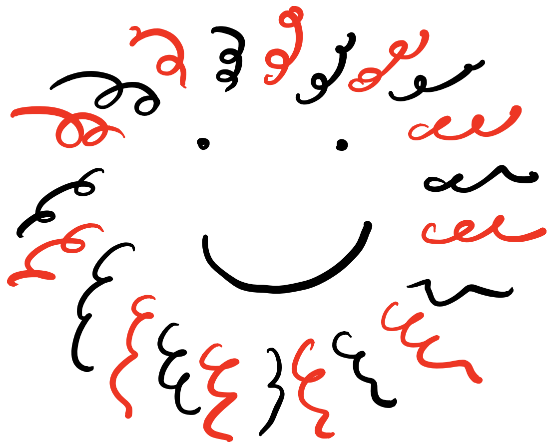
Aula 19

Bom Dia!



Última Aula:

(Fixe um sistema de Coord. $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ em $\mathbb{E}^3$)

Equação da reta:

<table>
<tr><th>Vetorial</th><th>Paramétrica</th><th>Simétrica</th></tr>
<tr>
<td>$r: X = P + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
$\vec{u} \neq \vec{0}$ vetor diretor da reta</td>
<td>$r: \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \vec{0}$</td>
<td>$r: \dfrac{x - p_1}{u_1} = \dfrac{y - p_2}{u_2} = \dfrac{z - p_3}{u_3}$
$u_1 \neq 0, \ u_2 \neq 0, \ u_3 \neq 0$</td>
</tr>
</table>

Equação da reta na forma planar

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \qquad (a,b,c) \nparallel (A,B,C)$$

Equação do Plano:

Vetorial	Paramétrica	Geral
$\pi: P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ $\vec{u},\vec{v}$ L.I. vetores diretores do plano	$\pi: \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ $(u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)$ L.I.	$\pi: ax+by+cz+d=0$ $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

Prop: Se $\Sigma = (O,\mathcal{F})$ é um sistema de coordenadas ortonormal e $\pi: ax+by+cz+d=0$ então $\vec{n} = (a,b,c)_{\mathcal{F}}$ é um vetor normal (perpendicular) ao plano.

Exemplo: Encontre uma equação geral do plano (Sistema de coord. O.N.)

$$\pi: X = (1,-1,0) + \lambda\underbrace{(2,1,0)}_{\vec{u}} + \mu\underbrace{(0,1,-1)}_{\vec{v}}$$

Queremos $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que

$$\pi: ax+by+cz+d=0$$

Sabemos que $\vec{n} = (a,b,c) \perp \vec{u}$ e $\vec{n} \perp \vec{v}$ onde $\vec{u},\vec{v}$ são vetores diretores do plano π.

Um vetor perpendicular à $\vec{u}$ e $\vec{v}$

é $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{n} = (-1, 2, 2)$

$\Rightarrow \pi : -x + 2y + 2z + d = 0$

Falta determinar $d \in \mathbb{R}$

Como $(1, -1, 0) \in \pi$ temos que

$-1 - 2 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = 3$

$$\boxed{\pi : -x + 2y + 2z + 3 = 0}$$

Posição Relativa de retas em $\mathbb{E}^3$

<u>Pergunta</u>: Dado duas retas em $\mathbb{E}^3$ como estão posicionadas uma em relação a outra?

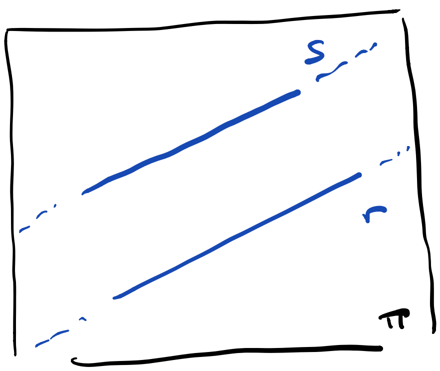
Dados $r, s \subset \mathbb{E}^3$ retas temos as seguintes possibilidades p/ a posição relativa:

1. $r \parallel s$
   - 1 (a) $r = s$ (paralelas coincidentes)
   - 1 (b) $r \cap s = \phi$ (paralelas distintas)

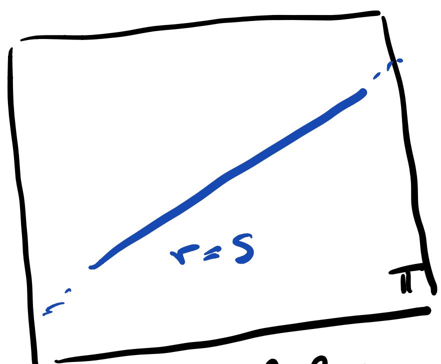
2. $r \nparallel s$
   - 2 (a) $r \cap s = \{Q\}$ (retas concorrentes)
   - 2 (b) $r \cap s = \phi$ (retas reversas)

<u>OBS</u>: Duas retas r e s são reversas $\Longleftrightarrow$ r e s não estão contidas em um mesmo plano

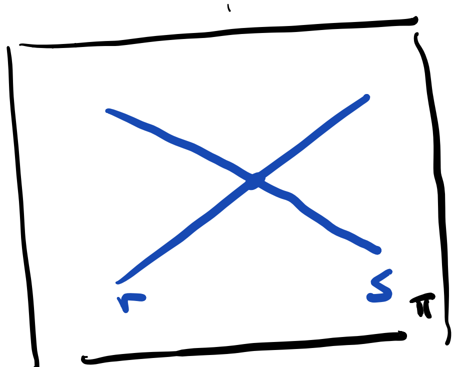
Para ver isso note que se r e s estão contidas em um plano π então só temos as seguintes possibilidade:



paralelas distintas



Paralelas coincidentes



Concorrentes

Logo, para verificar se r e s são reversas, uma forma de fazer é verificar se

$\vec{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s$ são L.I.

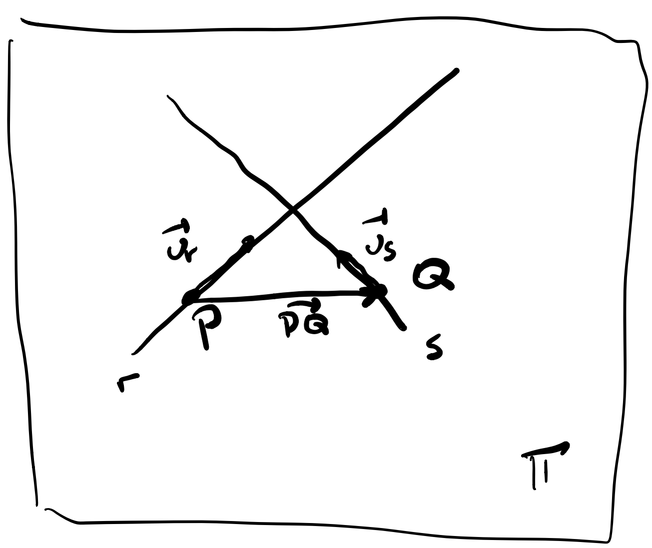
onde

$$r: X = P + \lambda \vec{u}_r \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$s: X = Q + \mu \vec{u}_s$$

Pois suponha que r, s não são reversas:

① $\vec{u}_r \parallel \vec{u}_s \Rightarrow \vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s$ L.D.

② $\vec{u}_r \nparallel \vec{u}_s$ (retas são concorrentes)



$\vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s$ L.D.

Logo, se $\vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s$ L.I.

$\Leftrightarrow$ As retas são reversas

OBS: Dados $r: X = P + \lambda \vec{v}_r \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$s: X = Q + \mu \vec{v}_s \quad \mu \in \mathbb{R}$

se o produto misto

$[\vec{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] \neq 0 \iff$ r e s são reversas

Exemplos:

Seja $r: X = (1,0,-1) + \lambda \underbrace{(1,2,1)}_{\vec{u}} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Sejam

$$s_1: \frac{-x-2}{2} = \frac{-y-6}{4} = \frac{-z-4}{2} \quad (*)$$

$$s_2: \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$s_3: (2,0,1) + \beta(-3,-8,-2) \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$$s_4: \begin{cases} x = -1 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$

Encontre as posições relativas entre r e s_i $(i = 1, 2, 3, 4)$

r com s_1:

Passo 1: s_1 na forma vetorial

Seja $\mu = \frac{-x-2}{2} = \frac{-y-6}{4} = \frac{-z-4}{2}$

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{-x-2}{2} = \mu \iff \\ (ii) \quad & \frac{-y-6}{4} = \mu \iff \\ (iii) \quad & \frac{-z-4}{2} = \mu \iff \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} x &= -2 - 2\mu \\ y &= -6 - 4\mu \\ z &= -4 - 2\mu \end{aligned} \right.$$

(Eq. parametricas de s_1)

Logo $(x, y, z) \in s_1 \iff (x, y, z) = (-2, -6, -4) + \mu(-2, -4, -2)$

$\mu \in \mathbb{R}$

$\iff s_1 : X = (-2, -6, -4) + \mu \underbrace{(-2, -4, -2)}_{\vec{v}_1}$

Passo 2: Determinar a posição relativa

Note que

$$\vec{v}_1 = -2\vec{v} \Rightarrow s_1 \parallel r$$

Para saber se as retas coincidem ou se são paralelas distintas precisamos verificar se

$$r \cap s_1 \neq \phi \quad \text{ou} \quad r \cap s_1 = \phi$$

Como $r \parallel s_1$ basta verificars e um ponto qualquer de r pertence à s_1

Note que $P = (1,0,-1) \in r$

e $x=1,\ y=0,\ z=-1$ satisfaz as equações ⊛

$\Rightarrow P \in s_1$

Logo $r \cap s_1 \neq \phi$, $r \parallel s_1 \Rightarrow \boxed{r = s_1}$

Solução alternativa

$$(x,y,z) \in r \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) \in s_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2-2\mu \\ y = -6-4\mu \\ z = -4-2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Logo $(x,y,z) \in r \cap s_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda = -2-2\mu \\ 2\lambda = -6-4\mu \\ -1+\lambda = -4-2\mu \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu + \lambda = -3 \\ 4\mu + 2\lambda = -6 \\ 2\mu + \lambda = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu+\lambda = -3 \\ 4\mu+2\lambda = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\mu + \lambda = -3$$

Solução $\lambda = -3-2\mu$, μ arbitrário

Sistema Possível Indeterminado

$\Rightarrow r \cap s_1$ tem infinitos pontos $\Rightarrow r = s_1$

r com s_2

$$s_2: \begin{cases} x - z = 0 & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$r: X = (1,0,-1) + \lambda \underbrace{(1,2,1)}_{\vec{u}} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) \in r \iff \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Vamos substituir nas equações que definem s_2 para descobrir quais valores de λ correspondem a pontos em $r \cap s_2$

$$\begin{cases} 1+\lambda - (-1+\lambda) = 0 \\ \underbrace{2(1+\lambda) - 2\lambda}_{2=0} = 0 \end{cases} \quad \text{Impossível}$$

Logo $\boxed{r \cap s_2 = \emptyset}$

Temos que verificar se são paralelas (distintas) ou não paralelas (reversas)

Forma 1:

Equação vetorial de s_2:

$(1) \Rightarrow z = x$

$(2) \Rightarrow y = -1 + 2x$ $\quad x$ arbitrário

$\underline{x = \mu}$:

$$\begin{cases} x = 0 + \mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = 0 + \mu \end{cases}$$

$$s_2: X = (0,-1,0) + \mu \underbrace{(1,2,1)}_{\vec{v_2}}$$

$\vec{v_2} = \vec{u} \Rightarrow s_2 \parallel r$

Logo r e s_2 são paralelas distintas

OBS: Forma 2

Note que $s_2 = \pi_1 \cap \pi_2$ onde

$\pi_1: \quad x - z = 0$

$\pi_2: \quad 2x - y = 1$

Em particula $\quad s_2 \subset \pi_1 \ , \ s_2 \subset \pi_2$

Logo $\quad \vec{n}_1 \perp \vec{v}_2 \quad$ e $\quad \vec{n}_2 \perp \vec{v}_2$

onde $\quad \vec{n}_1$ vetor normal de π_1

$\vec{n}_2$ vetor normal de π_2

$\vec{v}_2$ vetor diretor de s_2

$\vec{n}_1 = (1, 0, -1)$

$\vec{n}_2 = (2, -1, 0)$

Logo $\quad \vec{n}_1 \perp \vec{v}_2 \ , \ \vec{n}_2 \perp \vec{v}_2$

O vetor $\vec{u}$ diretor da reta r

é paralelo ao vetor diretor

da reta s_2 $\iff \vec{n}_1 \perp u \ , \ \vec{n}_2 \perp \vec{u}$

Vamos verificar

$\langle \vec{n}_1, \vec{u} \rangle = \langle (1,0,-1), (1,2,1) \rangle = 0$

$\langle \vec{n_2}, \vec{u} \rangle = \langle (2,-1,0), (1,2,1) \rangle = 0$

$\Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n_1}$ e $\vec{u} \perp \vec{n_2}$

$\Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v_2}$

$\Rightarrow r \parallel \vec{s_2}$

$\Rightarrow r$ e s_2 são paralelos distintos