Aula 20

Bom Dia!

Lembre que:

Posição Relativa entre Retas em $\mathbb{E}^3$

$r: X = P + \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ — $P \in r$, $\vec{u}$ vetor diretor de r

$s: X = Q + \mu \vec{v}$, $\mu \in \mathbb{R}$ — $Q \in s$, $\vec{v}$ vet. dir. de s

Posição Relativa	Paralelismo	Interseção	Vetores LI/LD
Paralelas coincidentes (Mesma Reta)	$r \parallel s$ $\vec{u}, \vec{v}$ L.D.	$r \cap s$ tem mais do que um ponto. $(P \in s)$	$\vec{u}, \vec{PQ}$ LD $\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}$ L.D. $(\vec{v}, \vec{PQ}$ LD$)$
Paralelas Distintas	$r \parallel s$ $\vec{u}, \vec{v}$ L.D.	$r \cap s = \emptyset$ $(P \notin s)$	$\vec{u}, \vec{PQ}$ L.I. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}$ L.D.
Concorrentes	$r \nparallel s$ $\vec{u}, \vec{v}$ L.I.	$r \cap s = \{R\}$	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}$ LD (se $P \neq Q$ $\Rightarrow \vec{u}, \vec{PQ}$ L.I.)
Reversas	$r \nparallel s$ $\vec{u}, \vec{v}$ L.I.	$r \cap s = \emptyset$	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}$ L.I.

Exemplos:

Seja $r: X = (1,0,-1) + \lambda \underbrace{(1,2,1)}_{\vec{u}} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Sejam

$s_1: \dfrac{-x-2}{2} = \dfrac{-y-6}{4} = \dfrac{-z-4}{2}$ (*)

$s_2: \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Feitos na última Aula

$s_3: \underset{Q}{(2,0,1)} + \beta \underbrace{(-3,-8,-2)}_{\vec{v}_3} \quad \beta \in \mathbb{R}$

$s_4: \begin{cases} x = -1 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$

r com s_3:

$\vec{v}_3 \not\parallel \vec{u}$

Vamos verificar se r e s_3 são coplanares ou não (concorrentes ou reversas)

$\vec{u} = (1,2,1)$

$\vec{v_3} = (-3,-8,-2)$

$\vec{PQ} = (1,0,2)$

$$[\vec{u}, \vec{v_3}, \vec{PQ}] = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -8 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-16) - 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 8$$

$$= -16 + 8 + 8 = 0$$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v_3}, \vec{PQ}$ L.D.

$\Rightarrow r$ e s_3 são concorrentes

Exercício: Encontre o ponto $R \in \mathbb{E}^3$ tal que $r \cap s_3 = \{R\}$

r com s_4:

Vamos verificar qual a interseção $r \cap s_4$:

$(x,y,z) \in r \iff \circledast \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) \in s_4 \iff \begin{cases} x = -1 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$

Para saber os valores de λ para os quais $(x,y,z) \in r \cap s_4$ vamos substituir as equações $\circledast$ no sistema que determina os pontos da reta s_4

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda = -1 & (1) \\ 2(2\lambda) - (-1+\lambda) = -3 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \lambda = -2$

$(2) \Rightarrow 3\lambda + 1 = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$ ABSURDO

Logo $r \cap s_4 = \emptyset$

Precisamos verificar se r e s_4 são reversas ou paralelas distintas

Vamos verificar se são paralelas ou não.

Aqui temos duas possibilidades:

<u>Método 1</u>:

Encontrar equação vetorial de s_4:

$$s_4: \begin{cases} x = -1 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$

Logo $x = -1$

$z = 3 + 2y$ $\quad$ y é arbitrário

$y = \mu$

$$\begin{cases} x = -1 + 0 \cdot \mu \\ y = 0 + 1 \cdot \mu \\ z = 3 + 2\mu \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad (x,y,z) = (-1,0,3) + \mu(0,1,2)$

$s_4: \ X = (-1,0,3) + \mu \underbrace{(0,1,2)}_{\vec{v_4}}$

$\vec{v_4} \not\parallel \vec{u} \qquad \vec{u} = (1,2,1)$

Logo as retas são reversas.

<u>Método 2</u>:

s_4 está contida nos planos

$\pi_1: \quad x = -1$

$\pi_2: \quad 2y - z = -3$

Logo q.q. vetor diretor de s_4 é paralelo tanto ao plano π_1 quanto ao plano π_2

$\Rightarrow \quad \vec{v_4} \perp \vec{n_1} \quad$ e $\quad \vec{v_4} \perp \vec{n_2} \quad$ onde

$\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais aos planos π_1 e π_2

$\vec{v} \parallel \vec{v}_4 \iff \vec{v} \perp \vec{n}_1, \quad \vec{v} \perp \vec{n}_2$

Vamos verificar:

$\vec{u} = (1,2,1)$, $\quad \vec{n}_1 = (1,0,0)$, $\quad \vec{n}_2 = (0,2,-1)$

($\vec{n} = (a,b,c)$ é normal ao plano $ax+by+cz+d=0$)

Como $\langle \vec{v}, \vec{n}_1 \rangle = 1 \neq 0$ segue que

$\vec{v} \not\perp \vec{n}_1 \Rightarrow \vec{v} \nparallel \vec{v}_4 \Rightarrow r$ e s_4

são reversos $\blacksquare$

Posição relativa entre reta e plano em $\mathbb{E}^3$

$$r: X = P + \lambda \vec{u} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\vec{u} \neq \vec{0})$$

$$\pi: X = Q + \alpha \vec{v} + \beta \vec{w} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} , \quad \vec{v}, \vec{w} \text{ L.I.}$$

Possibilidades de posição relativa entre r e π em $\mathbb{E}^3$

① $r \parallel \pi$

- $\vec{u} \perp \vec{n}_\pi$ ($\vec{n}_\pi \perp \pi$) vetor normal
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.D.

① a) $r \subset \pi$

paralelo contido

(r está contido em π)

① b) $r \not\subset \pi$

$r \cap \pi = \emptyset$

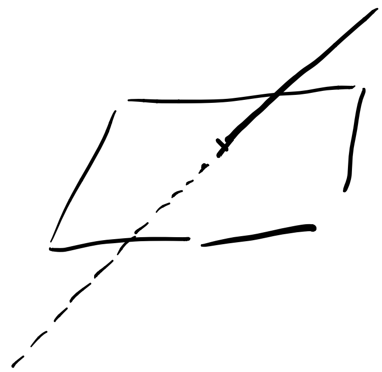
Paralelo não contido

② $r \nparallel \pi$ ⟶ $r \cap \pi = \{R\}$

Transversais

$\vec{u} \not\perp \vec{n}_\pi$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ L.I.



Exemplos: (Coordenadas O.N.)

$r: X = (1,0,-1) + \lambda(1,2,1) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$\pi_1: X = (3,4,3) + \alpha(1,0,-1) + \beta(0,2,2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\pi_2: x - y + z = 3$

$\pi_3: 2x - y - z = 0$

Determine as posições relativas entre r e π_i

r com π_1:

$r \parallel \pi_1$ ou $r \nparallel \pi_1$?

Um vetor normal à π_1 é

$$\overset{\vec{v}}{(1,0,-1)} \wedge \overset{\vec{w}}{(0,2,2)} = \vec{n_1}$$

$$r \parallel \pi_1 \iff \langle \vec{u}, \vec{n_1} \rangle = 0 \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = 0$$

$$\iff [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$$

$$\iff \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0$$

Logo $r \parallel \pi_1$

Precisamos verificar se $r \subset \pi_1$ ou se $r \not\subset \pi_1$

Note que com $r \parallel \pi_1$ temos que $r \subset \pi_1 \iff P = (1,0,-1) \in \pi_1$

Vamos verificar se $P \in \pi_1$ ou não

$P \in \pi_1 \iff$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,0,-1) = P = (3,4,3) + \alpha\,(1,0,-1) + \beta\,(0,2,2)$$

$\iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\begin{cases} 1 = 3 + \alpha \\ 0 = 4 + 2\beta \\ -1 = 3 - \alpha + 2\beta \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \alpha = -2$

$(2) \Rightarrow \beta = -2$

$(3) \Rightarrow -1 = 3 + 2 - 4 \iff -1 = 1$ $\times$

Absurdo

Logo, $P \notin \pi_1 \Rightarrow$ $\boxed{r \text{ é paralelo e não contido em } \pi_1}$

<u>r com π_2:</u>

Analisar $r \cap \pi_2$

$\pi_2: \quad x - y + z = 3$

$r: \ X = (1,0,-1) + \lambda(1,2,1) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \in r \iff \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in r \cap \pi_2 \iff (1+\lambda) - 2\lambda + (-1+\lambda) = 3$$

$$\iff 0 = 3 \quad \times$$

Não existe λ tal que
$(1,0,-1) + \lambda(1,2,1) \in \pi_2$

$\Rightarrow$ r e π_2 são paralelos e
$r \not\subset \pi_2$.

<u>r com π_3</u>

$r \parallel \pi_3$ ou $r \nparallel \pi_3$?

$r \parallel \pi_3 \iff \vec{u} = (1,2,1) \perp \vec{n}_3 = (2,-1,0)$

$\langle \vec{v}, \vec{n}_3 \rangle = 0 \Rightarrow r \parallel \pi_3$

Vamos verificar se $r \subset \pi_3$ ou $r \not\subset \pi_3$

$(1,0,-1) \in r$ vamos ver se $(1,0,-1) \in \pi_3$ ou não

$\pi_3: \quad 2x - y - 2 = 0$

Substituindo $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$

Temos $0 = 0$

$\Rightarrow P = (1,0,-1) \in r \cap \pi_3$

$\Rightarrow \boxed{r \subset \pi_3}$

Posição Relativa entre Planos em $\mathbb{E}^3$

$\pi_1: ax+by+cz+d=0$

$\pi_2: Ax+By+Cz+D=0$

Possibilidades

① $\pi_1 \parallel \pi_2$

$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

$\vec{n}_1 = (a,b,c)$, $\vec{n}_2 = (A,B,C)$

→ ①(a) $\pi_1 = \pi_2$ (paralelos coincidentes)

→ ① (b) $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$ (Paralelos Distintos)

② $\pi_1 \nparallel \pi_2$ $\longrightarrow$ $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ é uma reta

$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$

Planos Transversais

Exemplos:

$\pi : X = (3,4,3) + \alpha(1,0,-1) + \beta(0,2,2)$

$\pi_1 : x - y + z = 3$

$\pi_2 : x - 2y + 3z = 0$

$\pi_3 : X = (1,0,1) + \lambda(1,1,0) + \mu(1,2,1)$

π com π_1:

Vamos ver se $\pi \parallel \pi_1$ ou $\pi \nparallel \pi_1$

$\vec{n}_1 = (1,-1,1) \perp \pi_1$

$$\pi_1 \parallel \pi \iff \vec{n}_1 \perp \pi \iff \begin{cases} \vec{n}_1 \perp \overbrace{(1,0,-1)}^{\vec{u}} \\ \vec{n}_1 \perp \underbrace{(0,2,2)}_{\vec{v}} \end{cases}$$

$\langle \vec{n}_1, \vec{u} \rangle = 1 - 1 = 0$ ✓

$\langle \vec{n}_1, \vec{v} \rangle = -2 + 2 = 0$ ✓

$\Rightarrow \pi_1 \parallel \pi$

Para saber se $\pi = \pi_1$ ou $\pi \cap \pi_1 = \phi$

basta verificar se $P = (3, 4, 3) \in \pi_1$

ou não

Substituindo $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$ na

equação $x - y + z = 3$

temos $3 - 4 + 3 = 3 \Leftrightarrow 2 = 3$

ABSURDO

$\Rightarrow P \notin \pi_1 \Rightarrow$ π e π_1 são

paralelos distintos