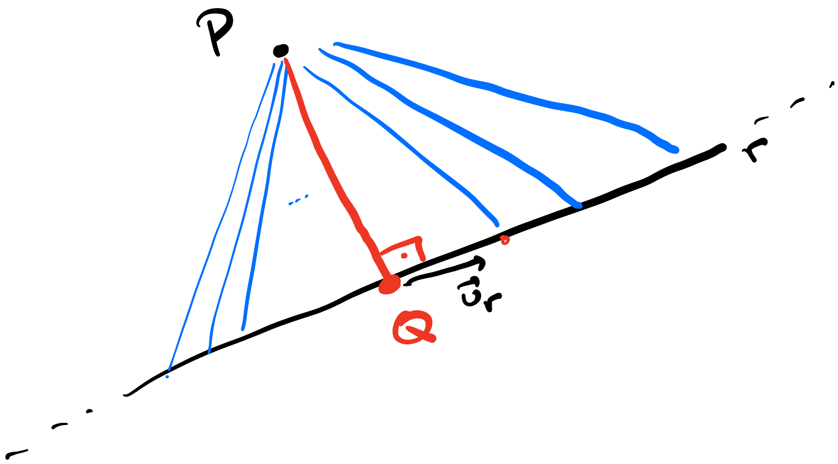
Lembre que

$$d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$$

onde $P=(p_1,p_2,p_3)_\Sigma$, $Q=(q_1,q_2,q_3)_\Sigma$; Σ é sistema de Coord. O.N.

- Distância de Ponto à Reta

Def: $d(P,r) = \min\limits_{Q \in r} d(P,Q)$



O ponto $Q \in r$ que "realiza" a distância

Ou seja, tal que $d(P,r) = d(P,Q)$

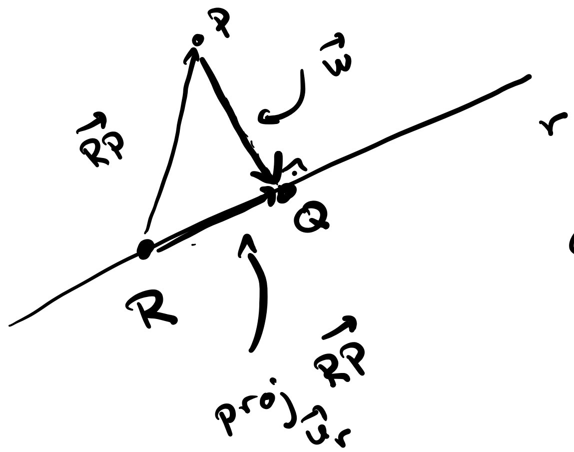
é o ponto de r tal que

$\vec{PQ} \perp \vec{u}_r$ (onde $\vec{u}_r$ é um vetor diretor de r)

Se $R \in r$ é um ponto qualquer

então

$$\boxed{d(P,r) = \left\| \mathrm{proj}_{\vec{u}_r} \vec{RP} - \vec{RP} \right\|}$$



$$Q = R + \text{proj}_{\vec{u}_r}\vec{RP}$$

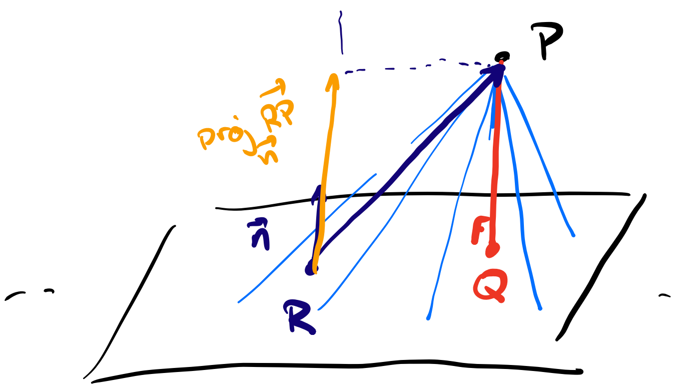
$$\vec{RP} + \vec{w} = \text{Proj}_{\vec{u}_r}\vec{RP} \Rightarrow \vec{w} = \text{Proj}_{\vec{u}_r}\vec{RP} - \vec{RP}$$

$$d(P, r) = \|\vec{w}\|$$

<u>OBS</u>: $P \in r \Leftrightarrow d(P, r) = 0$

Distância de Ponto ao Plano

Def: $$d(P, \pi) = \min_{Q \in \pi} d(P, Q)$$



$$\boxed{d(P,\pi) = \| \mathrm{Proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{RP} \|}$$

onde R é um ponto qualquer do plano π e $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano π.

<u>OBS</u>: O ponto Q que realiza a distância de P a π é $Q = R + \overrightarrow{RP} - \mathrm{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{RP}$

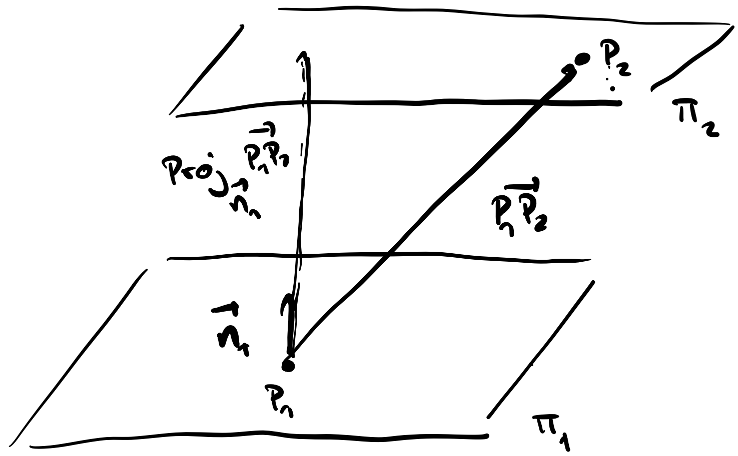
<u>OBS</u>: $P \in \pi \iff d(P,\pi) = 0$

- <u>Distância</u> <u>Entre</u> <u>Planos</u>

<u>Def</u>: $d(\pi_1, \pi_2) = \min\limits_{\substack{P_1 \in \pi_1 \\ P_2 \in \pi_2}} d(P_1, P_2)$

<u>OBS</u>: $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \iff d(\pi_1, \pi_2) = 0$

Logo $d(\pi_1, \pi_2) \neq 0 \iff \pi_1$ e π_2 são paralelos distintos



Note que se π_1 e π_2 são paralelos (distintos) então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)$$

onde P_1 é qualquer ponto de π_1

$$\boxed{d(\pi_1,\pi_2) = \| \text{proj}_{\vec{n}_1} \overrightarrow{P_1P_2} \|} \quad (\pi_1 \parallel \pi_2)$$

onde $P_1 \in \pi_1$, $P_2 \in \pi_2$ e $\vec{n}_1$ normal de π_1

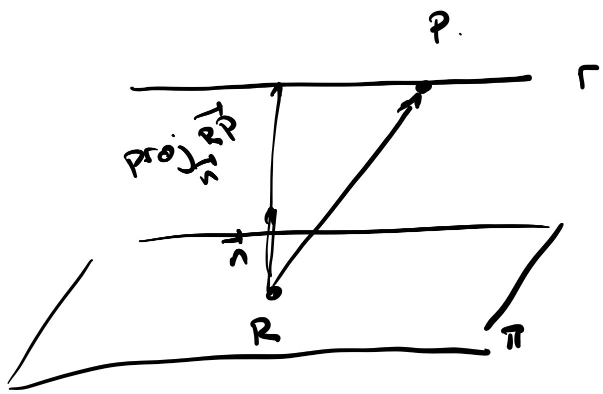
• Distância Entre Reta e Plano

<u>Def</u>: $d(r,\pi) = \min\limits_{\substack{P \in r \\ Q \in \pi}} d(P,Q)$

OBS: $r \cap \pi \neq \phi \iff d(r,\pi) = 0$

Logo

$d(r,\pi) \neq 0 \iff r \cap \pi = \phi \iff$ r é paralelo a π e não contido.



Logo Nesse caso $(r \parallel \pi \,,\ r \not\subset \pi)$

$d(r,\pi) = d(P,\pi)$ onde P é um ponto qualquer de r

$$\boxed{d(r,\pi) = \| proj_{\vec{n}} \vec{RP} \|} \quad (r \parallel \pi)$$

onde $R \in \pi$, $P \in r$, $\vec{n}$ vetor normal a π.

Distância Entre retas

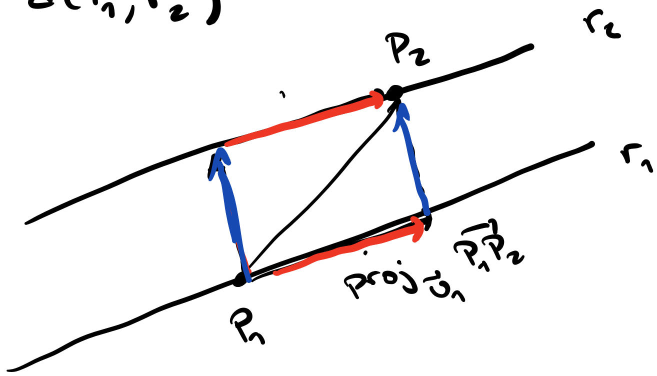
Def: $d(r_1, r_2) = \min\limits_{\substack{P_1 \in r_1 \\ P_2 \in r_2}} d(P_1, P_2)$

OBS: $r_1 \cap r_2 \neq \phi \iff d(r_1, r_2) = 0$

Vamos analisar os casos em que $r_1 \cap r_2 = \phi$

Caso 1: $r_1 \parallel r_2$, $r_1 \neq r_2$ (paralelas distintas)

$d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2)$



$$\boxed{d(r_1, r_2) = \|\vec{P_1P_2} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{P_1P_2}\| \qquad (r_1 \parallel r_2)}$$

Caso 2: r_1 e r_2 são reversas

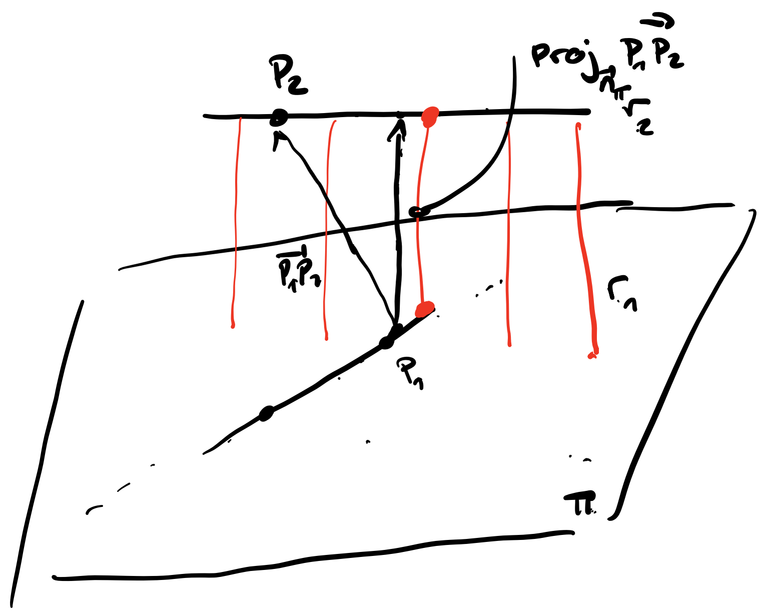
Existe um único plano π tal que

$$\begin{cases} r_1 \subset \pi \\ r_2 \parallel \pi \end{cases}$$

Se $r_1 : P_1 + \lambda \vec{u}_1 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$r_2 : P_2 + \mu \vec{u}_2 \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \pi : P_1 + \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$



$\vec{n}_\pi = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$

Note que $\quad d(r_1, r_2) = d(r_2, \pi) = d(P_2, \pi)$.

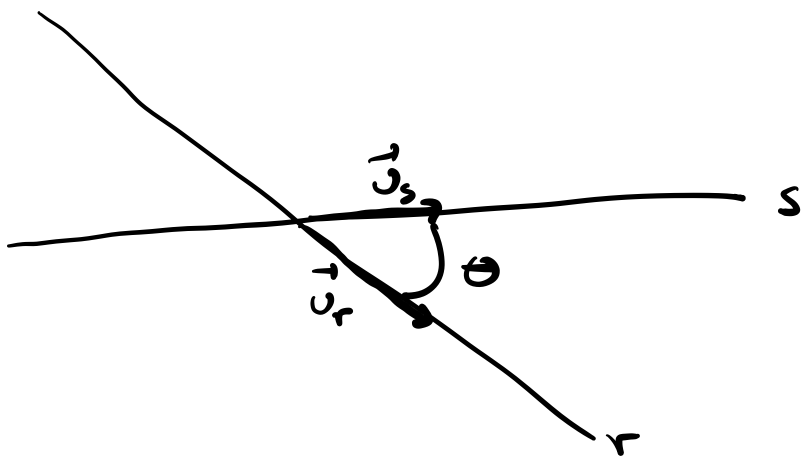
mas isso já sabemos calcular

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \left\| \text{proj}_{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2} \overrightarrow{P_1 P_2} \right\|}$$

(r_1 e r_2 são reversos)

Ângulo Entre Retas

Seja r e s retas concorrente

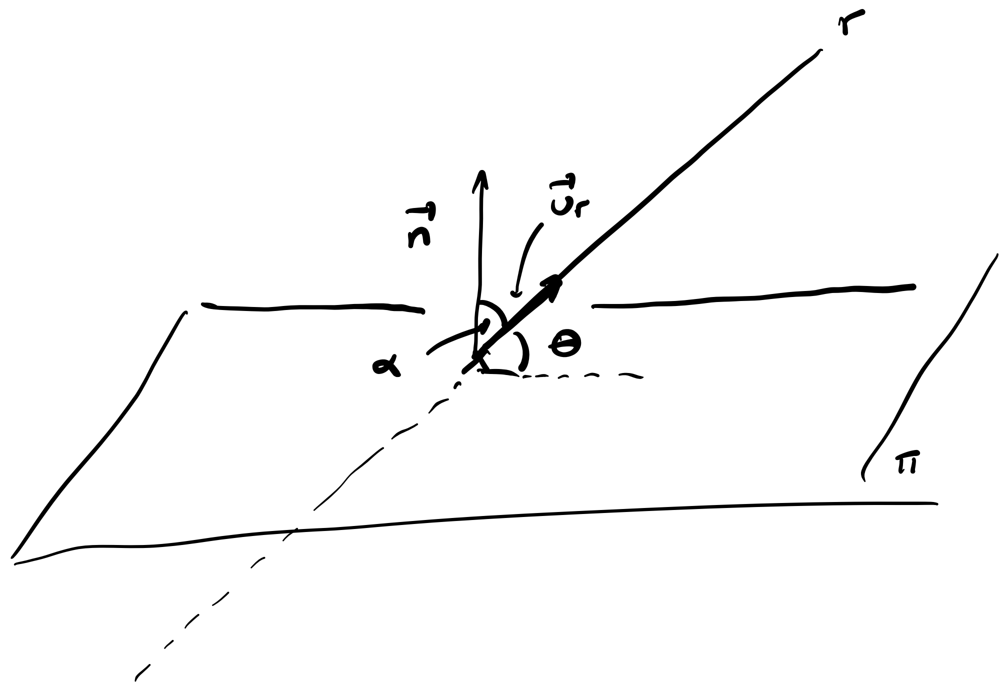


Def: θ = mim ângulo entre $\vec{v}_r, \vec{v}_s$ ou $\vec{v}_r, -\vec{v}_s$

$$\theta \in [0, \pi/2]$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\langle \vec{v}_r, \vec{v}_s \rangle|}{\|\vec{v}_r\| \|\vec{v}_s\|} \right)$$

Ângulo entre reta e plano



menor ângulo entre r e π

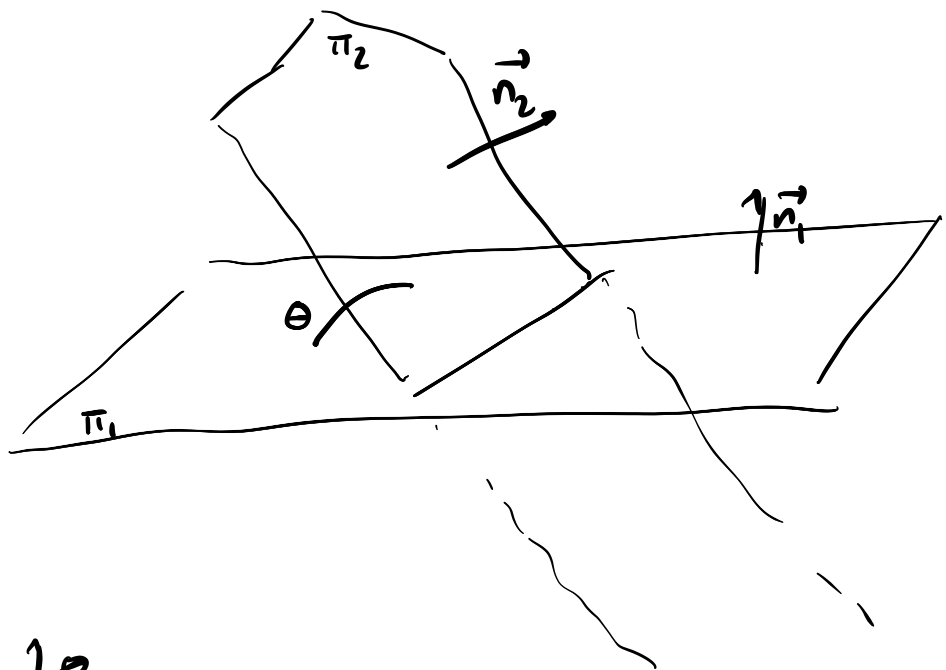
$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

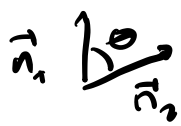
$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \text{onde} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{|\langle \vec{v}_r, \vec{n}_\pi \rangle|}{\|\vec{v}_r\| \, \|\vec{n}_\pi\|} \right)$$

Ângulo entre planos

θ é o menor angulo entre $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$

$\theta \in [0, \pi/2]$





$$\theta = \arccos\left(\frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|}\right)$$