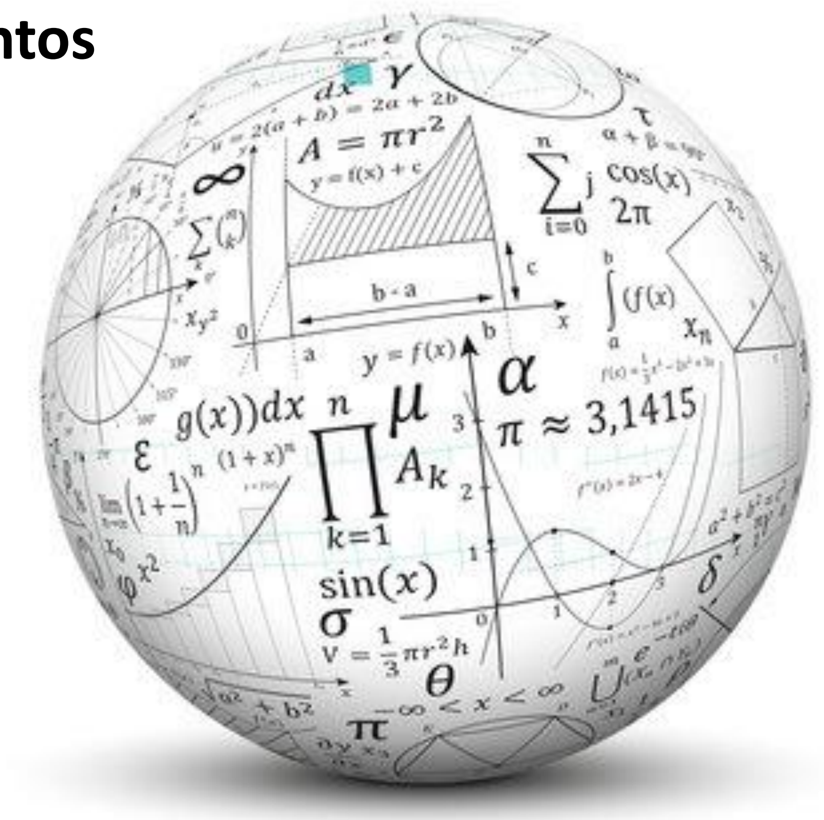
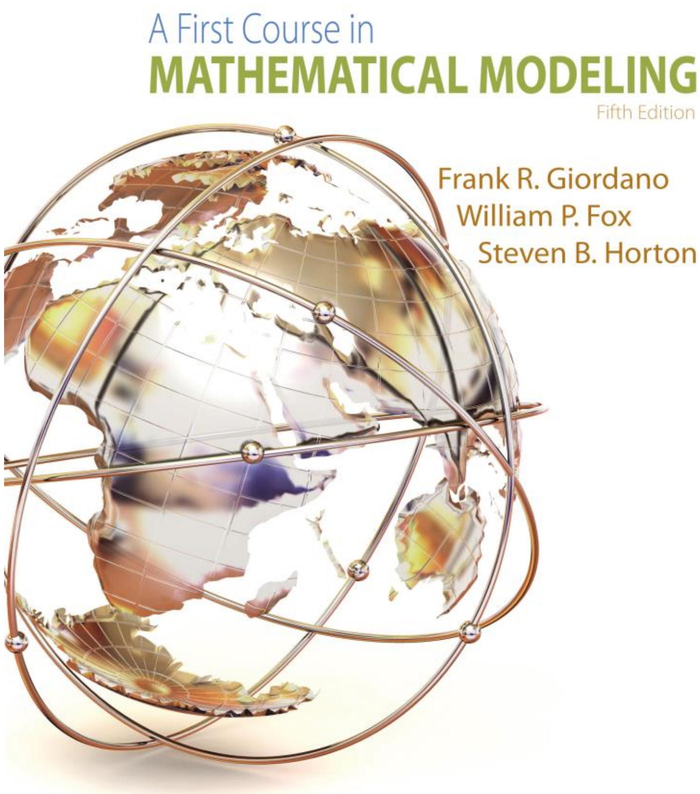
MAP 2110 – Modelagem e Matemática

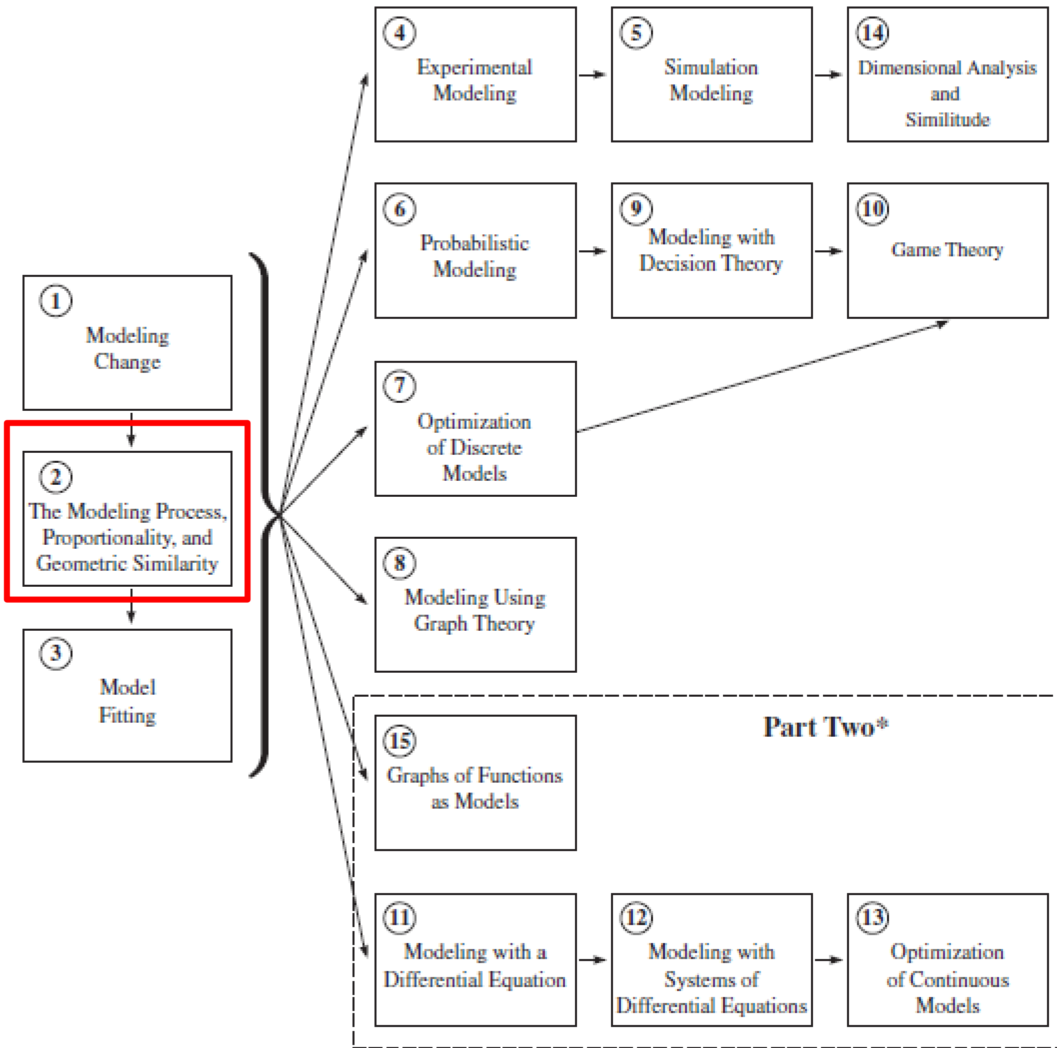
1º Semestre - 2023

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



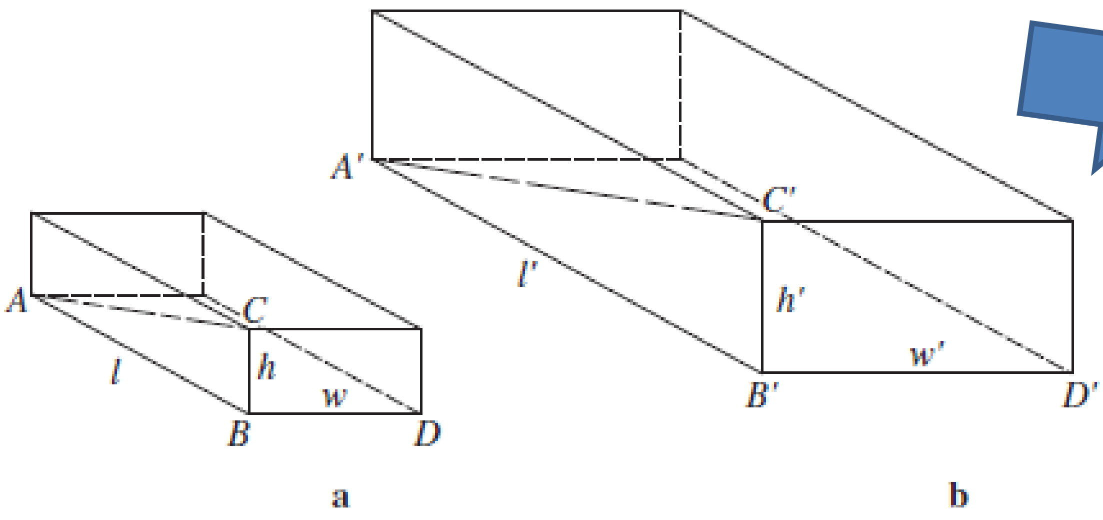




*Part Two requires single-variable calculus as a corequisite.

2.3 Modeling Using Geometric Similarity

Dois objetos são geometricamente similares se existe uma correspondência um para um entre pontos dos objetos, tal que a razão das distâncias entre pontos correspondentes é constante para todos os possíveis pares de pontos.



$$\frac{l}{l'} = \frac{w}{w'} = \frac{h}{h'} = k$$

Se as distâncias lineares guardam proporcionalidade pode-se deduzir a relação de volumes e áreas dos paralelogramos:

$$\frac{V}{V'} = \frac{lwh}{l'w'h'} = k^3$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{2lh + 2wh + 2wh}{2l'h' + 2w'h' + 2w'h'} = k^2$$

Utilizando as relações entre as grandezas geometricamente similares pode-se propor o conceito de <u>comprimento característico</u>:

$$\frac{S}{S'} = k^2 = \frac{l^2}{l'^2} \qquad \frac{S}{l^2} = k^2 = \frac{S'}{l'^2} \qquad S = k^2 l^2 \qquad S \propto l^2$$

O comprimento característico pode ser usado como referência para obter relações de proporcionalidade para áreas e volumes:

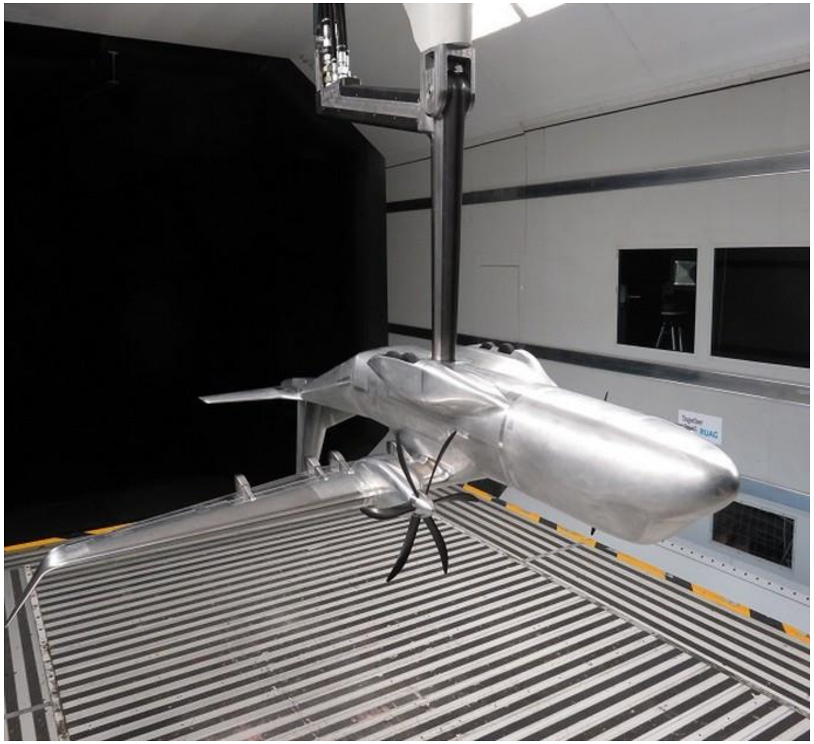
$$S \propto l^2$$

$$V \propto l^3$$

De forma análoga se estamos interessados em alguma função de comprimento, área e volume, pode-se estabelecer uma relação de proporcionalidade usando apenas o comprimento característico.

$$y = f(l, S, V) \qquad y = g(l, l^2, l^3) \qquad y = h(l)$$

A utilidade dos comprimentos característicos (estendendo o conceito aos adimensionais) é justamente <u>obter grandezas, e funções, em escala reduzida e extrapolar os efeitos a escalas reais.</u>



Modelos em escala são usados para medir grandezas adimensionais (saída) que são idênticas dados adimensionais de entrada 😱

<u>Ex: O coeficiente de sustentação é função do no. de Reynolds e do no. de Mach para a mesma forma e orientação da aeronave.</u>

O no. de Reynolds depende da velocidade do objeto em relação ao fluído, de um comprimento característico e da viscosidade cinemática do fluído.

The Reynolds number is defined as[3]

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{u L}{\nu}$$

where:

- ρ is the density of the fluid (SI units: kg/m^3)
- u is the velocity of the fluid with respect to the object (m/s)
- L is a characteristic linear dimension (m)
- μ is the dynamic viscosity of the fluid (Pa·s or N·s/m^2 or kg/m·s)
- ν is the kinematic viscosity of the fluid (m^2/s).

Escoamento de fluídos de mesmo no. de Reynolds são similares

O no. de Mach depende da velocidade do objeto em relação ao fluido e da velocidade do som que é função do fluido e da temperatura.

$$v_{sound} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

where

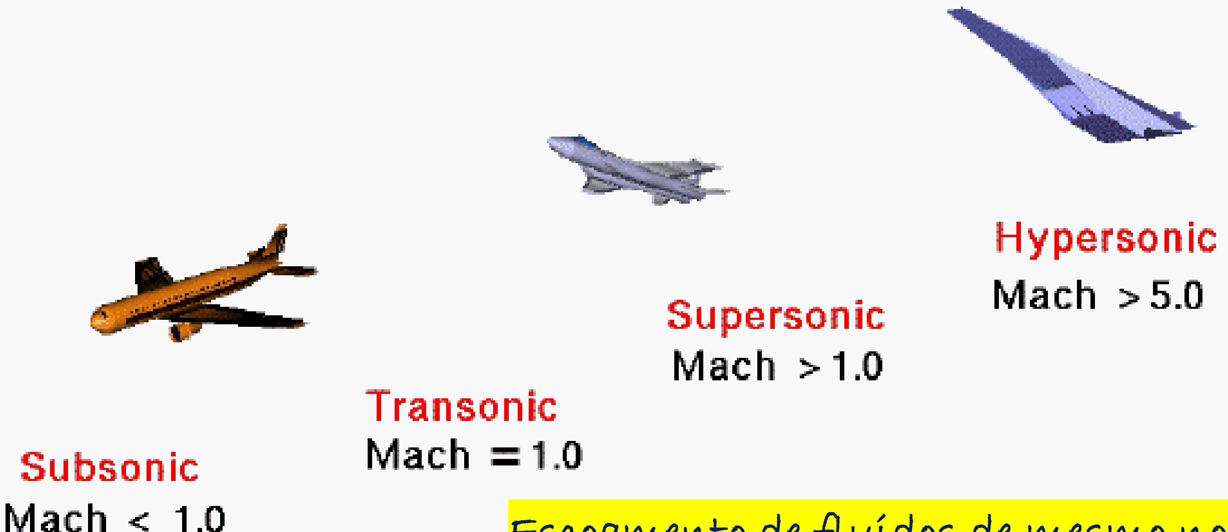
γ = adiabatic constant

R = gas constant

M = molecular mass of gas

T = absolute temperature

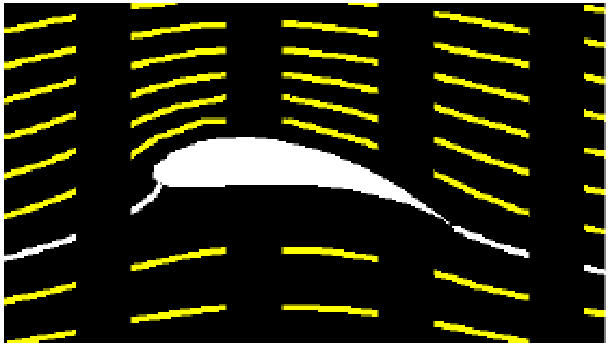
$$\text{Mach Number} = \frac{\text{Object Speed}}{\text{Speed of Sound}}$$



Escoamento de fluidos de mesmo no. de Mach são similares

The Lift Coefficient

Glenn Research Center



$$Cl = \frac{L}{r \times \frac{V^2}{2} \times A}$$

Cl contains all the complex dependencies and is usually determined experimentally.

O coeficiente de sustentação depende da força de sustentação da densidade do fluido, da velocidade do objeto em relação ao fluido, da orientação do objeto e de uma área de referência.

$$L = C_L \tfrac{1}{2}\rho v^2 S$$

$$C_L = f(Re, M)$$

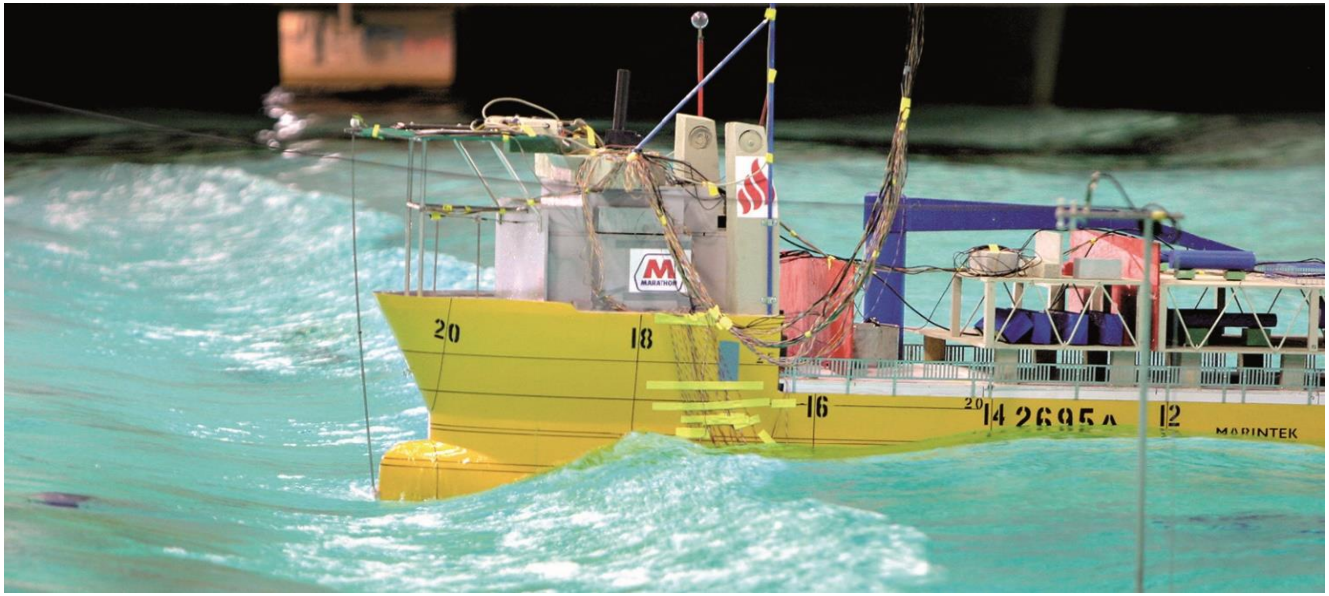
$$Re = f(V, l) \qquad M = f(T)$$

A sustentação é a força que se "opõe" ao peso e que faz o avião voar.

Um modelo e um veículo real para os mesmos nos. de Reynolds e Mach terão o mesmo o coeficiente de sustentação.

Reynolds e Mach podem ser controlados no laboratório variando a velocidade, a temperatura, a densidade,...

O ensaio no modelo reduzido permite antecipar o desempenho do veículo real.

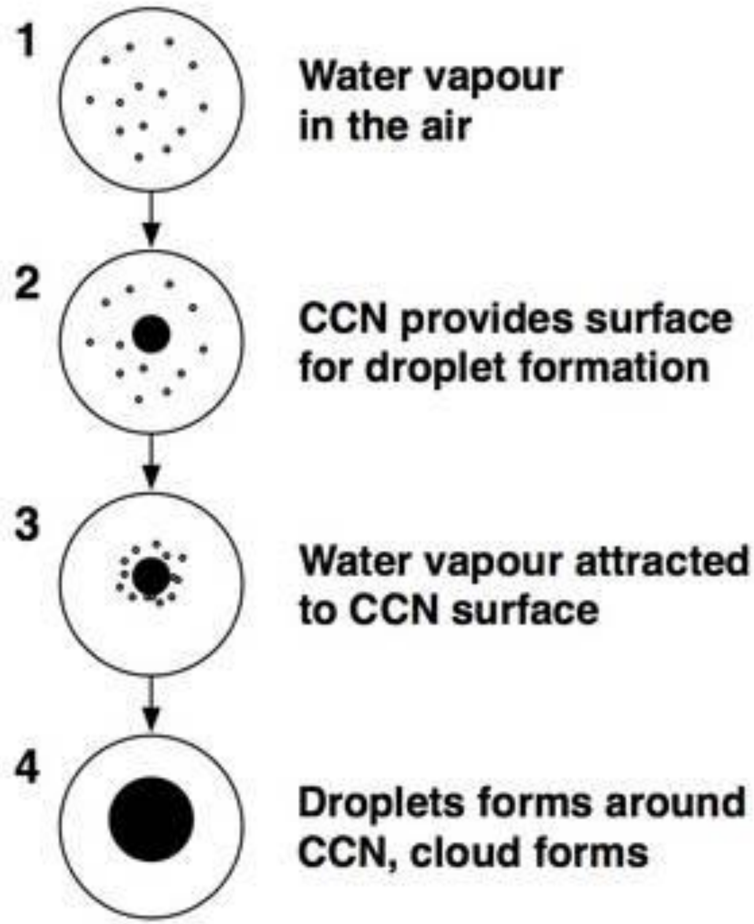


O uso de modelo reduzidos é uma prática comum em Engenharia

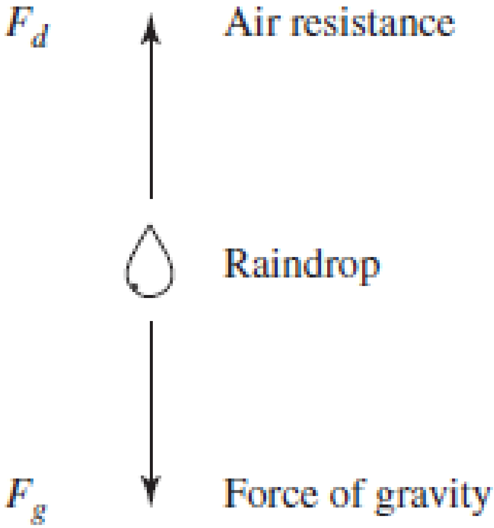
Mecanismo de formação de gotículas na atmosfera

EXAMPLE 1 *Raindrops from a Motionless Cloud*

CCN = Cloud Condensation Nuclei (partículas em suspensão - poeira)



EXAMPLE 1 *Raindrops from a Motionless Cloud*



A força resultante é a diferença entre o peso (força de gravidade) e o arrasto (força de resistência do ar)

$$F = F_g - F_d = ma$$

O peso é dado pela produto da massa e a aceleração da gravidade:

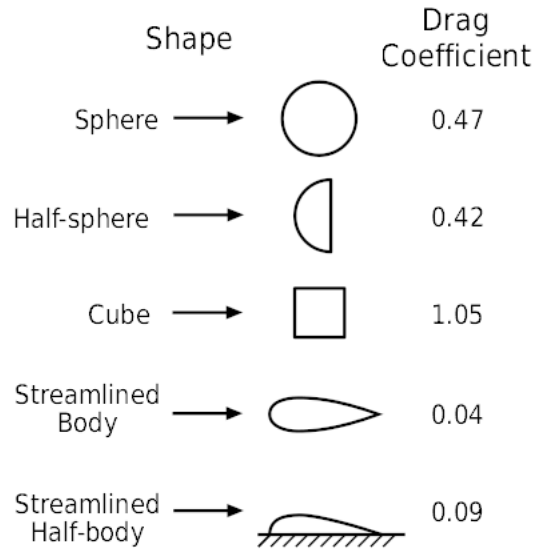
$$F_g = mg$$

A massa é o produto da densidade pelo volume do fluido:

$$F_g = \rho_{agua} V g$$

O arrasto (força de resistência dos fluidos) é proporcional ao quadrado da velocidade, ao coeficiente de arrasto e uma área de referência :

$$F_d = C_d \frac{\rho_{ar} v^2}{2} S$$



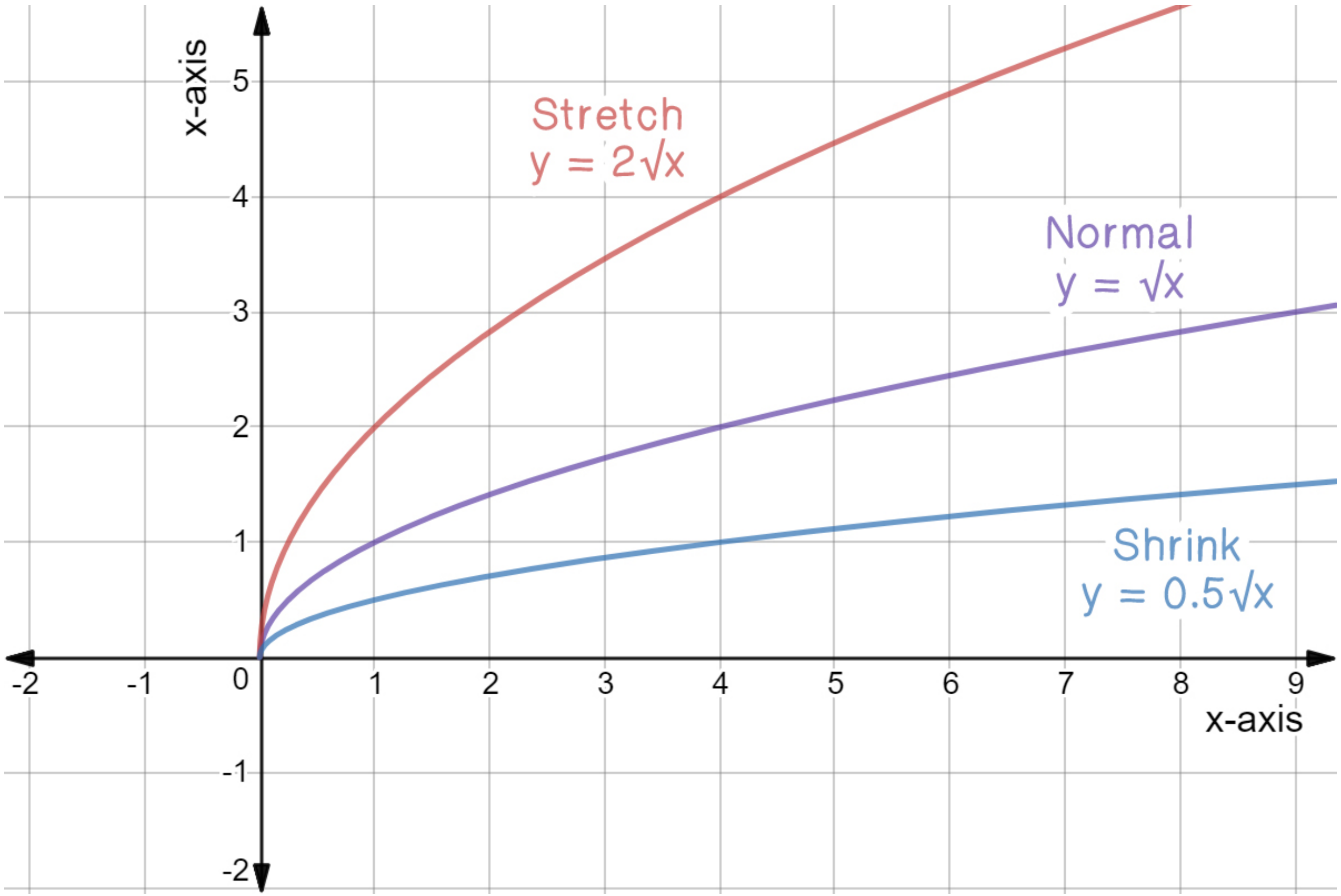
A chamada velocidade terminal é a aquela na qual a gota estabiliza (para de acelerar):

$$F_g - F_d = ma = 0$$

Dado um comprimento característico da gota (por exemplo diâmetro), e o fato de $S \propto l^2$ e $V \propto l^3$ pode-se dizer que:

$$C_d \frac{\rho_{ar} v^2}{2} S = \rho_{agua} V g \Rightarrow v^2 \propto \frac{V}{S} \propto \frac{l^3}{l^2} \propto l \Rightarrow v \propto l^{1/2}$$

É de se esperar que a velocidade seja proporcional a raiz quadrada de um comprimento característico



É de se esperar algo assim

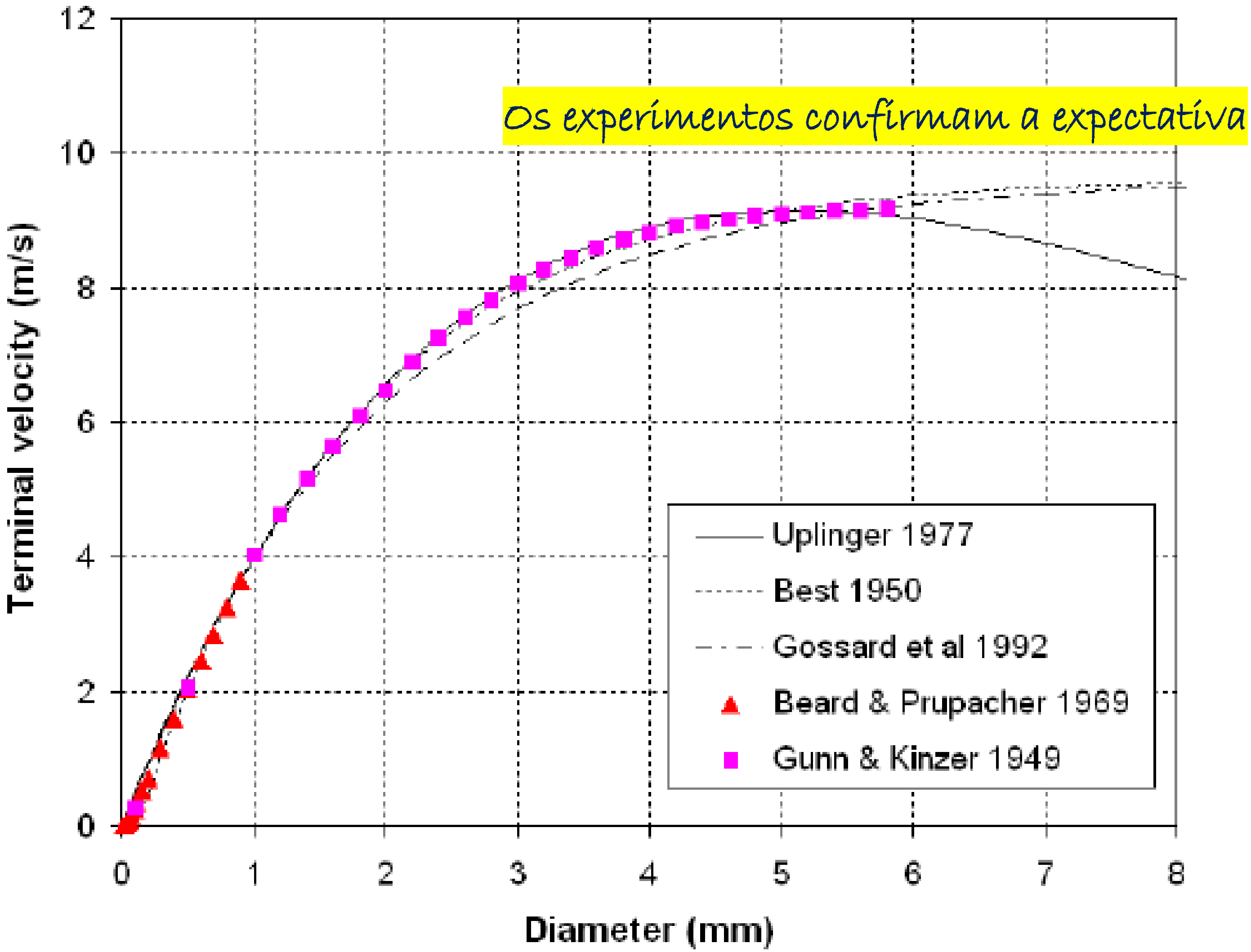


Figure 1: Terminal velocity of fall for raindrops. Measurements by Gunn & Kinzer (1949) and Beard & Prupacher (1969) and equations from Best (1950), Uplinger (1977) and Gossard et all 1992).

Testing Geometric Similarity

A similaridade mais simples é a geométrica. Da mesma forma que vimos para o paralelogramo temos relações análogas para o círculo

For example, we know that circles are geometrically similar (because all circles have the same shape, possibly varying only in size). If c denotes the circumference of a circle, d its diameter, and s the length of arc along the circle subtended by a given (fixed) angle θ, then we know from geometry that

$$c = \pi d \quad \text{and} \quad s = \left(\frac{d}{2}\right)\theta$$

Thus, for any two circles,

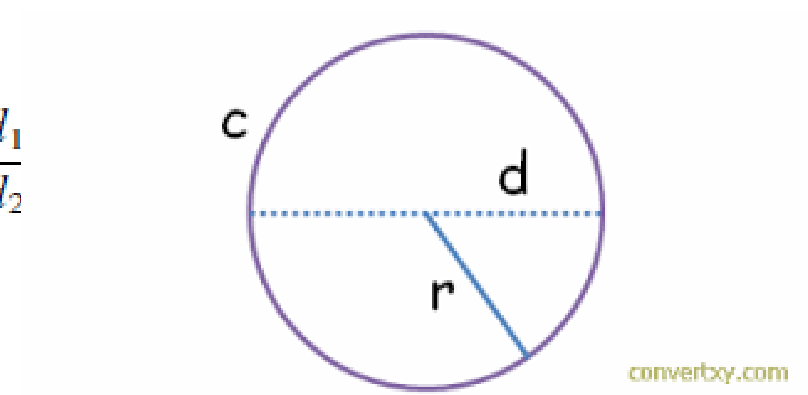
perímetro

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\pi d_1}{\pi d_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

and

Comprimento de arco

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{(d_1/2)\theta}{(d_2/2)\theta} = \frac{d_1}{d_2}$$



EXAMPLE 2 *Modeling a Bass Fishing Derby*

Problem Identification We can identify the problem as follows: *Predict the weight of a fish in terms of some easily measurable dimensions.*

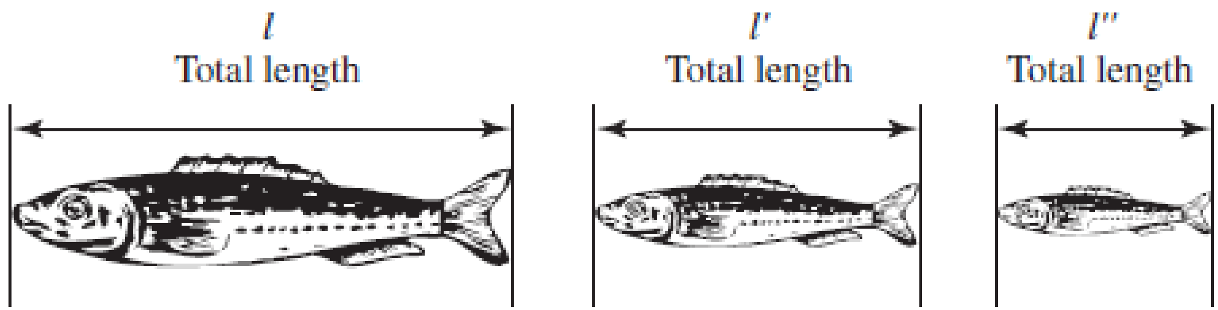


Figure 2.19
Fish that are geometrically similar are simply scaled models of one another.

Now choose the length l of the fish as the characteristic dimension. This choice is depicted in Figure 2.19. Thus, the volume of a bass satisfies the proportionality

$$V \propto l^3$$

Because weight W is volume times average weight density and we are assuming a constant average density, it follows immediately that

$$W \propto l^3$$

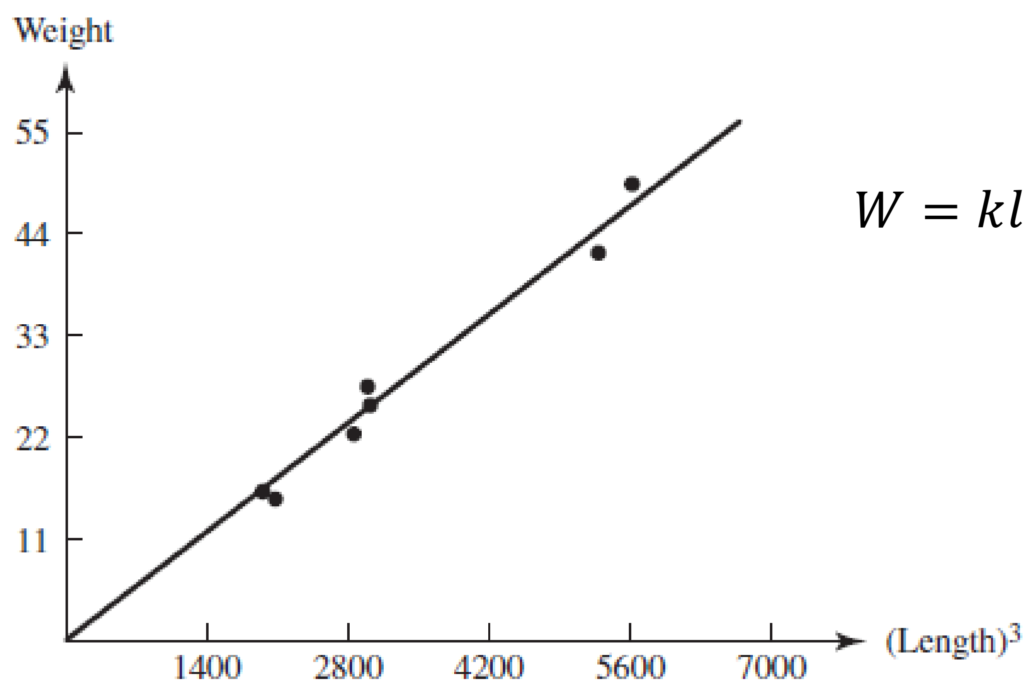
Considerando que o peso do peixe é proporcional ao cubo do comprimento

Model Verification Let's test our model. Consider the following data collected during a fishing derby.

Length, l (in.)	14.5	12.5	17.25	14.5	12.625	17.75	14.125	12.625
Weight, W (oz)	27	17	41	26	17	49	23	16

Figure 2.20

If the model is valid, the graph of W versus l^3 should be a straight line passing through the origin.



$$W = kl^3$$

Estimativa da constante:

“ingênua”	precisa
$k = 0.00853$	$k = 0.008437$

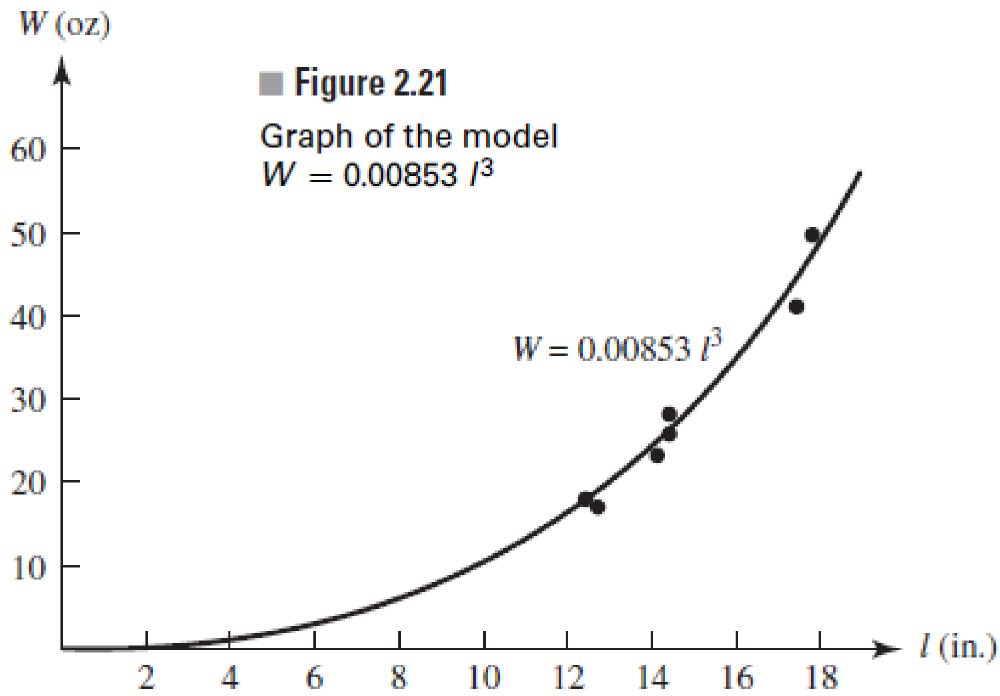


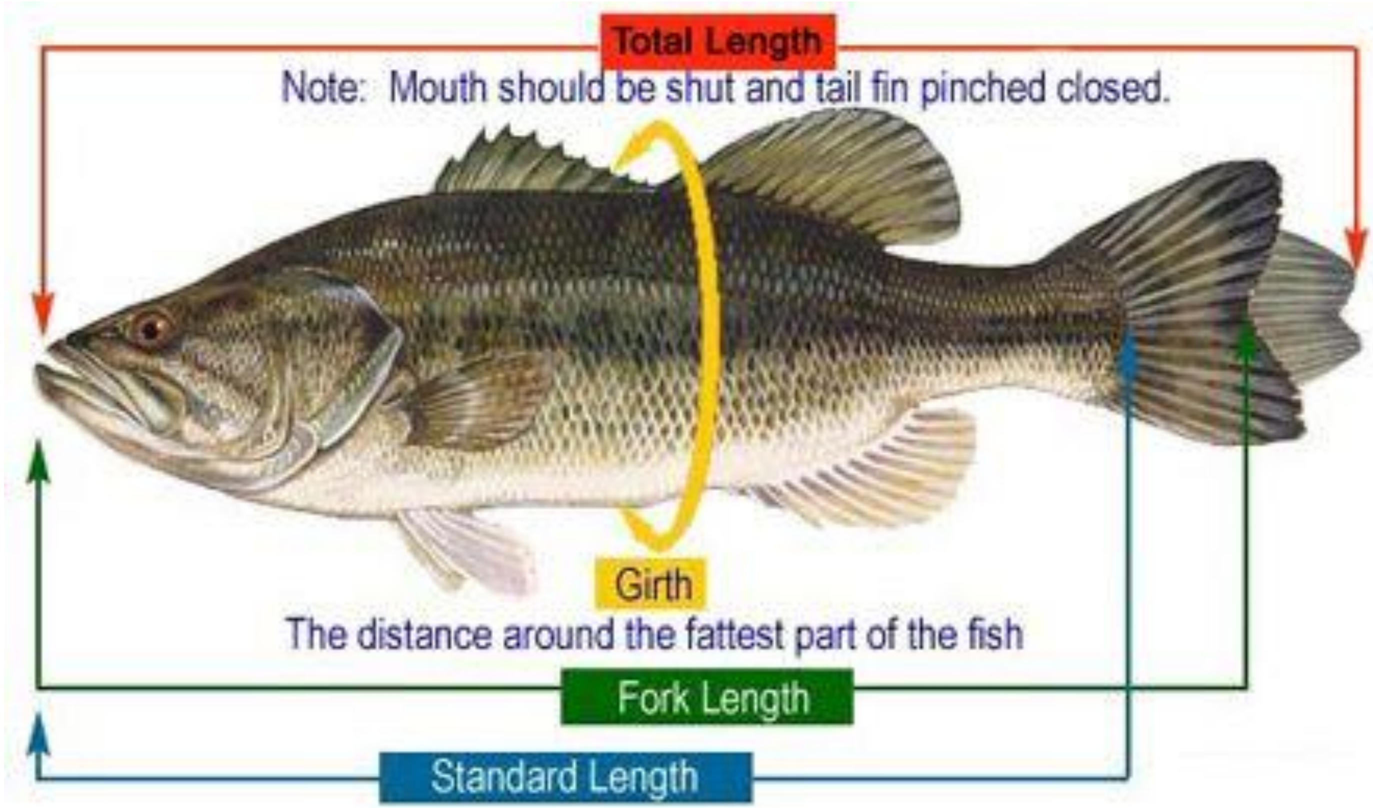
Figure 2.21

Graph of the model
$W = 0.00853\ l^3$

Usando o modelo pode-se construir uma tabela que auxilie o pescador a estimar o peso do peixe durante o torneio de pesca:

Length (in.)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Weight (oz)	15	19	23	29	35	42	50	59	68	79	91	104	118	133	150
Weight (lb)	0.9	1.2	1.5	1.8	2.2	2.6	3.1	3.7	4.3	4.9	5.7	6.5	7.4	8.3	9.4

Esse modelo se baseia unicamente no comprimento, o que pode não representar bem variações na seção transversal do peixe.



O comprimento de referência e o perímetro ("girth") podem ser usados para construir melhores modelos.

$$V \propto lg^2$$

$$W = klg^2$$

Os dados usados anteriormente também mediram o perímetro (girth):

Length, l (in.)	14.5	12.5	17.25	14.5	12.625	17.75	14.125	12.625
Girth, g (in.)	9.75	8.375	11.0	9.75	8.5	12.5	9.0	8.5
Weight, W (oz)	27	17	41	26	17	49	23	16

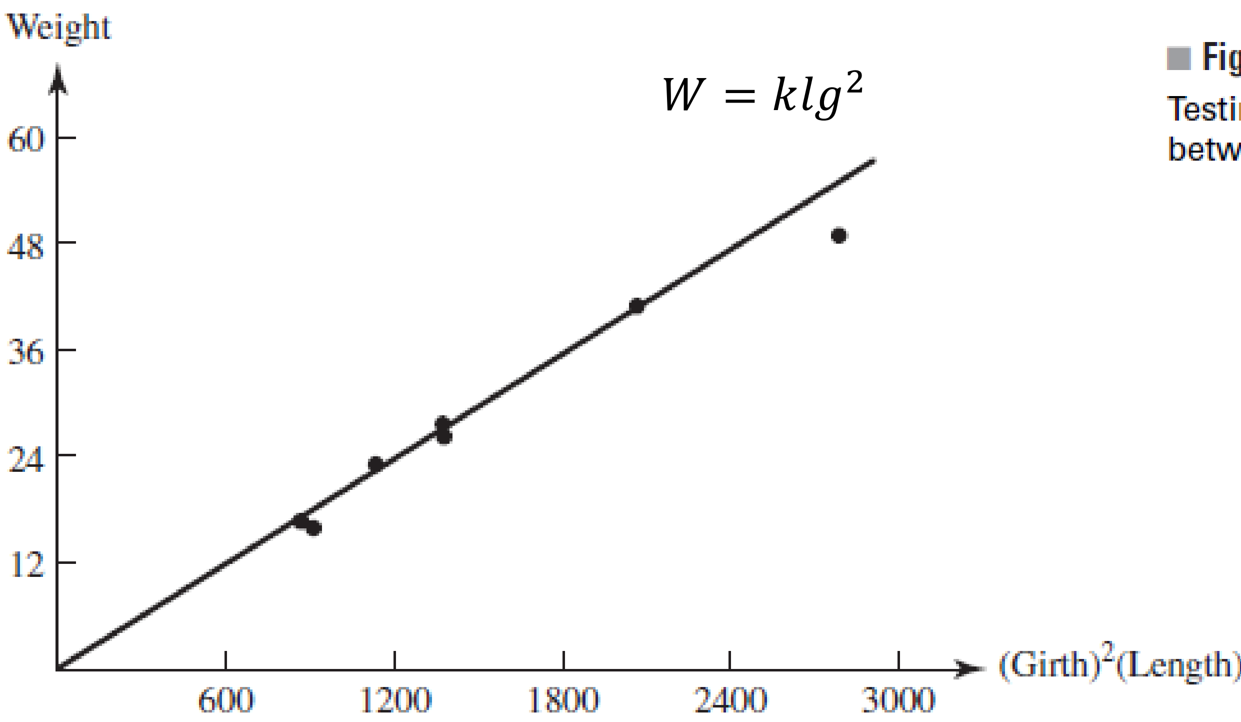
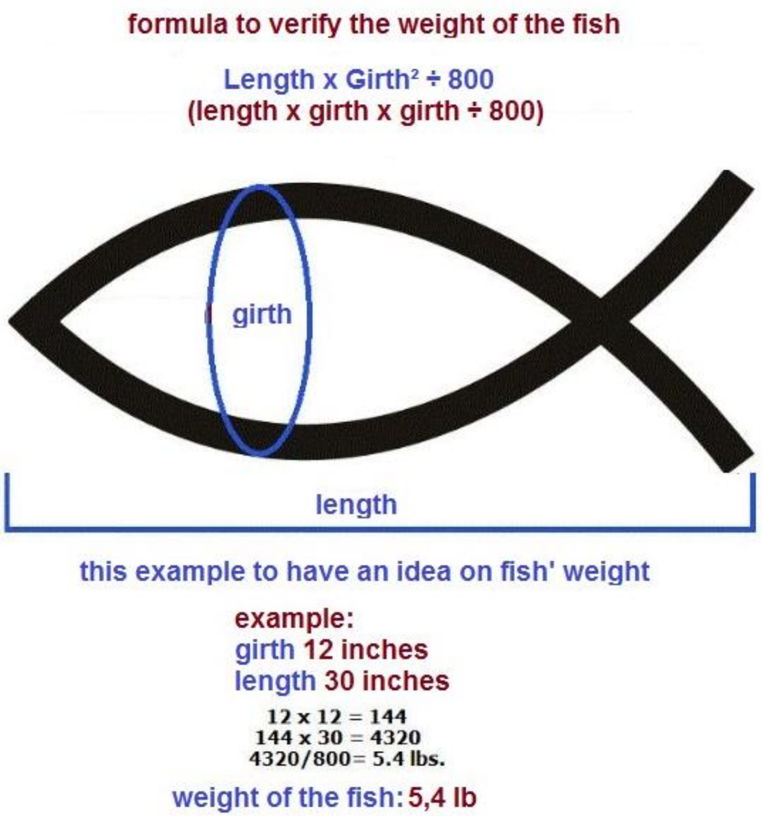


Figure 2.22
Testing the proportionality between W and lg^2

$$W = klg^2$$



Estimativa da constante:

"ingênua"

$$k = 0.0196$$

precisa

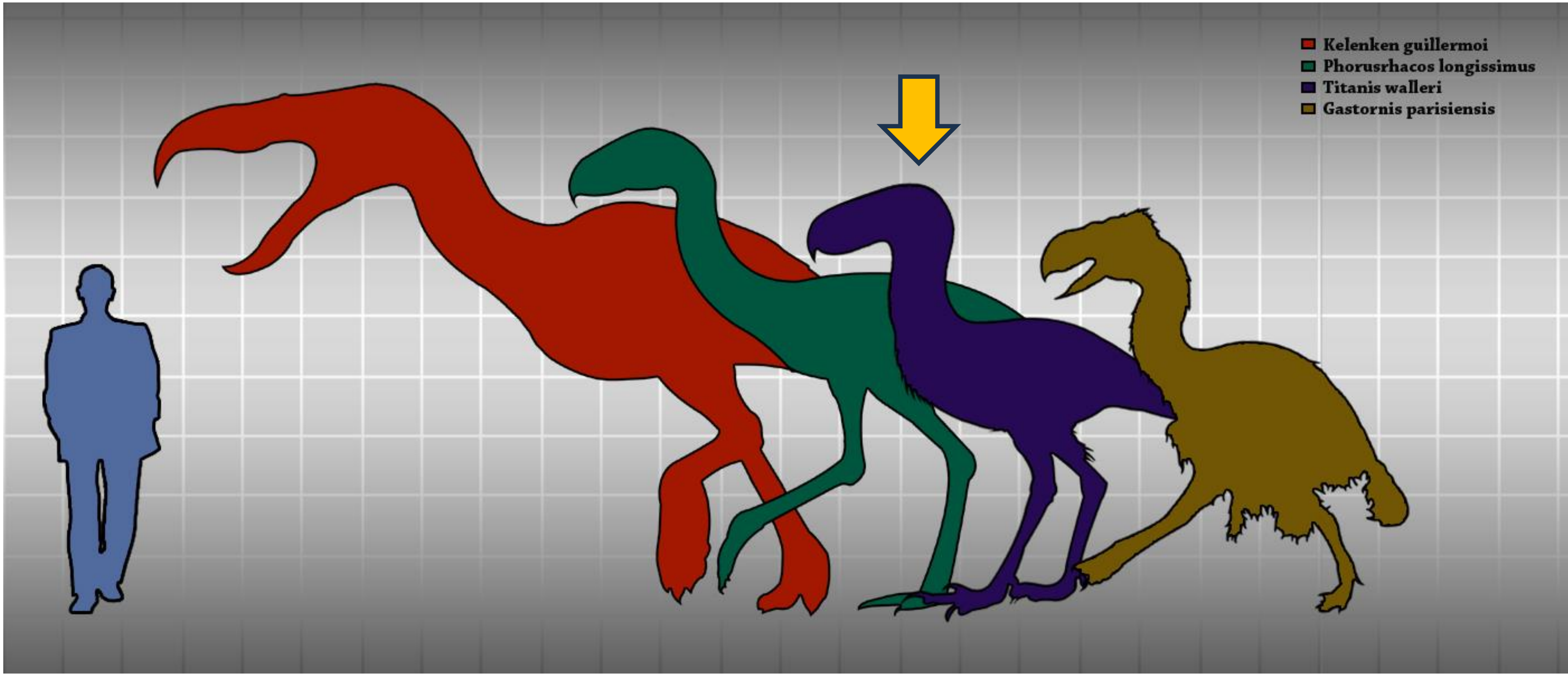
$$k = 0.0187$$

Arredondando por conveniência:

$$W = \frac{lg^2}{50} \text{ for } W \text{ in ounces and } l, g \text{ measured in inches}$$

$$W = \frac{lg^2}{800} \text{ for } W \text{ in pounds and } l, g \text{ measured in inches}$$

EXAMPLE 3 *Modeling the Size of the "Terror Bird"*



https://pt.wikipedia.org/wiki/Phorusrhacidae

Problem Identification Predict the weight of the terror bird as a function of the circumference of its femur.

Assumptions and Variables We assume that the terror birds are geometrically similar to other large birds of today. With this assumption of geometric similarity, we have that the volume of the bird is proportional to any characteristic dimension cubed.

$$V \propto l^3$$

If we assume a constant weight density, then the terror bird's volume is proportional to its weight, $V \propto W$, and we have

$$V \propto W \propto l^3$$

Let the characteristic dimension l be the circumference of the femur, which is chosen because it supported the body weight, giving the model

$$W = kl^3, k > 0$$

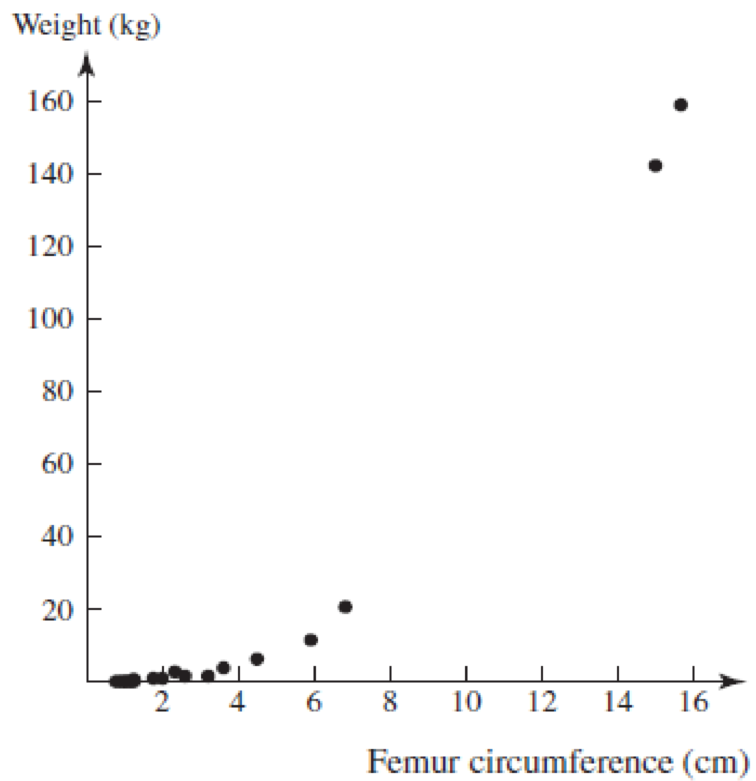
O problema prático é estimar o peso de um Titanis Walleri cujo perímetro do fêmur encontrado é de 21 cm.

Table 2.6 Femur circumference and body weight of birds

Femur circumference (cm)	Body weight (kg)
0.7943	0.0832
0.7079	0.0912
1.000	0.1413
1.1220	0.1479
1.6982	0.2455
1.2023	0.2818
1.9953	0.7943
2.2387	2.5119
2.5119	1.4125
2.5119	0.8913
3.1623	1.9953
3.5481	4.2658
4.4668	6.3096
5.8884	11.2202
6.7608	19.95
15.136	141.25
15.85	158.4893

Figure 2.24

Scatterplot of bird data



São usados pássaros atuais para a construção do modelo.

Because our proposed model is $W = kl^3, k > 0$, we plot W versus l^3 and obtain approximately a straight line through the origin (see Figure 2.25). Thus our proposed model is reasonably accurate. The slope of the line projected through the origin is approximately 0.0398, giving

$$W = 0.0398 l^3$$

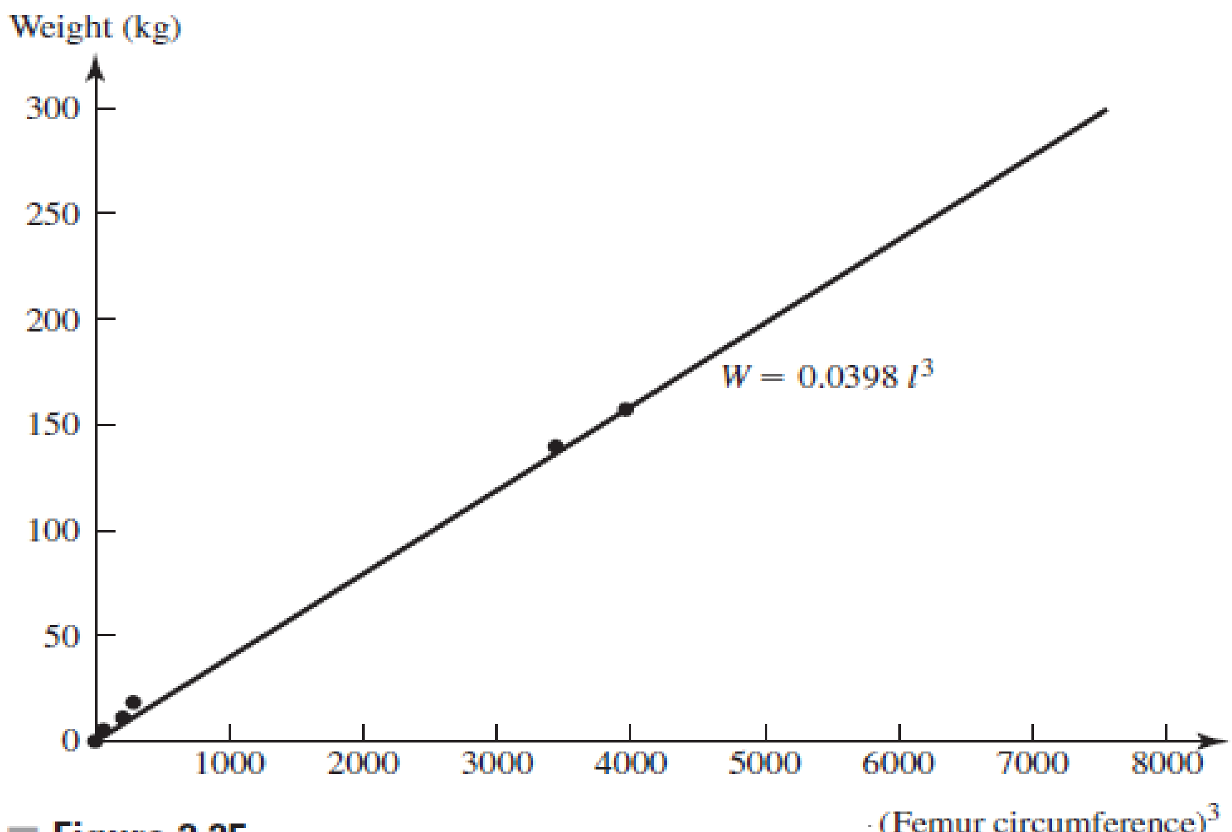


Figure 2.25

Plot of weight versus (femur circumference)^3

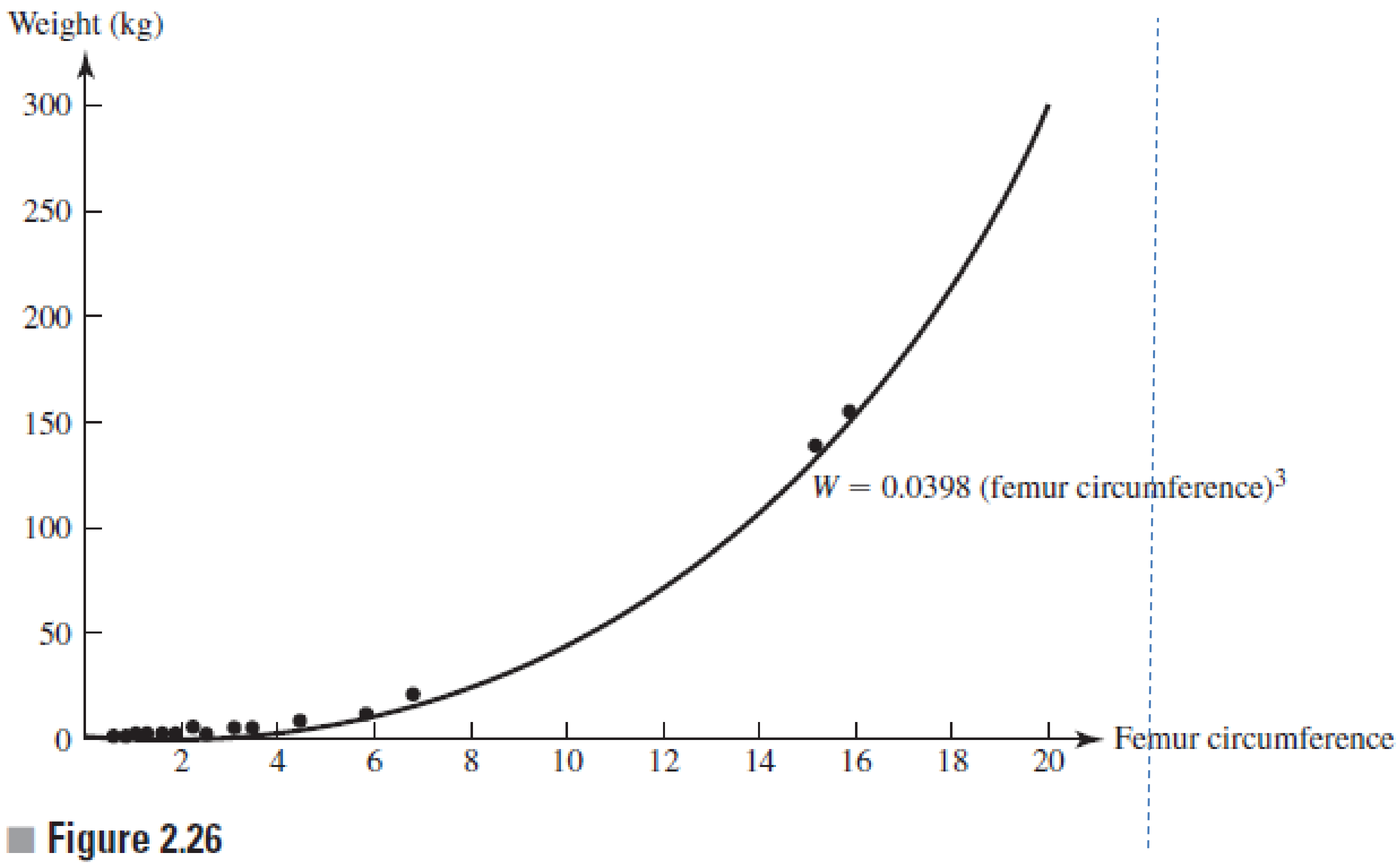


Figure 2.26

The model and the data

Para os dados do problema:

$21cm$ → $368.58\ kg$

2.3 PROJECTS

7. Data have been collected on numerous dinosaurs during the prehistoric period. Using proportionality and geometric similarity, build a mathematical model to relate the weight of the terror bird to its femur circumference. Recall that the femur circumference of the terror bird in Example 3 was 21 cm. Compare the weight found using this new model to the weight found in Example 3. Which model would you prefer? Give reasons justifying your preference.

Dinosaur data

Name	Femur circumference (mm)	Weight (kg)
Hypsilophodonitdae	103	55
Ornithomimdae	136	115
Thescelosauridae	201	311
Ceratosauridae	267	640
Allosauridae	348	1230
Hadrosauridae-1	400	1818
Hadrosauridae-2	504	3300
Hadrosauridae-3	512	3500
Tyrannosauridae	534	4000

Se ao invés de usar dados de pássaros fossem utilizados dados de outros dinossauros, qual seria a previsão ?

Fim Aula 09