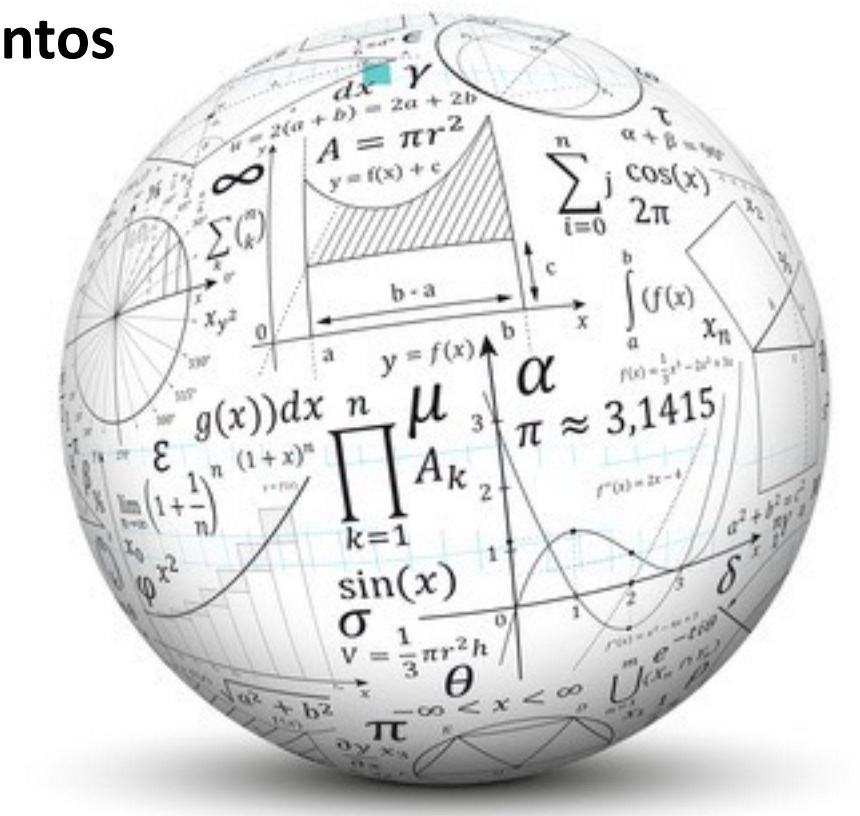
MAP 2110 – Modelagem e Matemática

1º Semestre - 2023

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



Revisitando um Problema da Aula Passada

5. Use appropriate Lagrange interpolating polynomials of degrees one, two, and three to approximate each of the following:

a. $f(8.4)$ if $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$

b. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ if $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$

c. $f(0.25)$ if $f(0.1) = 0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

d. $f(0.9)$ if $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

Adequado quer dizer que o valor interpolado deve estar contido no intervalo usado para construir o polinômio interpolador

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

No denominador x_k aparece em cada fator

No numerador falta o fator em x_k

Matéria Prima (Polinômio Cúbico)

$(x_0 - x_1)$	$(x - x_0)$	L_0	
$(x_0 - x_2)$	$(x - x_1)$	L_1	
$(x_1 - x_2)$	$(x - x_2)$	L_2	$\Rightarrow P(x)$
$(x_0 - x_3)$	$(x - x_3)$	L_3	
$(x_1 - x_3)$			
$(x_2 - x_3)$			

Polinômio Cúbico

			x	8,4						**L_i*f(x_i)**
	x_i	**f(x_i)**			**L0**	**(x-x1)(x-x2)(x-x3)**	0,006	**L0**	-0,1	-1,69441
0	8,1	16,9441				**(x0-x1)(x0-x2)(x0-x3)**	-0,06			
1	8,3	17,56492								
2	8,6	18,50515			**L1**	**(x-x0)(x-x2)(x-x3)**	0,018	**L1**	0,75	13,17369
3	8,7	18,82091				**(x1-x0)(x1-x2)(x1-x3)**	0,024			
					L2	**(x-x0)(x-x1)(x-x3)**	-0,009	**L2**	0,6	11,10309
	x0-x1	-0,2	**x-x0**	0,3		**(x2-x0)(x2-x1)(x2-x3)**	-0,015			
	x0-x2	-0,5	**x-x1**	0,1						
	x1-x2	-0,3	**x-x2**	-0,2	**L3**	**(x-x0)(x-x1)(x-x2)**	-0,006	**L3**	-0,25	-4,70523
	x0-x3	-0,6	**x-x3**	-0,3		**(x3-x0)(x3-x1)(x3-x2)**	0,024			
	x1-x3	-0,4							**P(x)**	17,87714
	x2-x3	-0,1								

Polinômio Quadrático

			x	8,4						**L_i*f(x_i)**
	x_i	**f(x_i)**			**L0**	**(x-x1)(x-x2)**	-0,02	**L0**	-0,2	-3,38882
0	8,1	16,9441				**(x0-x1)(x0-x2)**	0,1			
1	8,3	17,56492								
2	8,6	18,50515			**L1**	**(x-x0)(x-x2)**	-0,06	**L1**	1	17,56492
						(x1-x0)(x1-x2)	-0,06			
					L2	**(x-x0)(x-x1)**	0,03	**L2**	0,2	3,70103
	x0-x1	-0,2	**x-x0**	0,3		**(x2-x0)(x2-x1)**	0,15			
	x0-x2	-0,5	**x-x1**	0,1						
	x1-x2	-0,3	**x-x2**	-0,2						
									P(x)	17,87713

Existe outra opção de polinômio de grau 2, usando os pontos x_1, x_2 e x_3

O resultado da interpolação é:

P(x)	17,87716

Polinômio Linear

			x	8,4						**L_i*f(x_i)**
	x_i	**f(x_i)**			**L0**	**(x-x1)**	-0,2	**L0**	0,667	11,70995
0	8,3	17,56492				**(x0-x1)**	-0,3			
1	8,6	18,50515								
					L1	**(x-x0)**	0,1	**L1**	0,333	6,168383
						(x1-x0)	0,3			
	x0-x1	-0,3	**x-x0**	0,1						
			x-x1	-0,2						
									P(x)	17,87833

Organizando os resultados:

linear

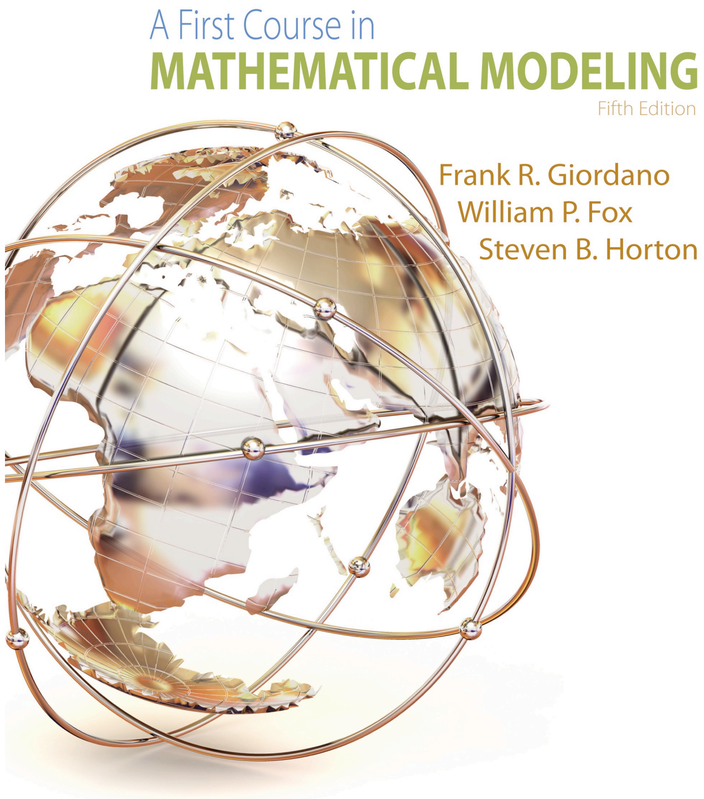
P(x)	17,87833

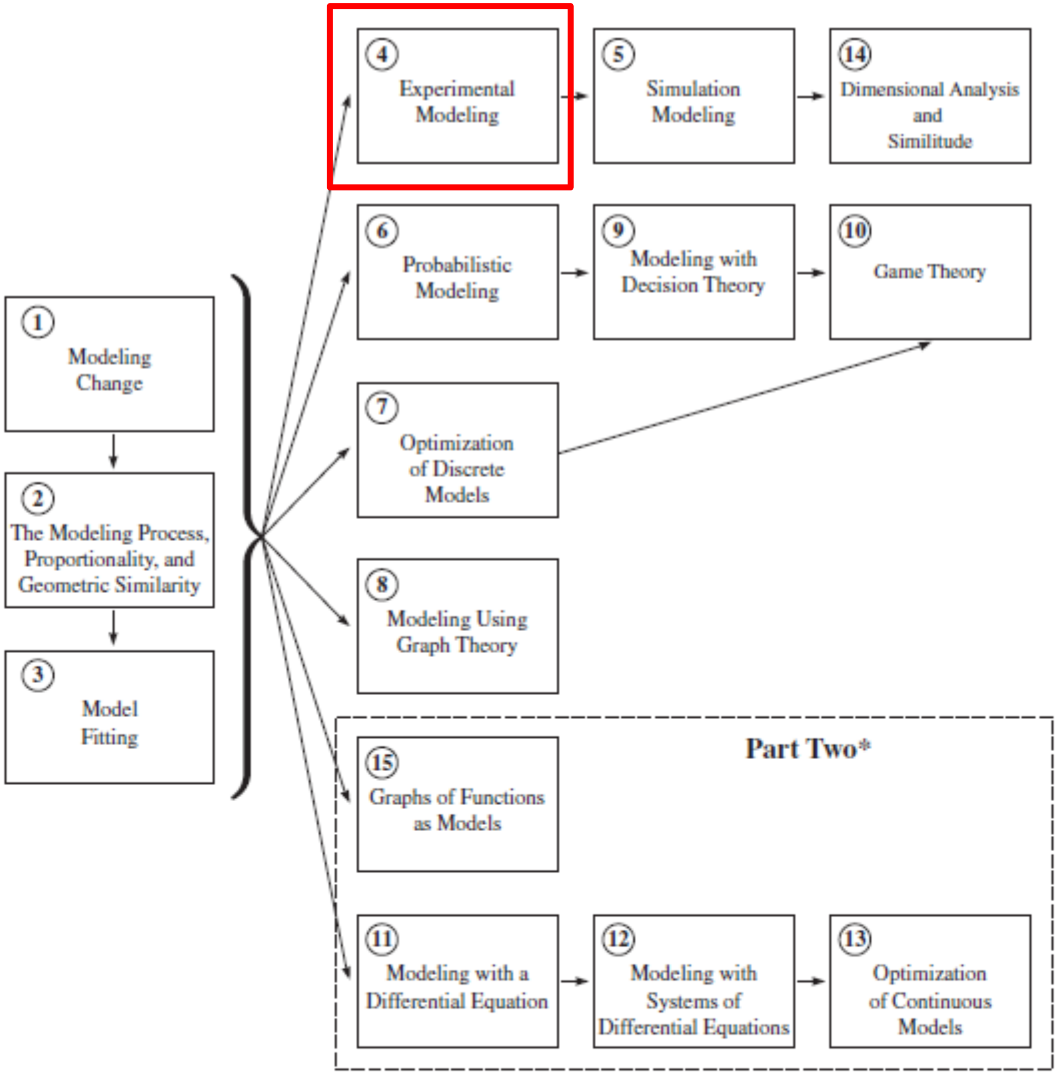
quadrático

P(x)	17,87713
P(x)	17,87716

cúbico

P(x)	17,87714





*Part Two requires single-variable calculus as a corequisite.

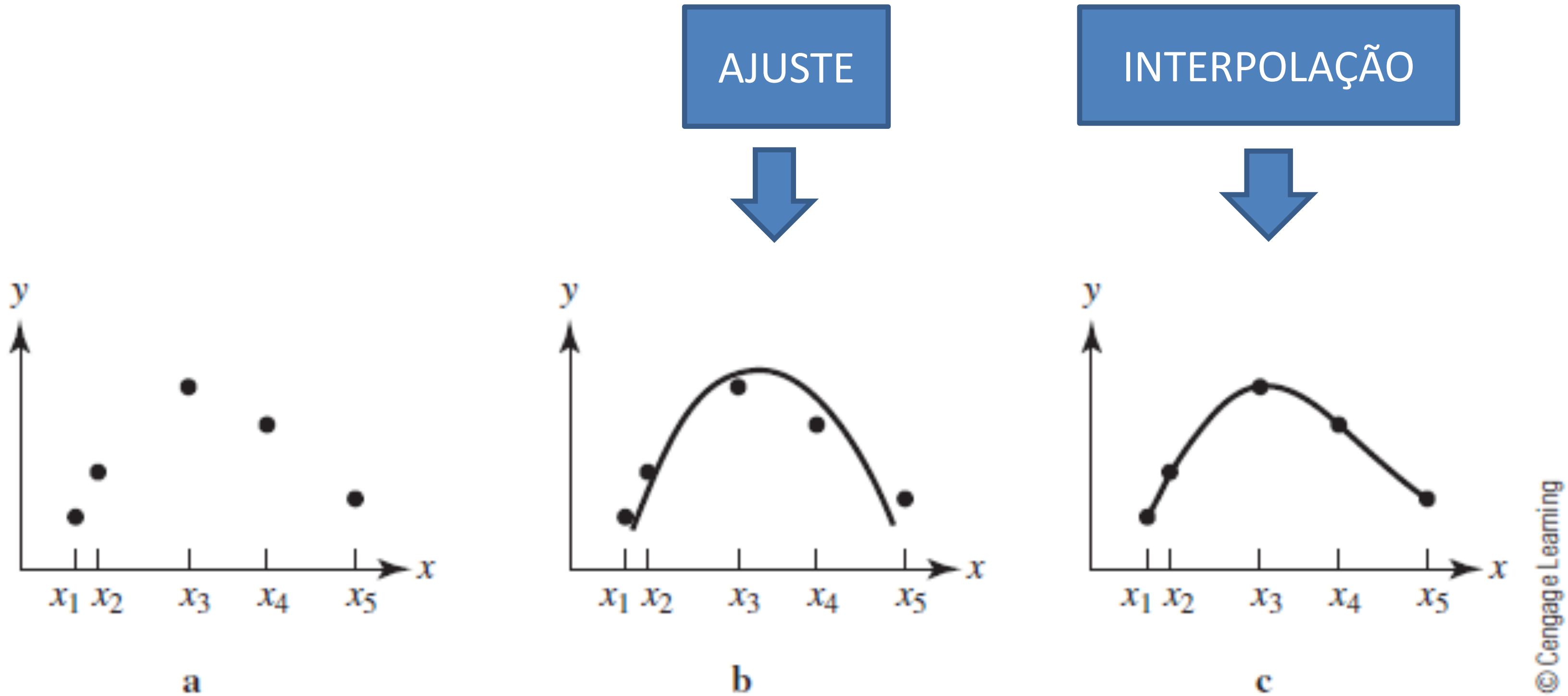


Figure 4.1

If the modeler expects a quadratic relationship, a parabola may be fit to the data, as in b. Otherwise, a smooth curve may be passed through the points, as in c.

Advantages and Disadvantages of High-Order Polynomials

Vantagens e Desvantagens de Polinômios de Alta Ordem

O uso de polinômios como funções interpoladoras permite que facilmente sejam obtidas derivadas e integrais, o que facilita a extração de informação e manipulação do modelo.

A necessidade do uso de todos os dados para a construção do polinômio interpolador em muitos casos pode resultar em ordem demasiadamente alta e consequentemente oscilações que reduzem a representatividade e utilidade do modelo.

O exemplo extremo a seguir exemplifica esse problema. O uso de um polinômio de ordem alta produziu oscilações nos extremos. A interpolação nessas regiões terá erros excessivos.

Table 4.10

x_i	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

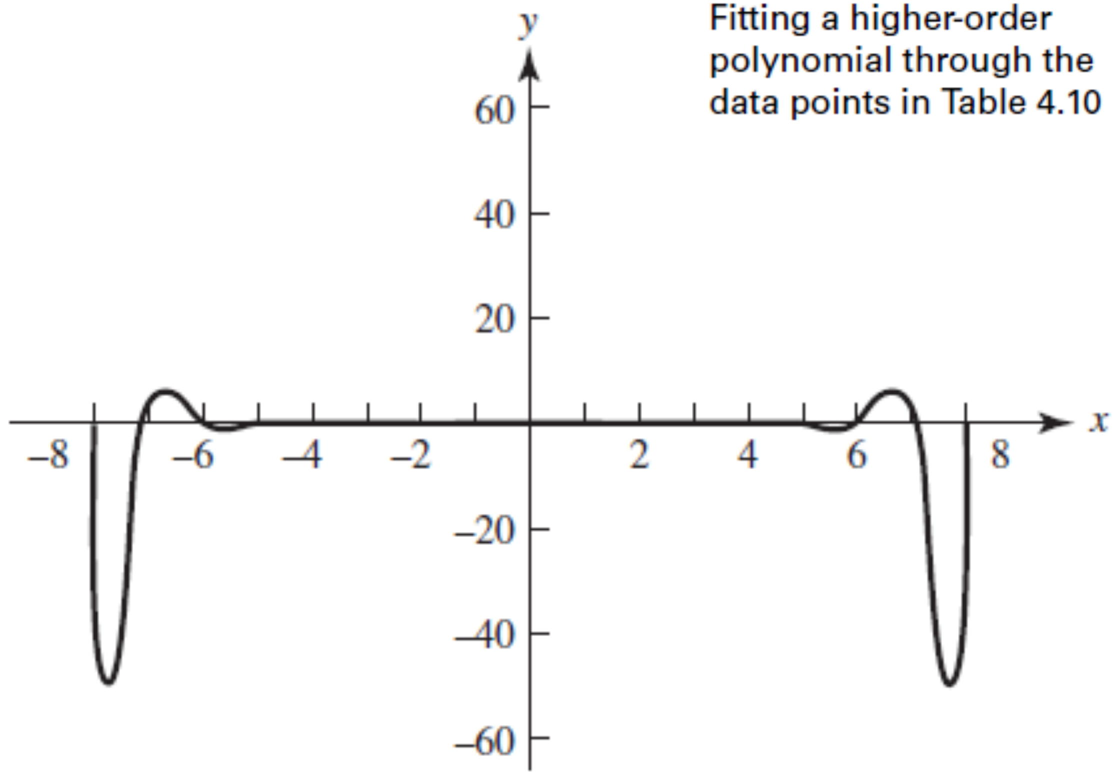


Figure 4.12
Fitting a higher-order polynomial through the data points in Table 4.10

Outros exemplos:

x	0.55	1.2	2	4	6.5	12	16
y	0.13	0.64	5.8	102	210	2030	3900

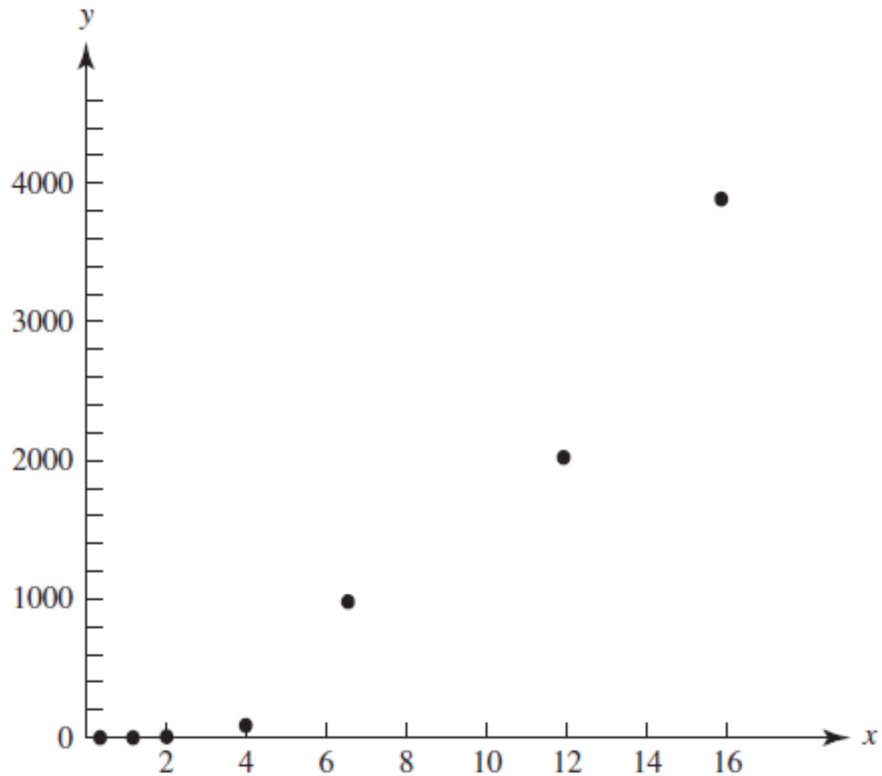


Figure 4.13
Scatterplot of data

$$y = -0.0138x^6 + 0.5084x^5 - 6.4279x^4 + 34.8575x^3 - 73.9916x^2 + 64.3128x - 18.0951$$

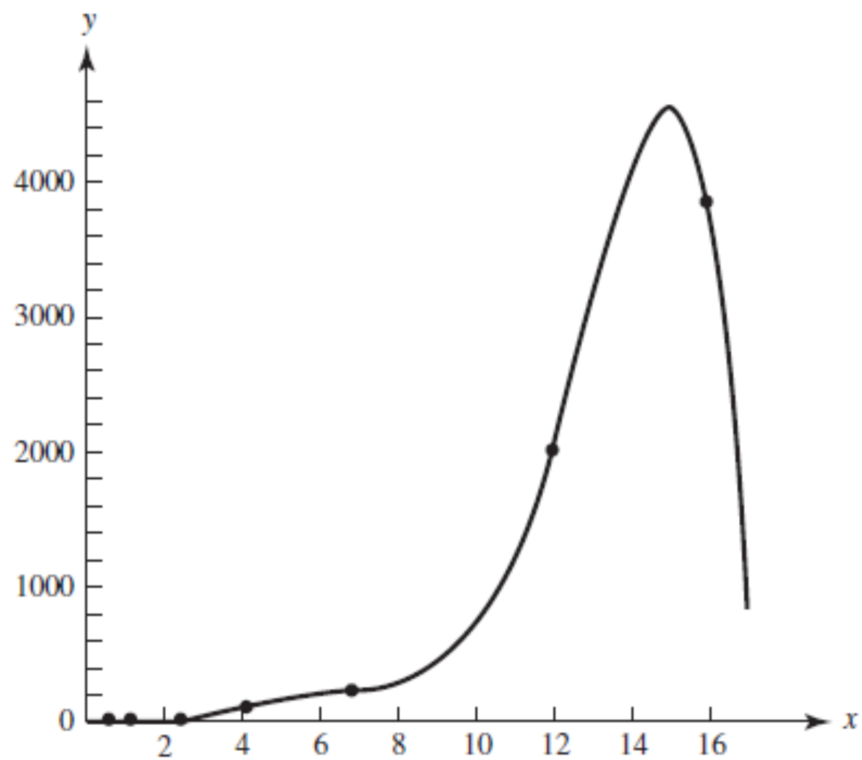


Figure 4.14
The plot of 6th-order polynomial fit superimposed on the scatterplot

O polinômio interpolador apresenta uma oscilação gerando um ponto de máximo entre os últimos pontos.

Considerando os dados abaixo com uma pequena variação no valores de y:

Table 4.11

x_i	0.2	0.3	0.4	0.6	0.9
Case 1: y_i	2.7536	3.2411	3.8016	5.1536	7.8671
Case 2: y_i	2.754	3.241	3.802	5.154	7.867
Case 3: y_i	2.7536	3.2411	3.8916	5.1536	7.8671

Os coeficientes dos polinômio de grau 4 correspondentes:

$$P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

Table 4.12

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Case 1	2	3	4	−1	1
Case 2	2.0123	2.8781	4.4159	−1.5714	1.2698
Case 3	3.4580	−13.2000	64.7500	−91.0000	46.0000

A variação nos coeficientes é significativa, mas o aspecto dos polinômios não varia tanto para os pontos internos os dados que foram usados na construção dos polinômios, conforme se vê no gráfico.

Percebe-se que o problema maior é nos extremos, fora do intervalo. Daí o risco de extrapolação.

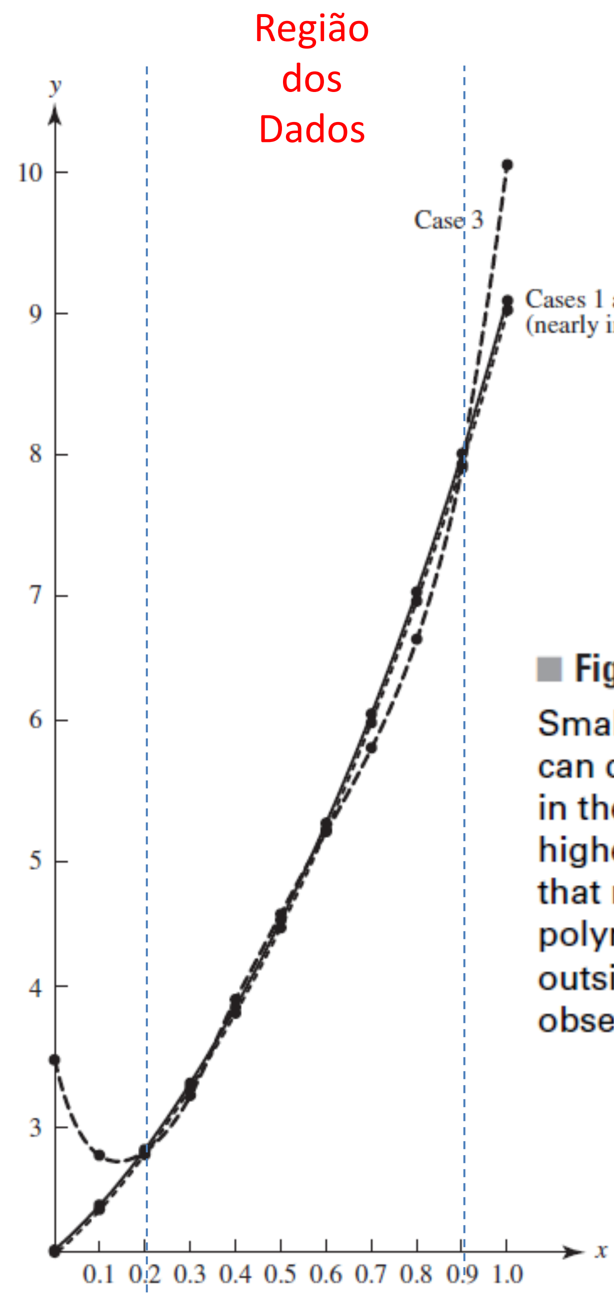


Figure 4.15

Small measurement errors can cause huge differences in the coefficients of the higher-order polynomials that result; note that the polynomials diverge outside the range of observations.

4.3 Smoothing: Low-Order Polynomial Models

Suavização: Polinômios de Baixa Ordem

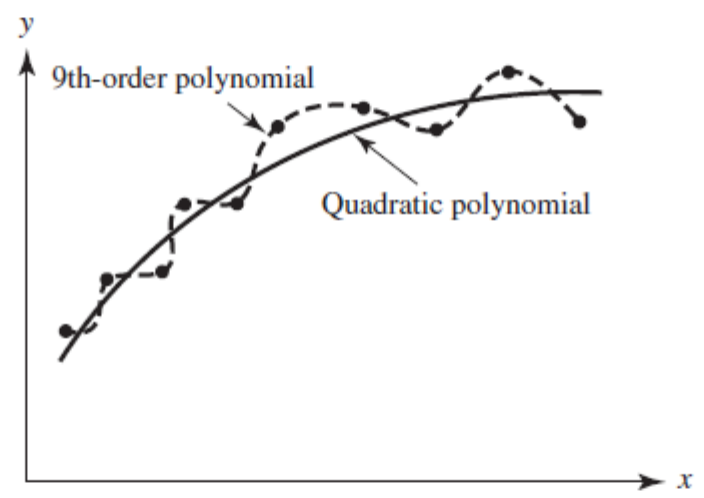
Como já vimos para um número maior de pontos o uso de polinômios interpoladores pode resultar em oscilações.

O recurso natural é usar ajustes polinomiais como vimos anteriormente.

A questão que permanece é qual a ordem mais indicada para realizar a aproximação.

Qual o critério para a escolha da ordem do polinômio ?

Figure 4.16
The quadratic function smooths the data because it is not required to pass through all the data points.



EXAMPLE 1 *Elapsed Time of a Tape Recorder Revisited*

Como vimos na aula passada, para o toca-fitas, os dados parecem não indicar a necessidade de um polinômio de ordem alta.

Ajustando um polinômio de grau 2 por mínimos quadrados.

$$P_2(c) = a + bc + dc^2$$

$$\text{Minimize } S = \sum_{i=1}^{m} \left[t_i - (a + bc_i + dc_i^2)\right]^2$$

A solução do sistema provê os coeficientes

$$\begin{aligned}
ma + \left(\sum c_i\right) b + \left(\sum c_i^2\right) d &= \sum t_i \\
\left(\sum c_i\right) a + \left(\sum c_i^2\right) b + \left(\sum c_i^3\right) d &= \sum c_i t_i \\
\left(\sum c_i^2\right) a + \left(\sum c_i^3\right) b + \left(\sum c_i^4\right) d &= \sum c_i^2 t_i
\end{aligned}$$

Table 4.13 Data collected for the tape recorder problem

c_i	100	200	300	400	500	600	700	800
t_i (sec)	205	430	677	945	1233	1542	1872	2224

Para os dados da tabela:

$$\begin{aligned} 8a + 3600b + 2{,}040{,}000d &= 9128 \\ 3600a + 2{,}040{,}000b + 1{,}296{,}000{,}000d &= 5{,}318{,}900 \\ 2{,}040{,}000a + 1{,}296{,}000{,}000b + 8.772 \times 10^{11} d &= 3{,}435{,}390{,}000 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema

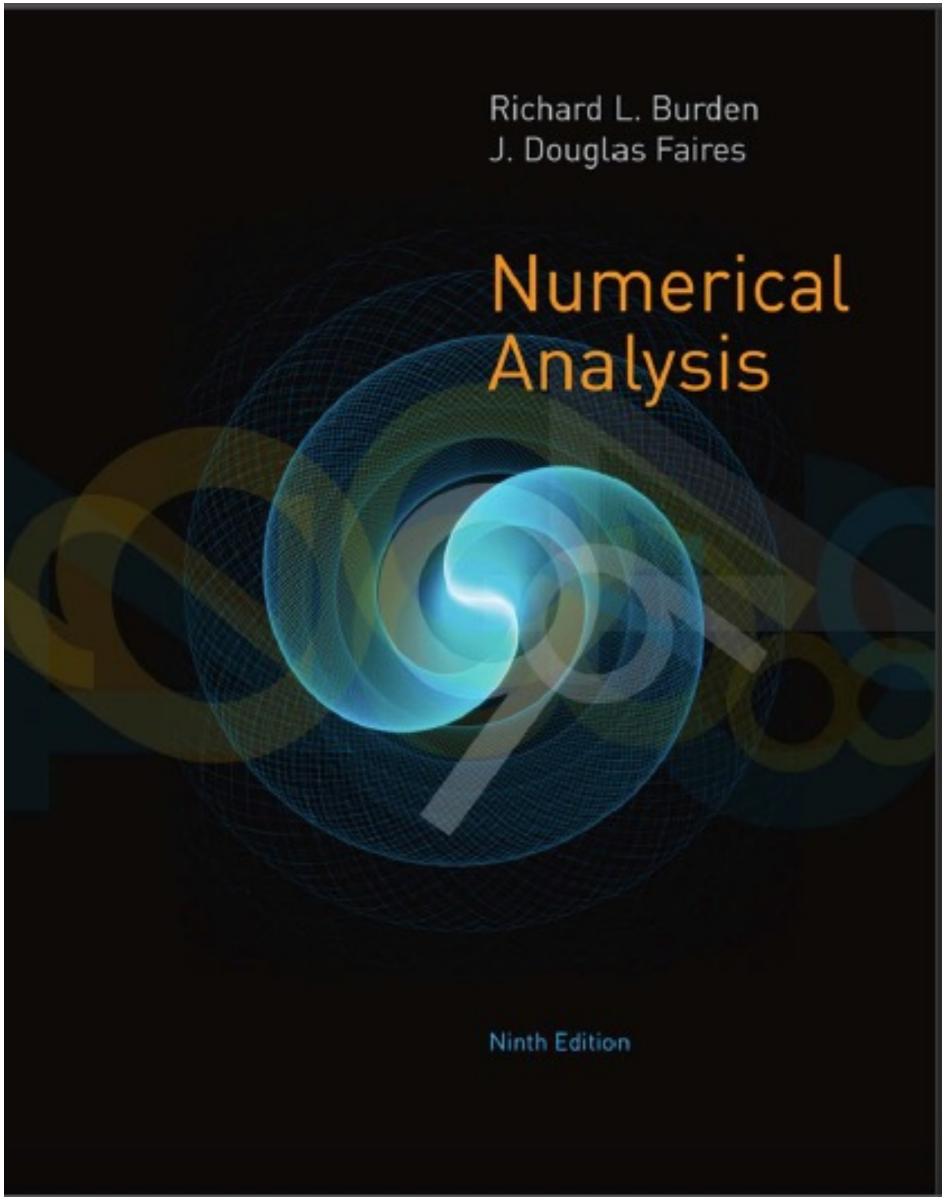
$$P_2(c) = 0.14286 + 1.94226c + 0.00105c^2$$

c_i	100	200	300	400	500	600	700	800
t_i	205	430	677	945	1233	1542	1872	2224
$t_i - P_2(c_i)$	0.167	−0.452	0.000	0.524	0.119	−0.214	−0.476	0.333

Note that the deviations are very small compared to the order of magnitude of the times.

O processo de análise do grau do polinômio interpolador a ser apresentado faz uso das diferenças divididas que também permite a construção de polinômios interpoladores de forma fácil.

Novamente recorreremos a outra referência



3.3 Divided Differences

Diferenças Divididas

Considere essa forma de representação polinomial

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}),$$

Quando $x = x_0$ todos termos de ordem mais alta se cancelam resultando em:

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0).$$

Repetindo o processo para $x = x_1$ podemos encontrar a_1 :

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1);$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

A extensão desse processo permite a construção sucessiva das chamadas diferenças divididas.

Começando com a chamada diferença de ordem zero para o ponto x_i da tabela:

$$f[x_i] = f(x_i).$$

A diferença dividida de 1ª ordem é calculada fazendo:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

A diferença dividida de 2ª ordem é obtida da partir das diferenças de 1ª ordem fazendo:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}.$$

e assim sucessivamente ...

Na representação polinomial considerada, pode-se reconhecer que os coeficientes do polinômio são as respectivas diferenças.

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Os coeficientes $a_0 = f[x_0]$ e $a_1 = f[x_0, x_1]$ já foram identificados, os seguintes seguem a relação:

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

O polinômio de diferenças divididas de Newton tem a forma geral:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}).$$

Uma forma prática de obtenção da diferenças e dos coeficientes do polinômio é construir uma tabela.

Polinômio de grau 1

Table 3.9

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5] = \dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Polinômio de grau 2

Table 3.9

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
			$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$			
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5] = \dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Polinômio de grau 3

Table 3.9

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
			$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$			
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
			$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$			
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5] = \dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Example 1

Table 3.10

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Para simplificar o trabalho vamos usar apenas 3 casas.

Table 3.11

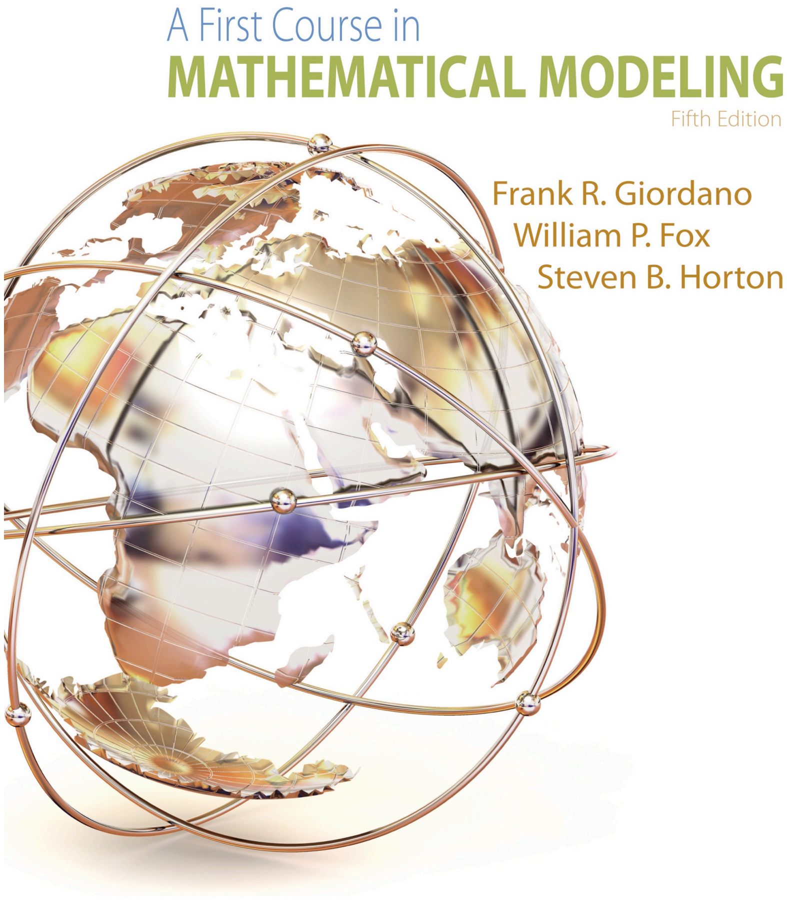
i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			−0.4837057			
1	1.3	0.6200860		−0.1087339		
			−0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
			−0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			−0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

The coefficients of the Newton forward divided-difference form of the interpolating polynomial are along the diagonal in the table. This polynomial is

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) \\ & + 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) \\ & + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9). \end{aligned}$$

Com 5 pontos construímos um polinômio interpolador de grau 4 que interpola valores no intervalo [1.0, 2.2]

Retornando a nossa referência original



Exemplo:

Os dados hipotéticos representam a função $f(x) = x^2$

Table 4.14 A hypothetical set of collected data

x_i	0	2	4	6	8
y_i	0	4	16	36	64

As derivadas são dadas por:

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

Table 4.15 A difference table for the data of Table 4.14

Data		Differences			
x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0				
		4			
2	4		8		
		12		0	
4	16		8		0
		20		0	
6	36		8		
		28			
8	64				

Claramente como a função é quadrática e 3ª derivada será nula:

$f'''(x) = 0$

A 1ª diferença varia linearmente

A 2ª diferença é constante

A 3ª diferença em diante é nula

As diferenças divididas são proporcionais as derivadas da função representada pelos dados, logo são uma boa indicação para a escolha da ordem do polinômio interpolador

EXAMPLE 2 *Elapsed Time of a Tape Recorder Revisited Again*

Usando as diferenças divididas para os dados do toca-fitas.

Table 4.18 A divided difference table for the tape recorder data

Data		Divided differences			
x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
100	205				
		2.2500			
200	430		0.0011		
		2.4700		0.0000	
300	677		0.0011		0.0000
		2.6800		0.0000	
400	945		0.0010		0.0000
		2.8800		0.0000	
500	1233		0.0011		0.0000
		3.0900		0.0000	
600	1542		0.0011		0.0000
		3.3000		0.0000	
700	1872		0.0011		
		3.5200			
800	2224				

A 1ª diferença varia linearmente

A 2ª diferença é constante

A 3ª diferença em diante é nula

Os dados parecem ser bem representados por um polinômio de grau 2.

4.3 PROBLEMS

For the data sets in Problems 1–4, construct a divided difference table. What conclusions can you make about the data? Would you use a low-order polynomial as an empirical model? If so, what order?

1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	2	8	24	56	110	192	308	464

2.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	23	48	73	98	123	148	173	198

3.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	15	33	61	99	147	205	273

4.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	4.5	20	90	403	1808	8103	36,316


12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

P.4.3.1

		0	1a	2a	3a	4a
i	**x**	**f(x)**	**f[x0,x1]**	**f[x0,x1,x2]**	**f[x0,x1,x2,x3]**	**f[x0,x1,x2,x3,x4]**
0	0	2				
			6			
1	1	8		5		
			16		1	
2	2	24		8		0
			32		1	
3	3	56		11		0
			54		1	
4	4	110		14		0
			82		1	
5	5	192		17		0
			116		1	
6	6	308		20		
			156			
7	7	464				
		a0	**a1**	**a2**	**a3**	
		2	6	5	1	
			(x-0)	(x-0)(x-1)	(x-0)(x-1)(x-2)	
	P(x)	**2+6x+5x(x-1)+x(x-1)(x-2)**				

Fim Aula 15