

A Física do Spin - 4300227

1^o semestre de 2023

1^a lista de exercícios

1) Em 1924 Louis de Broglie propôs a existência de ondas de matéria, estendendo assim à matéria o comportamento dual (onda-partícula) que já era conhecido no estudo da radiação. Toda partícula teria associada a ela uma onda cujo comprimento de onda é dado por

$$\lambda = h/p$$

A constante de Planck vale $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$. Porque a natureza ondulatória da matéria não nos é aparente em nossas observações diárias ?

2) Mostre que uma partícula de massa m confinada num poço quadrado infinito de comprimento L (numa “caixa”), só pode ter *certas energias*, aquelas dadas pela expressão $E = h^2 n^2 / 8mL$.

3) Mostre que uma partícula de massa m obrigada a executar movimento circular uniforme só pode ter *certos valores* de momento angular dados pela expressão $L = n\hbar$.

4) Captura eletrônica é o processo no qual um elétron de um átomo se combina com um próton do núcleo formando um nêutron e um neutrino, isto é : $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. Num certo átomo, cujo núcleo tem raio b , a função de onda radial do elétron é dada por:

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{e^{-r/2a}}{r}$$

A densidade de probabilidade radial é dada por $P_r(r) = R^*(r)R(r)r^2$. Calcule a probabilidade de captura do elétron.

5) Suponha que no átomo de hidrogênio o elétron realize movimento circular uniforme. Usando a segunda lei de Newton, as definições de energia cinética, de energia potencial eletrostática e a quantização do momento angular ($L = n\hbar$), derive a expressão dos níveis de energia do elétron (E_n) (átomo de Bohr).

6) a) Para as órbitas do átomo de hidrogênio de Bohr a energia potencial é negativa e maior em módulo do que a energia cinética. O que isto implica ? b) Ao emitir um fóton, o átomo de hidrogênio recua de forma a que haja conservação do momento. Explique porque a energia do fóton emitido é menor do que a diferença de energia entre os níveis de energia envolvidos no processo de emissão. c) Mostre que a constante de Planck tem a dimensão de momento angular.

7) Aplique o modelo de Bohr a um átomo de Hélio ionizado, i.e., um átomo de Hélio do qual um elétron foi removido. Encontre os níveis de energia. Encontre a energia necessária para remover o elétron deste átomo ionizado.

8) Em 1927 Werner Heisenberg enunciou o princípio da incerteza. Este princípio estabelece um limite na precisão com que certos pares de propriedades de uma dada partícula, conhecidas

como variáveis complementares (tais como posição e momento linear), podem ser conhecidos. Assim, para a coordenada x e o momento linear p_x podemos escrever:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$$

Como podemos relacionar este princípio com o fenômeno chamado no livro texto (Eisberg-Resnick) de “precessão do momento angular” ?

9) Imagine um elétron se propagando na direção x . Suponha que $p_y = p_z = 0$ com incerteza nula. a) Usando o princípio de incerteza, o que podemos concluir sobre a posição do elétron no eixo y e no eixo z ? b) O que acontecerá se colocarmos na frente do elétron uma placa no plano $y - z$ (perpendicular à direção x) com dois furos ?

10) Uma partícula livre que se move na direção x com *momento determinado* p ($p = p_x$) e energia E é descrita pela seguinte função de onda

$$\psi(x, t) = \exp[i(px - Et)/\hbar]$$

Calcule a densidade de probabilidade $P(x) = |\psi|^2$ de encontrar esta partícula e faça o gráfico $P(x)$ versus x . Explique como este resultado nos fornece uma boa ilustração do princípio da incerteza.

11) Para uma espira circular por onde passa uma corrente contínua, deduza a relação entre o momento magnético e o momento angular.

12) Vamos supor que o spin do elétron seja o seu momento angular intrínseco, i.e., resultante da rotação em torno de si mesmo. Vamos admitir que o raio do elétron seja $r = 10^{-15}$ m (ele é com certeza menor do que isto). Vamos supor que ele seja uma esfera homogênea de massa m carregada que gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro. O momento de inércia é dado por

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

Se o momento angular for dado por $L = I\omega$ e se ele for igual ao valor do spin, i.e., $L = \frac{1}{2}\hbar$ calcule o valor da velocidade (em metros por segundo) de um ponto no “equador” do elétron.

13) Em 1922 o experimento de Stern-Gerlach confirmou a quantização do momento angular introduzida primeiramente no modelo atômico de Bohr e posteriormente derivada na teoria de Schrödinger. A confirmação foi qualitativa, mas não quantitativa. Cinco anos mais tarde, Phipps e Taylor reproduziram o experimento de Stern-Gerlach usando átomos de hidrogênio no estado fundamental. Para o hidrogênio no estado fundamental ($n = 1$), o único valor permitido para o número quântico do momento angular é $\ell = 0$, o que por sua vez implica que o número quântico m_ℓ só pode assumir o valor $m_\ell = 0$. Como a componente z do momento de dipolo magnético (μ_{ℓ_z}) é proporcional a m_ℓ , esperava-se que os átomos de hidrogênio não fossem desviados ao cruzar o campo magnético não uniforme e no anteparo fosse observada uma única banda. A previsão teórica era de que

$$F_z = (\partial B_z / \partial z) \mu_{\ell_z} = 0$$

Entretanto, foram observadas duas bandas, ou seja, o feixe de átomos de hidrogênio se divide ao cruzar a região de $\partial B_z / \partial z \neq 0$. a) Explique como o resultado acima levou ao conceito de

spin, bem como aos valores associados ao spin do elétron. b) Porque nesta experiência não levamos em consideração o spin do próton ?

14) Numa experiência de Phipps - Taylor fazemos um feixe de átomos de hidrogênio atravessar um campo magnético não-uniforme. Sabemos que o elétron tem momento angular orbital dado por $l = 1$. A força sobre o átomo produzida pela interação do campo magnético com o momento angular orbital tem módulo:

$$F_l = g_l \mu_b m_l \partial B_z / \partial z$$

A força sobre o átomo produzida pela interação do campo magnético com o spin tem módulo:

$$F_s = g_s \mu_b m_s \partial B_z / \partial z$$

Sabendo que $g_s = 2g_l$ e considerando os possíveis valores de m_l e m_s , faça um desenho e responda: quantas manchas são observadas no anteparo? Qual a posição delas no eixo z ?

15) Qual a diferença entre o efeito Zeeman normal e o efeito Zeeman anômalo ?

16) O que é o momento angular total ? Dê um exemplo de processo físico no qual o momento angular orbital não seja conservado, o spin não seja conservado, mas o momento angular total seja conservado.