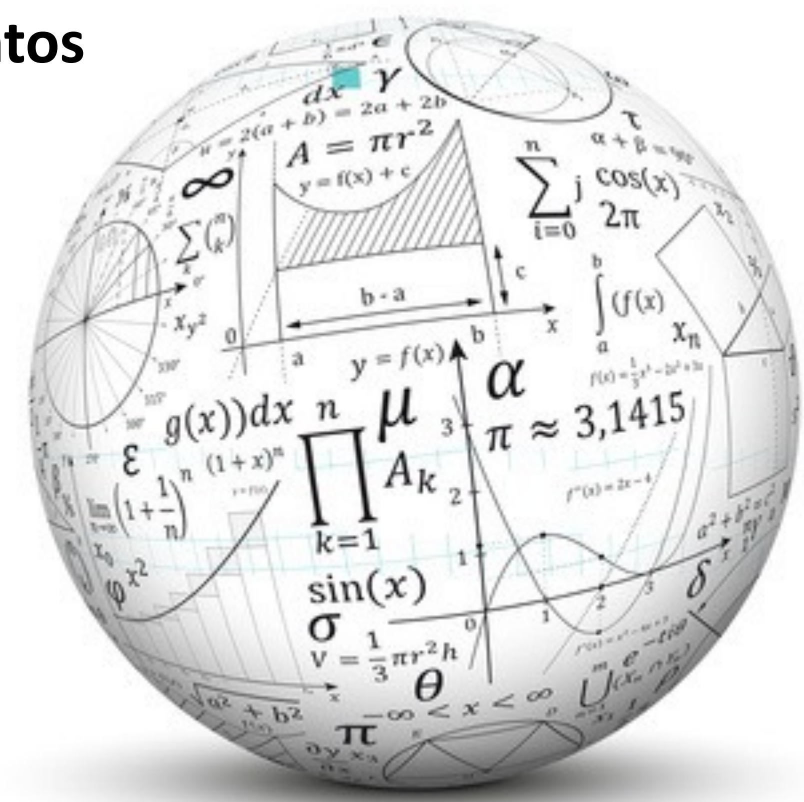
MAP 2110 – Modelagem e Matemática

1º Semestre - 2023

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



Exercício – Aula Passada

Dada a tabela de pontos:

x	**y**
1,25	0,031
1,50	0,177
2,00	1,000
3,00	5,657

encontre o valor interpolado de y para x = 1,75 :

a) Por interpolação linear

b) Por interpolação quadrática para cada uma das parábolas possíveis.

c) A tabela foi construída usando a função $y = (x-1)^{\frac{5}{2}}$. Compare os erros de interpolação. O que voce pode concluir ?

a) Por interpolação linear

$$y = ax + b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

$$a = \frac{0.177 - 1.000}{1.50 - 2.0} = \frac{-0.823}{-0.5} = 1.646$$

$$b = \frac{1.50 * 1.000 - 2.0 * 0.177}{1.50 - 2.0} = \frac{1.146}{-0.5} = -2.292$$

O valor previsto por interpolação linear é:

$$y = 1.646 * 1.75 - 2.292 = 0.588$$

b) Por interpolação quadrática para cada uma das parábolas possíveis.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

Dica: se reorganizarmos as equações

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \qquad c + bx_1 + ax_1^2 = y_1$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \quad \Rightarrow \quad c + bx_2 + ax_2^2 = y_2$$

$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \qquad c + bx_3 + ax_3^2 = y_3$$

A forma matrical pode ser escrita agora na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ b \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

A mudança de colunas permuta as variáveis.

Nessa forma conseguimos facilmente eliminar os elementos abaixo da diagonal da 1a coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ b \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 \end{Bmatrix}$$

Pode não ser muito, mas já ajuda a economizar algumas contas, acelerando o escalonamento.

Importante perceber a ordem dos coeficientes invertida em relação a ordem alfabética inicial.

Cuidado para não se confundir !

Substituindo para os primeiros três pontos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.25 & (1.25)^2 \\ 0 & 1.50-1.25 & (1.50)^2-(1.25)^2 \\ 0 & 2.0-1.25 & (2.0)^2-(1.25)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ b \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.031 \\ 0.177-0.031 \\ 1.000-0.031 \end{Bmatrix}$$

Resulta em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.25 & 1.5625 \\ 0 & 0.25 & 0.6875 \\ 0 & 0.75 & 2.4375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ b \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.031 \\ 0.146 \\ 0.969 \end{Bmatrix}$$

Fazendo $L_3 - \left(\frac{0.75}{0.25}\right) * L_2$ que corresponde a $L_3 - 3 * L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.25 & 1.5625 \\ 0 & 0.25 & 0.6875 \\ 0 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ b \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.031 \\ 0.146 \\ 0.531 \end{Bmatrix}$$

Fazendo a substituição reversa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.25 & 1.5625 \\ 0 & 0.25 & 0.6875 \\ 0 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ b \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.031 \\ 0.146 \\ 0.531 \end{Bmatrix}$$

$$a = \frac{0.531}{0.375} = 1.416$$

$$b = \frac{0.146 \ - 0.6875 * 1.416}{0.25} = -3.31$$

$$c = 0.031 - 1.25 * (-3.31) - 1.5625 * 1.416 = 1.956$$

O valor previsto por interpolação quadrática (para os 3 primeiros pontos) é:

$$y = 1.416 * (1.75)^2 - 3.31 * 1.75 + 1.956 = 0.500$$

c) A tabela foi construída usando a função $y = (x-1)^{\frac{5}{2}}$. Compare os erros de interpolação. O que voce pode concluir ?

O valor que seria o correspondente a utilizando a função que produziu os dados é:

$$y = (x-1)^{\frac{5}{2}} = (1.75-1)^{\frac{5}{2}} = 0.4871$$

Comparando com os valores encontrados

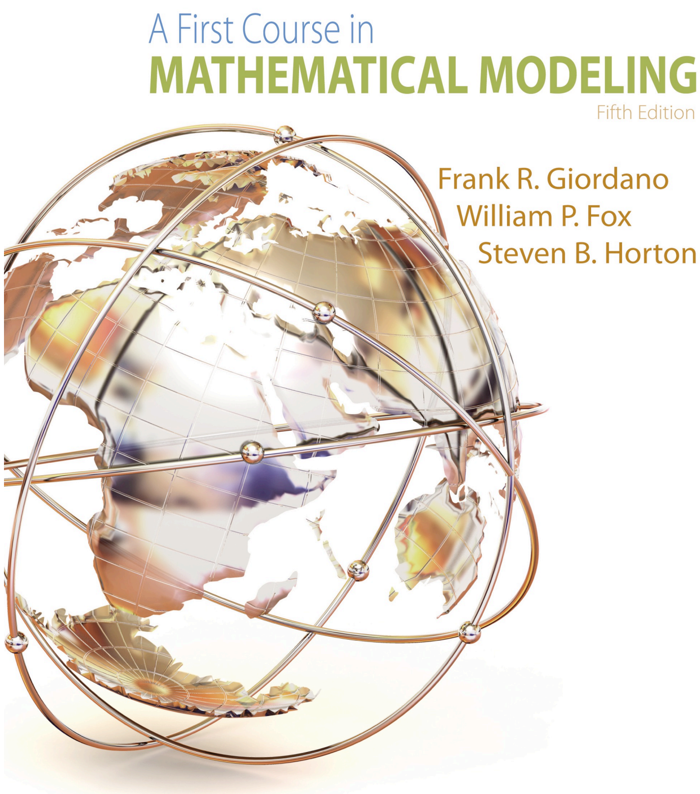
Linear: $y = 0.588$

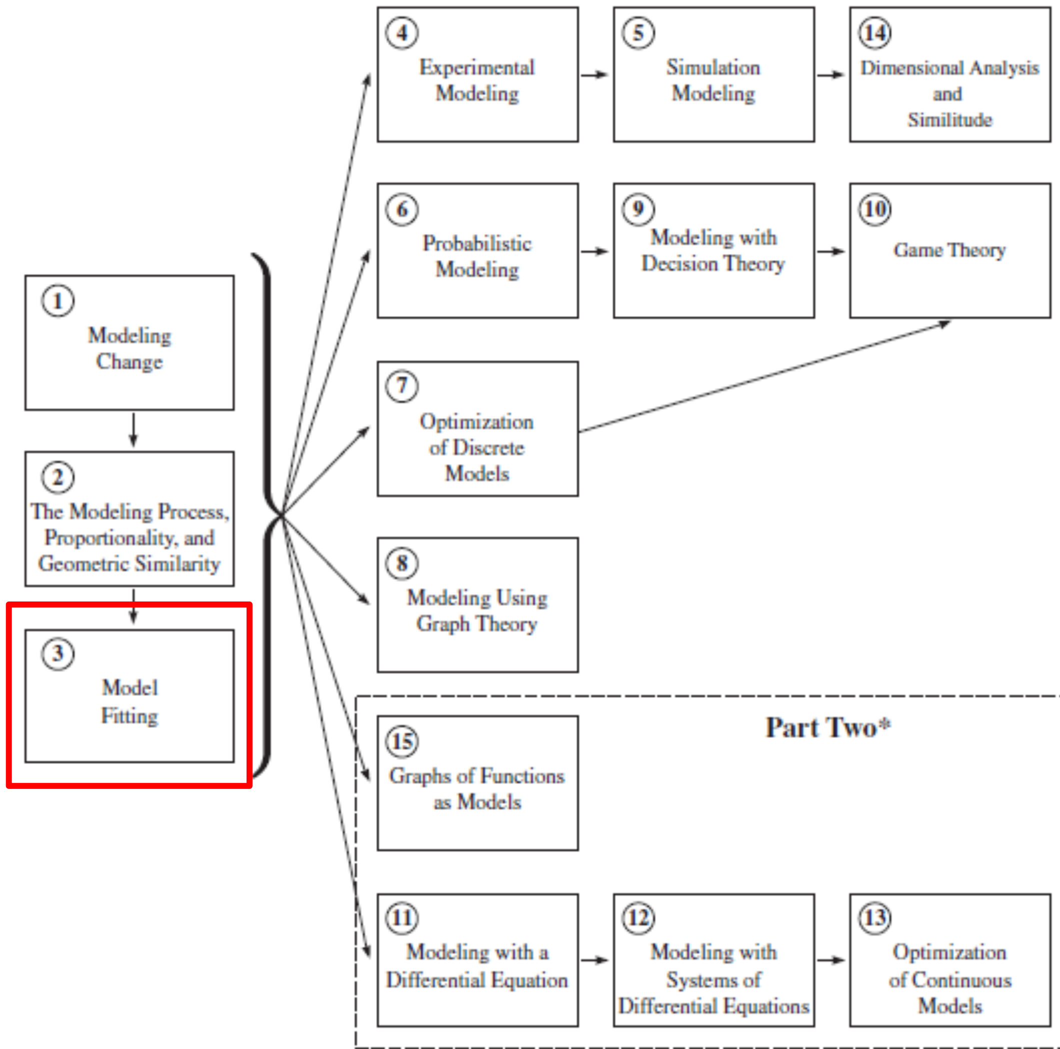
Quadrática: $y = 0.500$

Percebe-se que o erro da interpolação quadrática é menor.

Repita a interpolação quadráticas usando o 2o, 3o e 4o pontos, como treino, e compare.

MAP2110 – aula 11





*Part Two requires single-variable calculus as a corequisite.

Quando se dispõe de um conjunto de dados tabelados, que representa alguma relação entre grandezas de interesse, pode-se em geral realizar algumas tarefas na sequência:

1. Ajustar um modelo (ou modelos) aos dados.

2. Escolher dentre diferentes modelos qual melhor se ajusta aos dados.

3. Fazer previsões a partir dos dados (através do modelo).

Pergunta: Existe a necessidade de modelar "perfeitamente" os dados tabelados ?

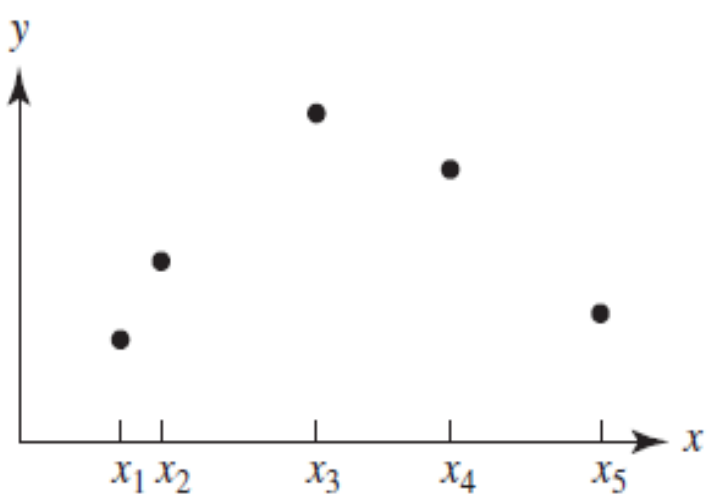
interpolação

in.ter.po.la.ção ● ĩtərpulɐ'sɐ̃w̃

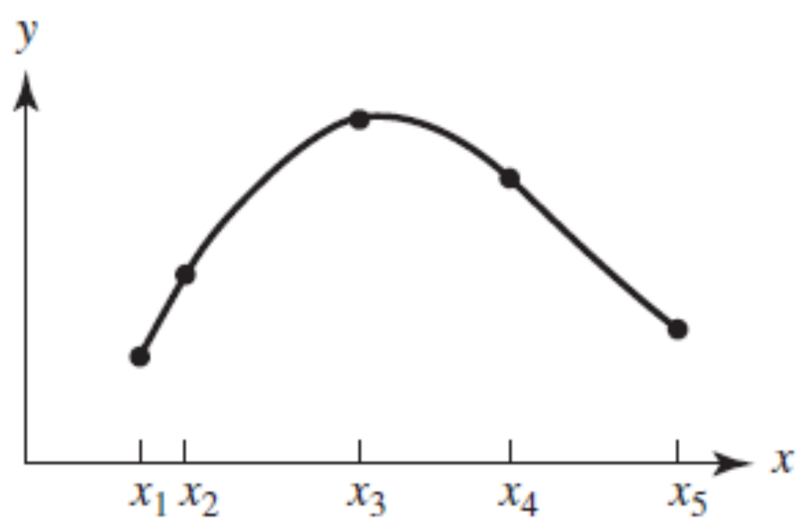
nome feminino

7. MATEMÁTICA processo de achar o valor de uma função entre dois valores conhecidos por um processo diverso da lei que é dada pela própria função

Observations relating the variables *y* and *x*



Interpolating the data using a smooth polynomial

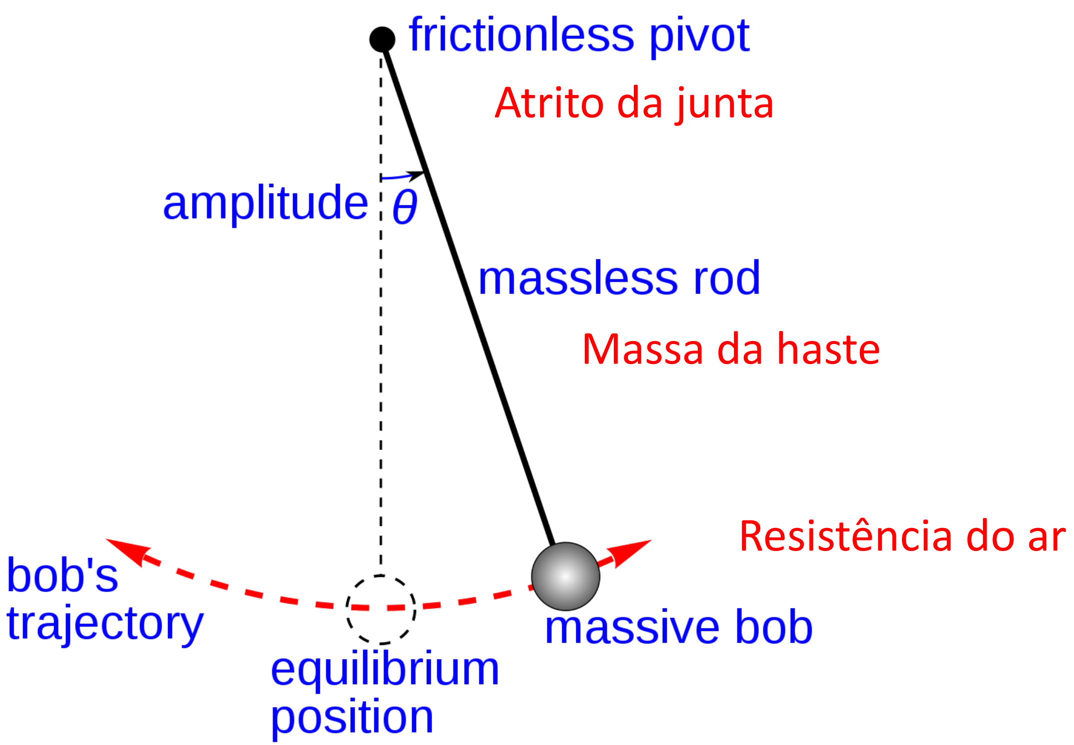


Na construção de polinômios interpoladores a premissa de construção é que o erro seja nulo para os dados tabelados.

O processo de modelagem tem diversos tipos de erro, alguns ligados a obtenção dos dados e outros dos processos numéricos.

Fontes de Erro do Processo de Modelagem

- Erros de Formulação: A relação entre as variáveis de interesse pode ser mais complexa do que a proposta. Efeitos são negligenciados e simplificados.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Fontes de Erro do Processo de Modelagem

- Erros de Truncamento: São erros numéricos onde se substitui funções mais complexas por suas aproximações em série tanto na construção do modelo quanto na implementação intrínseca dos dispositivos de cálculo.

- Os dispositivos de cálculo (calculadoras e computadores) usam aproximações em série (não é exatamente a série de Taylor, que aparece aqui apenas como ilustração).

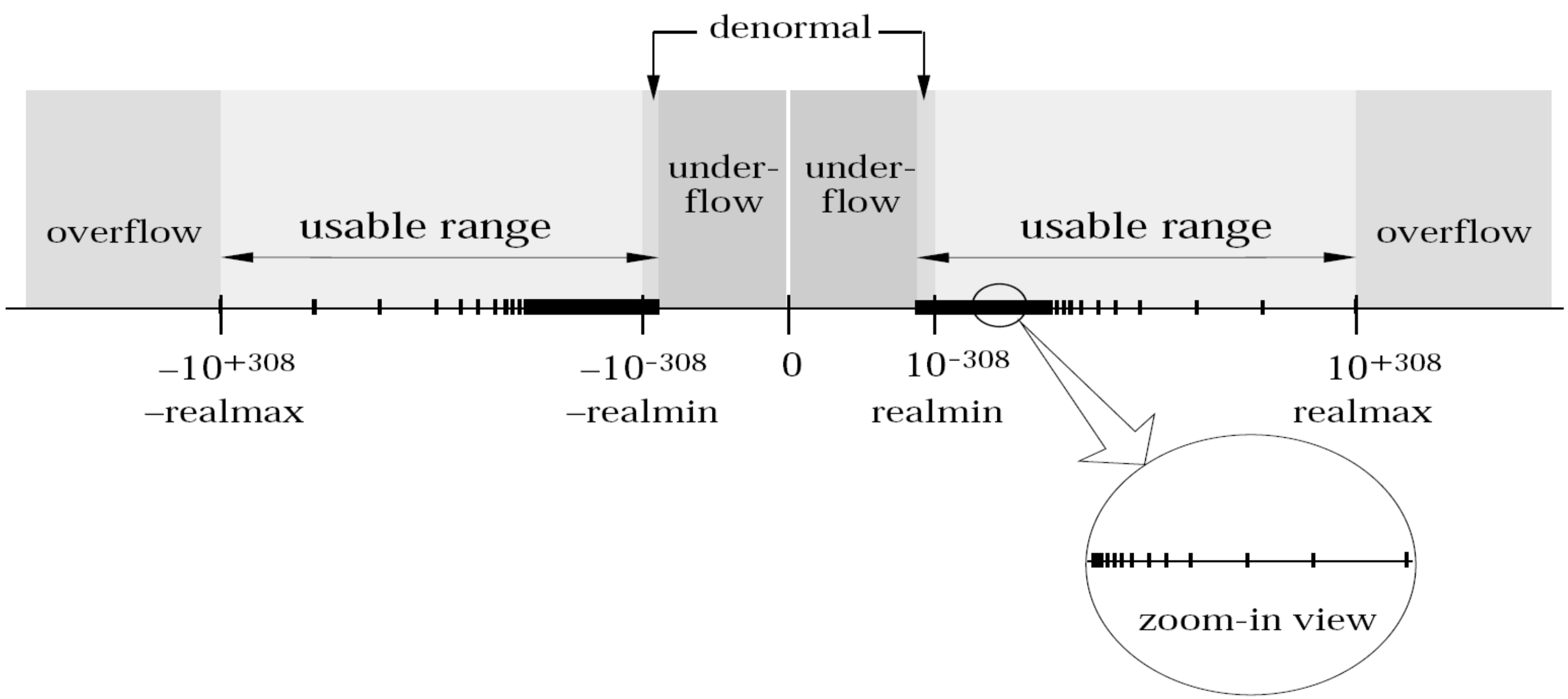
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Até onde vai o ∞ ?

Fontes de Erro do Processo de Modelagem

- Erros de Arredondamento: O cálculo manual em geral reduz o número de casas decimais a cada passo dependendo da escolha do usuário. Os dispositivos digitais de cálculo (calculadoras e computadores) usam a representação binária onde a reta real é composta por conjunto finito de valores exatamente representados.



Fontes de Erro do Processo de Modelagem

- Erros de Medida: A própria coleta dos dados para a construção do modelo contém erros:

OPERADOR	Deficiência visual, paralaxe, habilidade, sensibilidade.
INSTRUMENTO	Atrito, folga, desgaste.
AMBIENTE	Temperatura, umidade, ruído elétrico, iluminação.
MÉTODO	Efeitos aleatórios de cada método de medida aplicado.

Data Fitting = Ajuste de Dados

Processo:

- Escolha uma função conhecida para aproximar a função, em geral desconhecida, que é representada pelos dados.
- Proponha algum critério de ajuste comparando o valor proposto pelo modelo e o dado observado.
- Utilize esse critério para determinar os coeficientes da função conhecida (modelo).

Critério dos Mínimos Quadrados

Para uma tabela de m pontos: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \cdots (x_m, y_m)$

Deseja-se ajustar aos dados um modelo, por exemplo na forma: $f(x) = ax + b$.

Para cada ponto define-se um resíduo: $R_i = y_i - f(x_i)$

A norma dos resíduos ao quadrado é definida por:

$$\|R\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \{R_i\}^2 = \sum_{i=1}^{m} \{y_i - f(x_i)\}^2$$

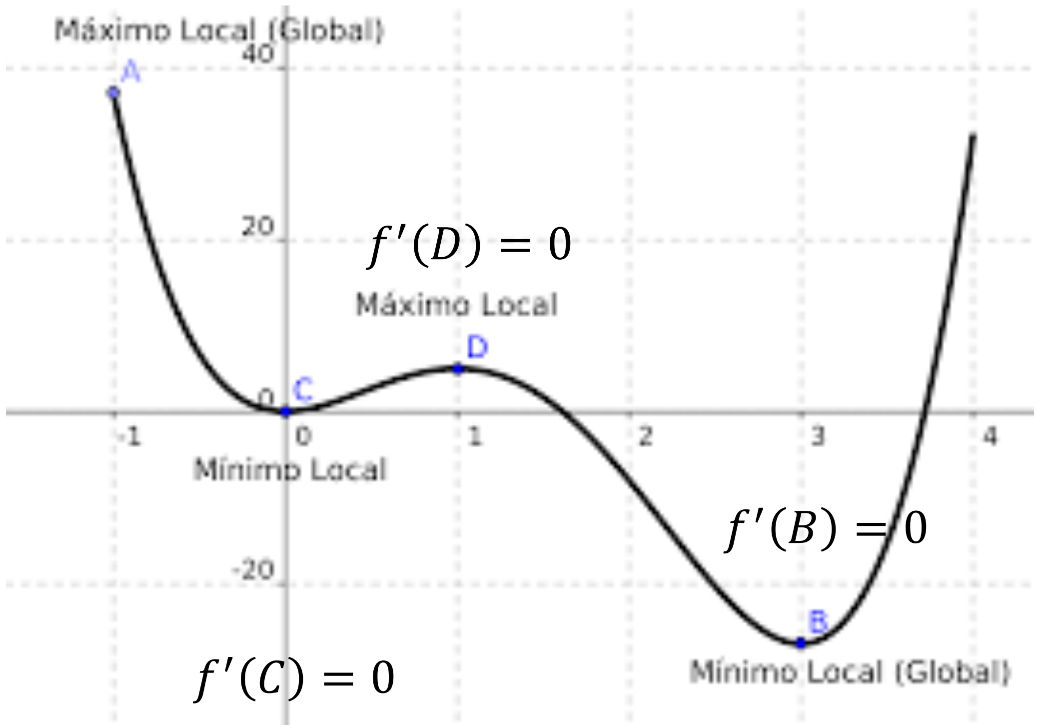
Ou no caso do modelo linear

$$\|R\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

O critério consiste em minimizar o valor de $\|R\|_2^2$ em relação aos coeficientes a e b

Pontos Extremos de Uma Função

Nos pontos extremos de uma função as derivadas (que equivalem a inclinação para funções de uma variável) tem valor nulo.



Essa relação é usada para a determinação dos pontos extremos (máximos ou mínimos)

3.3 Applying the Least-Squares Criterion

Ajustando uma linha reta

$$S = \|R\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

De acordo com o critério para os pontos extremos:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

Derivadas parciais

Começando com a derivada parcial em relação a a :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{m} \{y_i - (ax_i + b)\}^2\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{m} 2\{y_i - (ax_i + b)\} \ (-x_i) = -2\sum_{i=1}^{m} \{y_i - (ax_i + b)\} \ (x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{m} \{y_i x_i - ax_i^2 - bx_i\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \{y_i x_i - ax_i^2 - bx_i\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\{y_i x_i - a x_i^2 - b x_i\} = 0$$

Segregando os somatórios: $$\sum_{i=1}^{m} y_i x_i - \sum_{i=1}^{m} a x_i^2 - \sum_{i=1}^{m} b x_i = 0$$

Colocando a e b em evidência: $$\sum_{i=1}^{m} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{m} x_i = 0$$

Separando os coeficientes de lado temos uma equações para a e b :

$$a\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i$$

Analisando agora a derivada parcial em relação a b:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\sum_{i=1}^{m}\{y_i - (ax_i + b)\ \}^2\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{m} 2\{y_i - (ax_i + b)\ \}\ \ (-1) = -2\sum_{i=1}^{m}\{y_i - (ax_i + b)\ \}\quad = 0$$

logo

$$\sum_{i=1}^{m}\{y_i - (ax_i + b)\ \}\quad = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\{y_i - (ax_i + b)\} \quad = 0$$

Segregando os somatórios: $$\sum_{i=1}^{m} y_i \quad - \sum_{i=1}^{m} ax_i \quad - \sum_{i=1}^{m} b \quad = 0$$

Colocando a e b em evidência: $$\sum_{i=1}^{m} y_i \quad - a\sum_{i=1}^{m} x_i \quad - b\sum_{i=1}^{m}(1) \quad = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{m} x_i \quad + bm = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

Temos outra equação para a e b permitindo escrever o sistema.

Os coeficientes serão obtidos pela solução do sistema 2 x 2:

$$a\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i$$

$$a\sum_{i=1}^{m} x_i \quad + bm = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

Usando a Regra de Cramer:

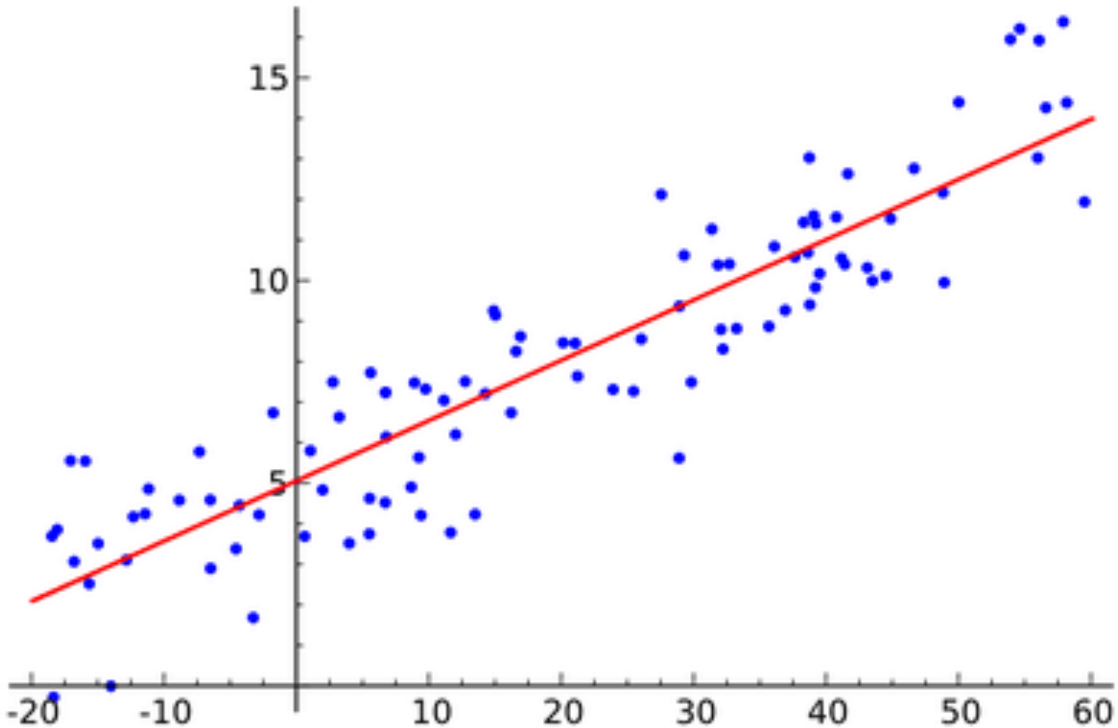
$$a = \frac{m\sum_{i=1}^{m} y_i x_i - \sum_{i=1}^{m} y_i \quad \sum_{i=1}^{m} x_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} y_i \quad - \sum_{i=1}^{m} y_i x_i \sum_{i=1}^{m} x_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}$$

De quantos somatórios precisamos ?

O critério de construção do modelo não significa necessariamente que os resultados modelados irão passar pelos dados da tabela:

$$f(x) = ax + b$$



O que foi pedido é que $\|R\|_2^2$ fosse mínimo o que dependendo dos dados tem aspectos semelhantes ao exemplo acima.

3.3 PROBLEMS

2. Use Equations (3.5) and (3.6) to estimate the coefficients of the line $y = ax + b$ such that the sum of the squared deviations between the line and the following data points is minimized.

a.

x	1.0	2.3	3.7	4.2	6.1	7.0
y	3.6	3.0	3.2	5.1	5.3	6.8

$$a = \frac{m\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \qquad \text{the } \textbf{slope} \qquad (3.5)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \qquad \text{the } \textbf{intercept} \qquad (3.6)$$

O cálculo manual (ou em planilha) fica mais fácil se os dados forem organizados e pré-processados

	A	B	C	D	E	F
1						
2	x	y	xy	x^2		f
3	1,0	3,6	3,60	1,00		2,7791
4	2,3	3,0	6,90	5,29		3,5126
5	3,7	3,2	11,84	13,69		4,3025
6	4,2	5,1	21,42	17,64		4,5846
7	6,1	5,3	32,33	37,21		5,6567
8	7,0	6,8	47,60	49,00		6,1645
9						
10	24,3	27,0	123,69	123,83	590,49	
11						
12	den	152,49				
13	num_a	86,04				
14	num_b	337,743				
15	a	0,564234				
16	b	2,214853				
17						

$$f(x) = ax + b$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2$$

num_a

$$a = \frac{m\sum_{i=1}^{m} y_i x_i - \sum_{i=1}^{m} y_i \quad \sum_{i=1}^{m} x_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}$$

den

num_b

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} y_i \quad - \sum_{i=1}^{m} y_i x_i \sum_{i=1}^{m} x_i}{m\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}$$

Exercício 12.1:

c.

x	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
y	4.32	4.83	5.27	5.74	6.26	6.79	7.23

$$a = \frac{m\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \qquad \text{the } \textbf{slope} \tag{3.5}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \qquad \text{the } \textbf{intercept} \tag{3.6}$$

PROCURE UM TUTORIAL DE COMO INSERIR UMA LINHA DE TENDENCIA NO EXCEL

Fim Aula 11