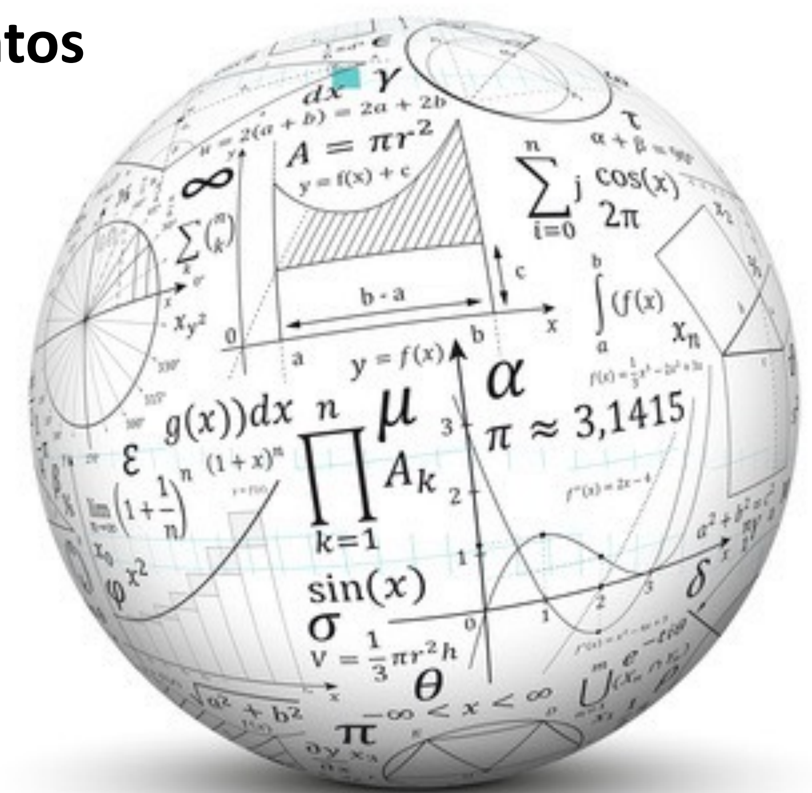
MAP 2110 – Modelagem e Matemática

1º Semestre - 2023

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



Revisitando um Problema da Aula Passada

9. The following data measure two characteristics of a ponderosa pine. The variable X is the diameter of the tree, in inches, measured at breast height; Y is a measure of volume—the number of board feet divided by 10. Fit a model to the data. Then express Y in terms of X.

Diameter and volume for 20 ponderosa pine trees

Observation number	X	Y	Observation number	X	Y
1	36	192	11	31	141
2	28	113	12	20	32
3	28	88	13	25	86
4	41	294	14	19	21
5	19	28	15	39	231
6	32	123	16	33	187
7	22	51	17	17	22
8	38	252	18	37	205
9	25	56	19	23	57
10	17	16	20	39	265

Sugestão: Ordene a tabela

1) Ordenando os dados e fazendo a média dos valores do volume para os diâmetros repetidos:

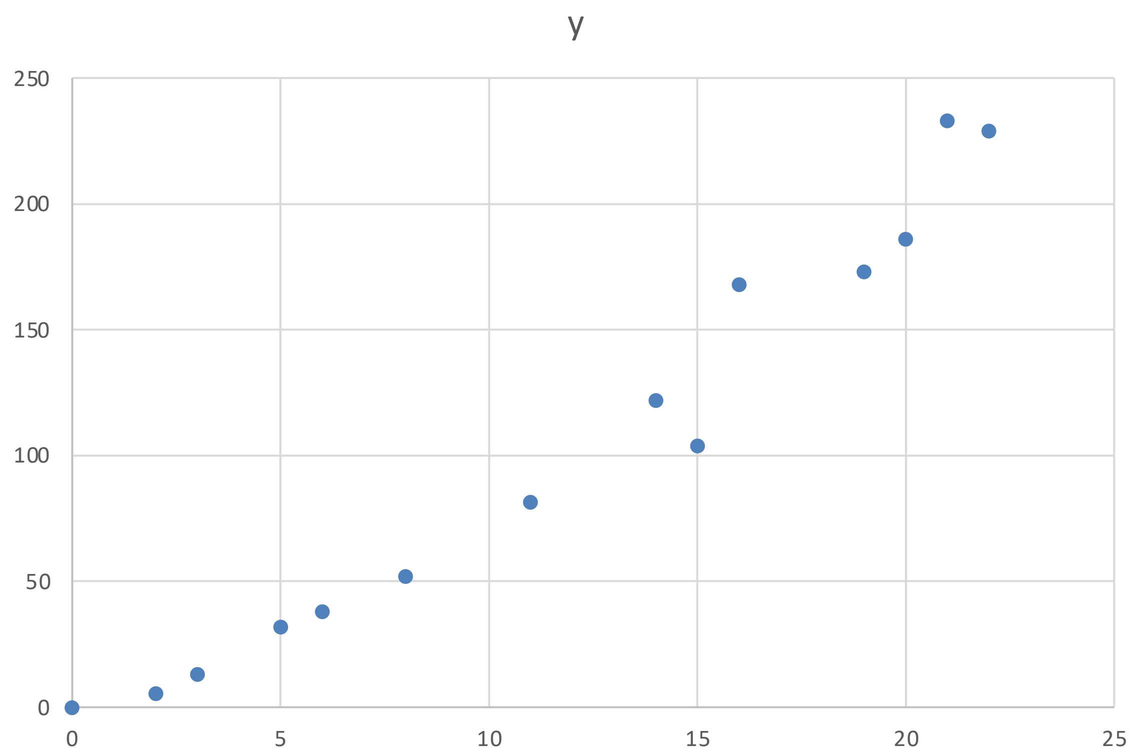
D	Vol	x	y
17	19	0	0
19	24,5	2	5,5
20	32	3	13
22	51	5	32
23	57	6	38
25	71	8	52
28	100,5	11	81,5
31	141	14	122
32	123	15	104
33	187	16	168
36	192	19	173
37	205	20	186
38	252	21	233
39	248	22	229

2) Para permitir o ajuste de parâmetro único os valores do diâmetro e volume foram transformados :

$$x = D - D_0$$

$$y = Vol - Vol_0$$

3) Uma 1ª possibilidade é tentar uma reta:



4) Usando a expressão para ajuste linear de parâmetro único:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n}{\sum_{i=1}^{m} x_i^{2n}}$$

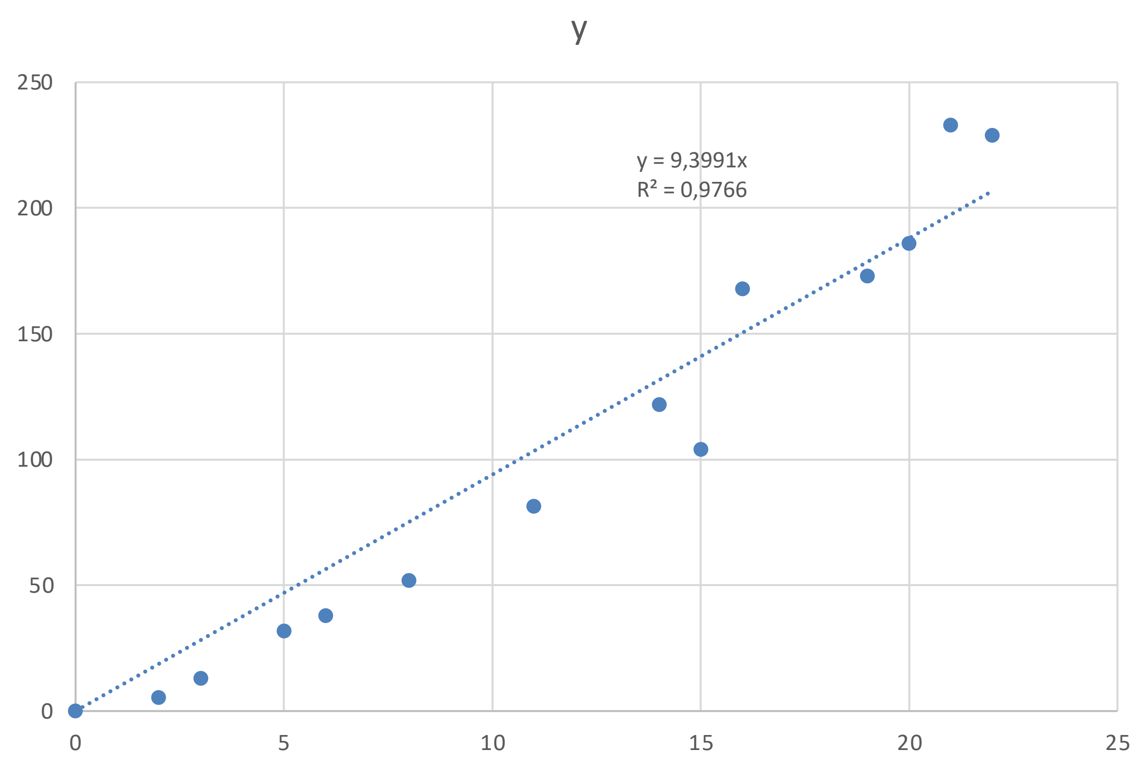
x	y	x^2	yx	g	y-g	(y-g)^2
0	0	0	0	0,00	0,00	0
2	5,5	4	11	18,80	-13,30	176,8433
3	13	9	39	28,20	-15,20	230,96
5	32	25	160	47,00	-15,00	224,8684
6	38	36	228	56,39	-18,39	338,3663
8	52	64	416	75,19	-23,19	537,9144
11	81,5	121	896,5	103,39	-21,89	479,1875
14	122	196	1708	131,59	-9,59	91,92436
15	104	225	1560	140,99	-36,99	1368,026
16	168	256	2688	150,39	17,61	310,2542
19	173	361	3287	178,58	-5,58	31,17361
20	186	400	3720	187,98	-1,98	3,930132
21	233	441	4893	197,38	35,62	1268,672
22	229	484	5038	206,78	22,22	493,6972
						S
						5555,82

A norma do resíduo ao quadrado pode ser calculada

Sx^2	Syx
2622	24644,5
k	9,399123

O coeficiente foi encontrado

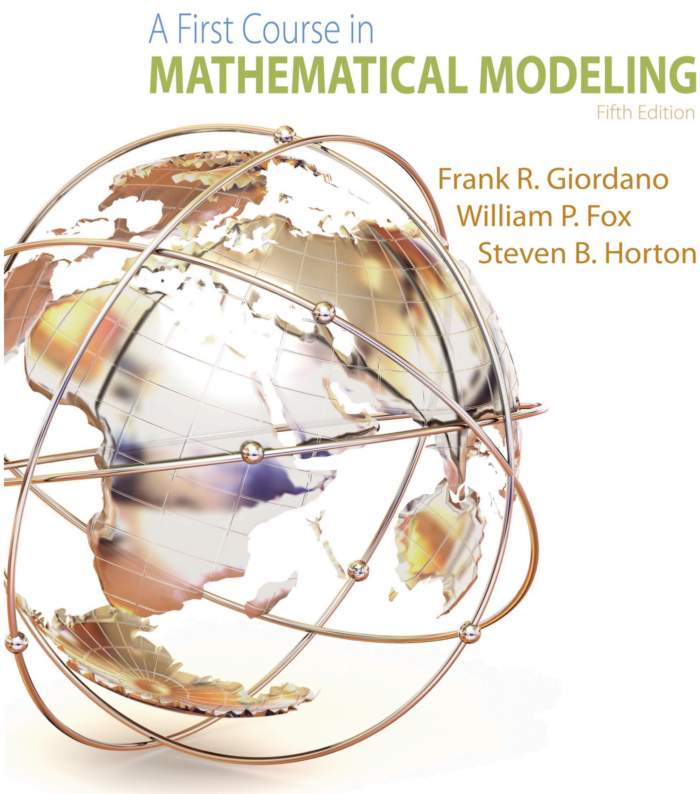
Para conferência os gráfico e os dados do ajuste no Excel são:

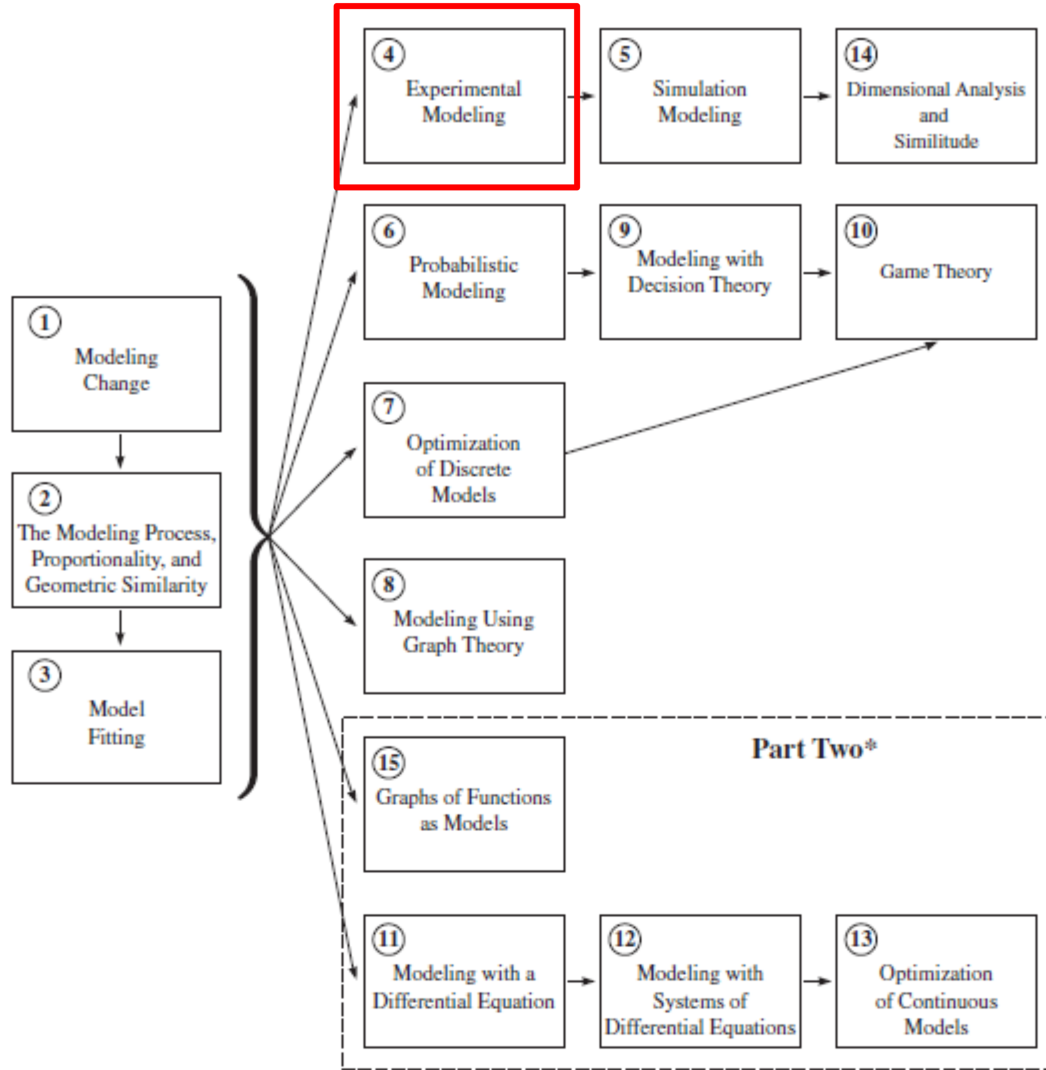


Percebe-se que o valor do coeficiente está correto.

Como exercício adicional tente um ajuste exponencial com dois parâmetros.

MAP2110 – aula 14





*Part Two requires single-variable calculus as a corequisite.

AJUSTE

INTERPOLAÇÃO

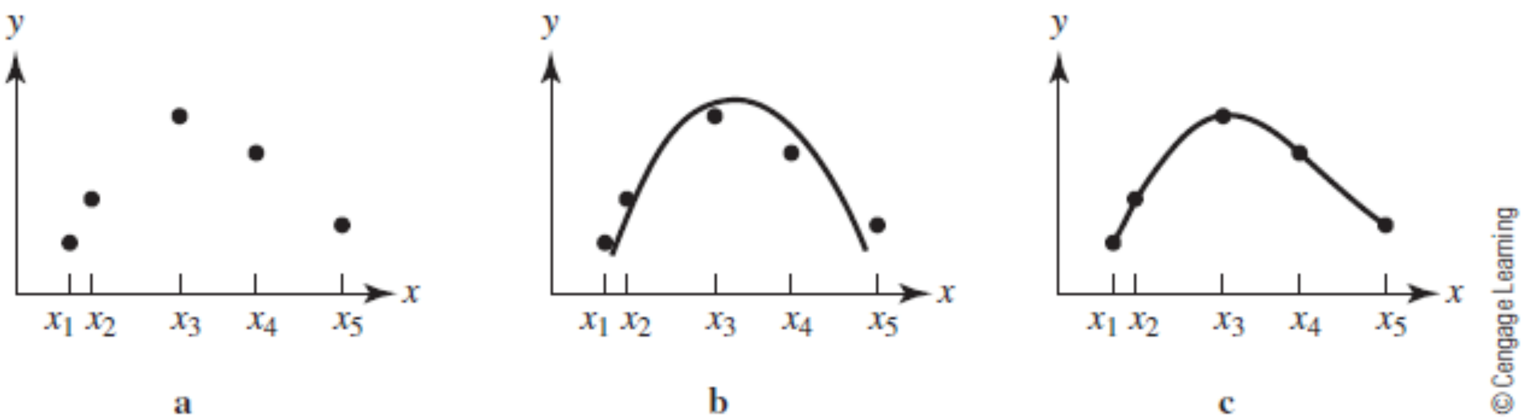


Figure 4.1

If the modeler expects a quadratic relationship, a parabola may be fit to the data, as in b. Otherwise, a smooth curve may be passed through the points, as in c.

Interpolação polinomial

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Definição

Denomina-se **interpolação polinomial** o processo matemático de interpolação em que a função interpoladora é um polinômio. A função interpoladora é a função $p(x)$.

Definidos um intervalo $[a;b] \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, denomina-se **interpolação** o processo matemático de avaliar $f(x), \forall x \in [a;b]$, substituindo-se a função $f(x)$ pela função interpoladora $p(x)$, de modo que $p(x_i) = f(x_i), \forall i \in [1;n]$ ($\subset \mathbb{N}$).

Assim, $f(x)$ é a função real, definida em $[a;b] \subset \mathbb{R}$, da qual conhecem-se os valores nos pontos de abcissas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \in [a;b], \forall i \in [1;n]$ ($\subset \mathbb{N}$).

Dada uma tabela de pontos que representa a relação ser modelada:

$$(x_1, y_1); (x_2, y_2); \cdots (x_n, y_n)$$

E a forma geral do polinômio de grau n-1:

$$p(x) = a_0 + a_1\mathrm{x} + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

A condição de que o polinômio deve passar pelos pontos da tabela produz sistema de dimensão n:

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1}$$

$$y_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1}$$

A solução do sistema produz os coeficientes do polinômio.

EXAMPLE 1 *Elapsed Time of a Tape Recorder*

Os antigos gravadores em fita tinham contadores que correspondiam ao tempo

Thus, let c_i represent the counter reading and t_i (sec) the corresponding amount of elapsed time. Consider the following data:

c_i	100	200	300	400	500	600	700	800
t_i (sec)	205	430	677	945	1233	1542	1872	2224

Para os 8 pontos da tabela é possível construir um polinômio de grau 7, passando por todos os pontos:

$$P_7(c) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3 + a_4 c^4 + a_5 c^5 + a_6 c^6 + a_7 c^7$$

O sistema teria a forma:

$$\begin{aligned}
205 &= a_0 + 1a_1 + 1^2 a_2 + 1^3 a_3 + 1^4 a_4 + 1^5 a_5 + 1^6 a_6 + 1^7 a_7 \\
430 &= a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 + 2^4 a_4 + 2^5 a_5 + 2^6 a_6 + 2^7 a_7 \\
&\vdots \\
2224 &= a_0 + 8a_1 + 8^2 a_2 + 8^3 a_3 + 8^4 a_4 + 8^5 a_5 + 8^6 a_6 + 8^7 a_7
\end{aligned}$$

Implementando a solução no Excel

(https://www.excel-easy.com/examples/system-of-linear-equations.html)

c	t													
1	205		A	1	1	1	1	1	1	1	1		B	205
2	430			1	2	4	8	16	32	64	128			430
3	677			1	3	9	27	81	243	729	2187			677
4	945			1	4	16	64	256	1024	4096	16384			945
5	1233			1	5	25	125	625	3125	15625	78125			1233
6	1542			1	6	36	216	1296	7776	46656	279936			1542
7	1872			1	7	49	343	2401	16807	117649	823543			1872
8	2224			1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152			2224
			A Inversa	8	-28	56	-70	56	-28	8	-1		X	-14,00000
				-13,74	62,1	-133,5	172,75	-141	71,4333	-20,6	2,59286			232,91190
				9,6944	-50,981	119,55	-161,89	135,861	-70,125	20,4944	-2,60556			-29,08333
				-3,656	21,235	-53,6	76,3403	-66,278	35,0375	-10,4222	1,34306			19,78472
				0,7986	-4,9722	13,313	-19,889	17,9236	-9,75	2,96528	-0,38889			-5,35417
				-0,101	0,6639	-1,863	2,90278	-2,7153	1,525	-0,47639	0,06389			0,80139
				0,0069	-0,0472	0,1375	-0,2222	0,21528	-0,125	0,04028	-0,00556			-0,06250
				-2E-04	0,0014	-0,004	0,00694	-0,0069	0,00417	-0,00139	0,0002			0,00198

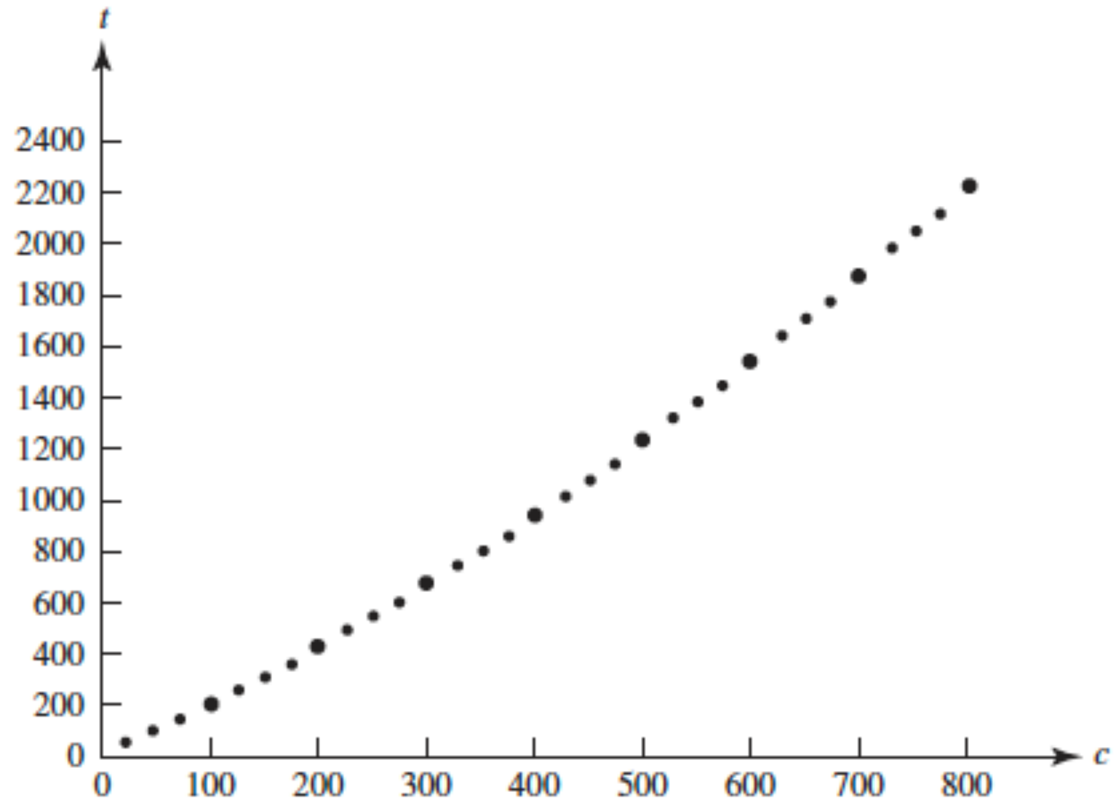
Obtemos os mesmos coeficientes da referência:

$$a_0 = -13.9999923 \qquad a_4 = -5.354166491$$
$$a_1 = 232.9119031 \qquad a_5 = 0.8013888621$$
$$a_2 = -29.08333188 \qquad a_6 = -0.0624999978$$
$$a_3 = 19.78472156 \qquad a_7 = 0.0019841269$$

Por construção o polinômio passa por todos os pontos da tabela.

c_i	100	200	300	400	500	600	700	800
t_i	205	430	677	945	1233	1542	1872	2224
$P_7(c_i)$	205	430	677	945	1233	1542	1872	2224

Figure 4.11
An empirical model for predicting the elapsed time of a tape recorder



a) Revendo os coeficientes percebe-se que a partir de a4 há uma queda nítida no valor, o que indica ser possível trabalhar com um polinômio aproximado de grau menor

$$
\begin{aligned}
a_0 &= -13.9999923 & \quad a_4 &= -5.354166491 \\
a_1 &= 232.9119031 & \quad a_5 &= 0.8013888621 \\
a_2 &= -29.08333188 & \quad a_6 &= -0.0624999978 \\
a_3 &= 19.78472156 & \quad a_7 &= 0.0019841269
\end{aligned}
$$

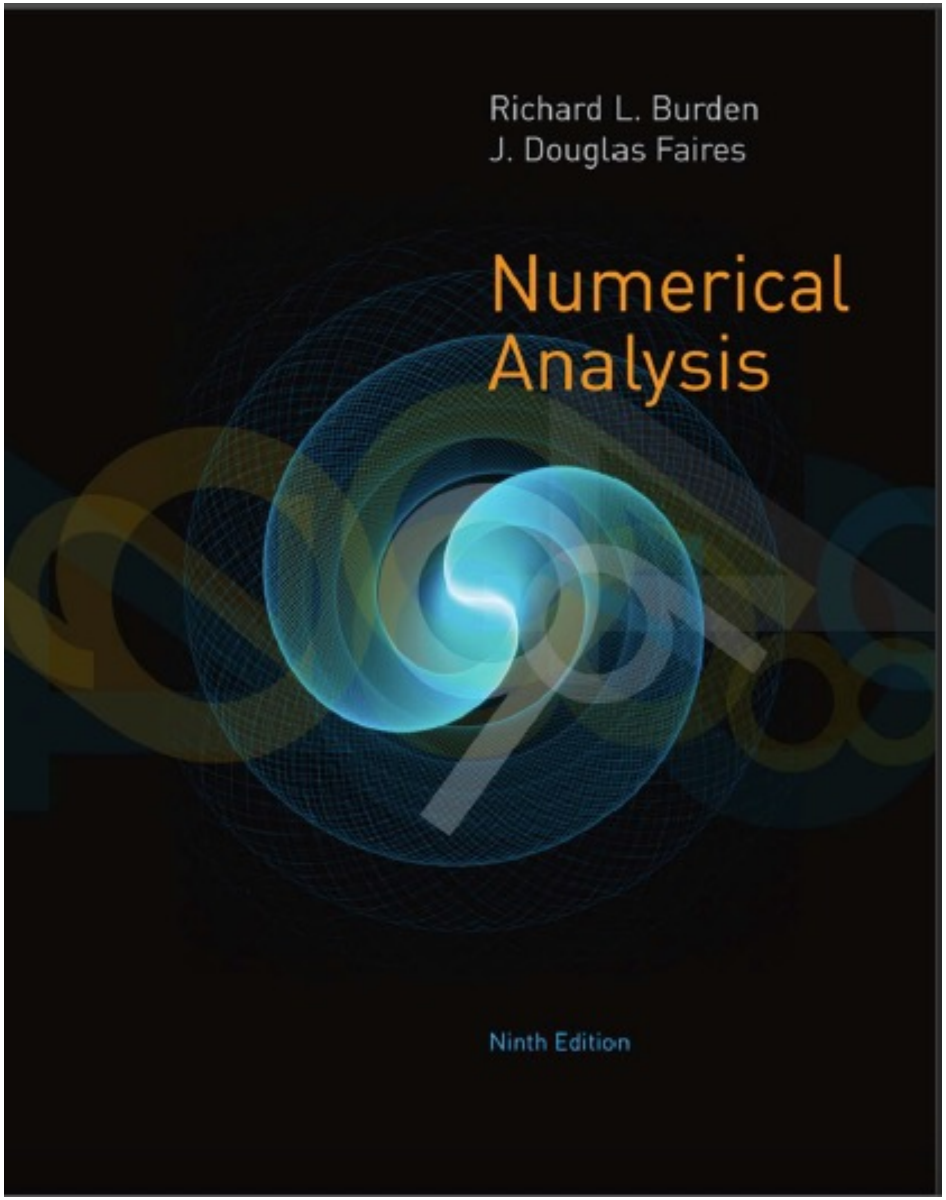
b) Para um no. grande de pontos o polinômio do alta ordem pode exibir oscilações.

c) Resolver sistemas grandes é trabalhoso

A aula de hoje vai se dedicar ao item c) ou itens a) e b) serão tratados na próxima aula.

Uma alternativa para a construção do polinômio interpolador sem recorrer ao uso da solução de sistemas lineares são os chamados polinômios de Lagrange.

Para apresentar o tema usaremos outra referência:



CHAPTER 3

Interpolação e Aproximação Polinomial

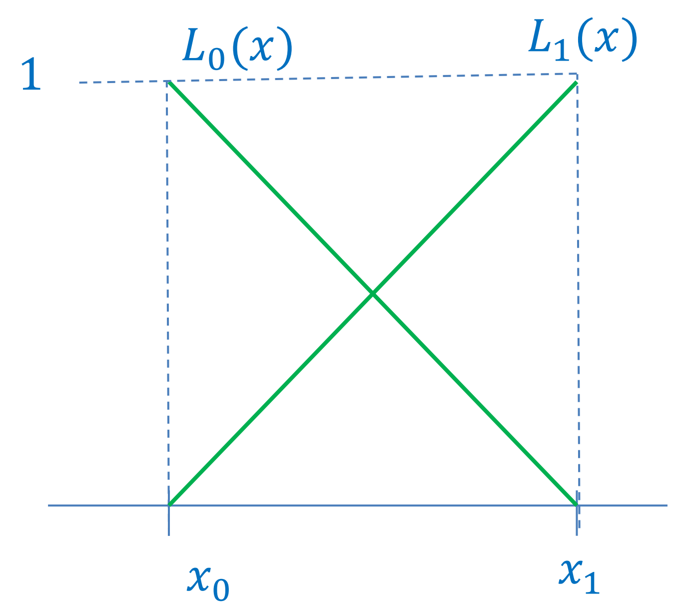
Interpolation and Polynomial Approximation

Considere inicialmente um par de pontos:

x	y
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$

Pode-se propor um par de polinômios lineares elementares, entre esses pontos, da forma:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$



Perceba que as seguintes relações são verdadeiras:

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0,$$

$$L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1,$$

Um polinômio interpolador de Lagrange, pode ser construído combinando os polinômios lineares elementares na forma:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Isso implica que:

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

Como $P(x)$ é linear, ele é o único polinômio linear que passa por y_0 e y_1.

$$P(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) = \frac{-(x-x_1)}{(x_1-x_0)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) =$$

$$\frac{-(x-x_1)f(x_0)+(x-x_0)f(x_1)}{(x_1-x_0)} =$$

$$\frac{x\big(f(x_1)-f(x_0)\big)+x_1 f(x_0)-x_0 f(x_1)}{(x_1-x_0)} =$$

$$\frac{\big(f(x_1)-f(x_0)\big)}{(x_1-x_0)} x + \frac{x_1 f(x_0)-x_0 f(x_1)}{(x_1-x_0)}$$

Que coincide com a construção usando a solução analítica do sistema linear (verifique!)

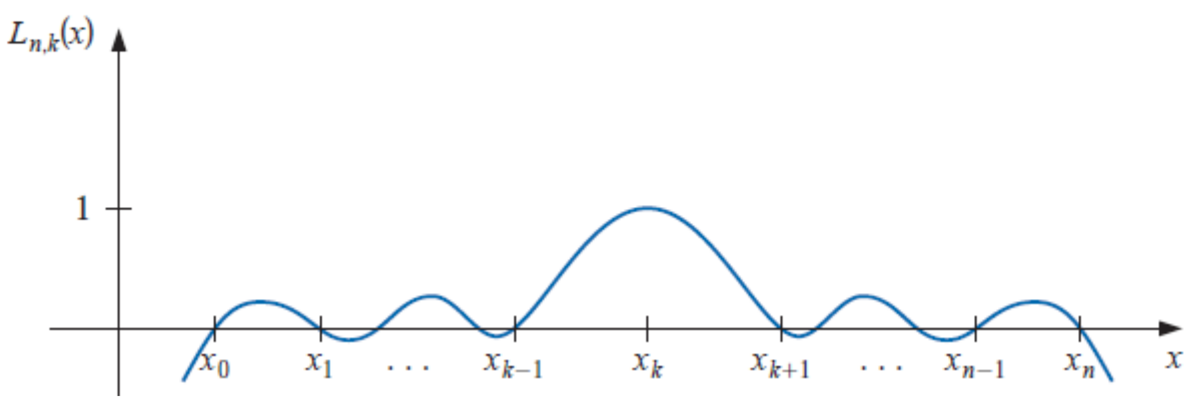
O conceito pode ser generalizado para construir polinômios de grau n para $n+1$ pontos

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}.$$

No denominador x_k aparece em cada fator

No numerador falta o fator em x_k

Isso garante que o polinômio seja 1 em x_k e 0 para todos os outros pontos



Um polinômio interpolador de Lagrange de de grau n passando por $n+1$ pontos pode ser construído na forma:

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

onde os polinômios elementares tem a forma:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$
$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}.$$

Example 2

(a) Use the numbers (called *nodes*) $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$, and $x_2 = 4$ to find the second Lagrange interpolating polynomial for $f(x) = 1/x$.

(b) Use this polynomial to approximate $f(3) = 1/3$.


12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Solution (a) We first determine the coefficient polynomials $L_0(x)$, $L_1(x)$, and $L_2(x)$. In nested form they are

$$L_0(x) = \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4),$$
$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4),$$

and

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75).$$

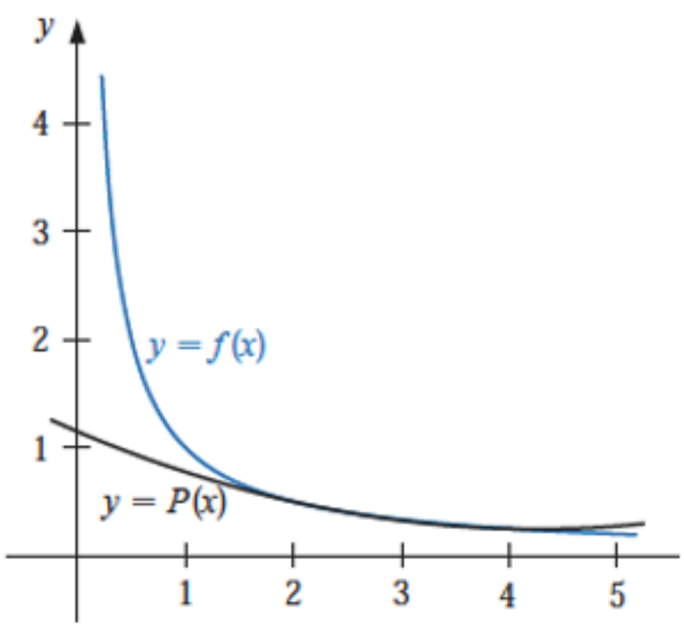
Also, $f(x_0) = f(2) = 1/2$, $f(x_1) = f(2.75) = 4/11$, and $f(x_2) = f(4) = 1/4$, so

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_k(x) \\ &= \frac{1}{3}(x-2.75)(x-4) - \frac{64}{165}(x-2)(x-4) + \frac{1}{10}(x-2)(x-2.75) \\ &= \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}. \end{aligned}$$

v

(b) An approximation to $f(3) = 1/3$ (see Figure 3.6) is

$$f(3) \approx P(3) = \frac{9}{22} - \frac{105}{88} + \frac{49}{44} = \frac{29}{88} \approx 0.32955.$$



EXERCISE SET 3.1

1. For the given functions $f(x)$, let $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$, and $x_2 = 0.9$. Construct interpolation polynomials of degree at most one and at most two to approximate $f(0.45)$, and find the absolute error.

   a. $f(x) = \cos x$

   b. $f(x) = \sqrt{1+x}$

   c. $f(x) = \ln(x+1)$

   d. $f(x) = \tan x$

x	y
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$

x_0, f_0
x_1, f_1
x_2, f_2

$$P(x) = L_0\, f_0 + L_1\, f_1 + L_2\, f_2$$

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Matéria Prima

$(x_0 - x_1)$ $(x - x_0)$

$(x_0 - x_2)$ $(x - x_1)$ $\Rightarrow$ L_0, L_1, L_2 $\Rightarrow$ $P(x)$

$(x_1 - x_2)$ $(x - x_2)$

5. Use appropriate Lagrange interpolating polynomials of degrees one, two, and three to approximate each of the following:

a. $f(8.4)$ if $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$

b. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ if $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$

c. $f(0.25)$ if $f(0.1) = 0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

d. $f(0.9)$ if $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

Adequado quer dizer que o valor interpolado deve estar contido no intervalo usado para construir o polinômio interpolador

Fim Aula 14