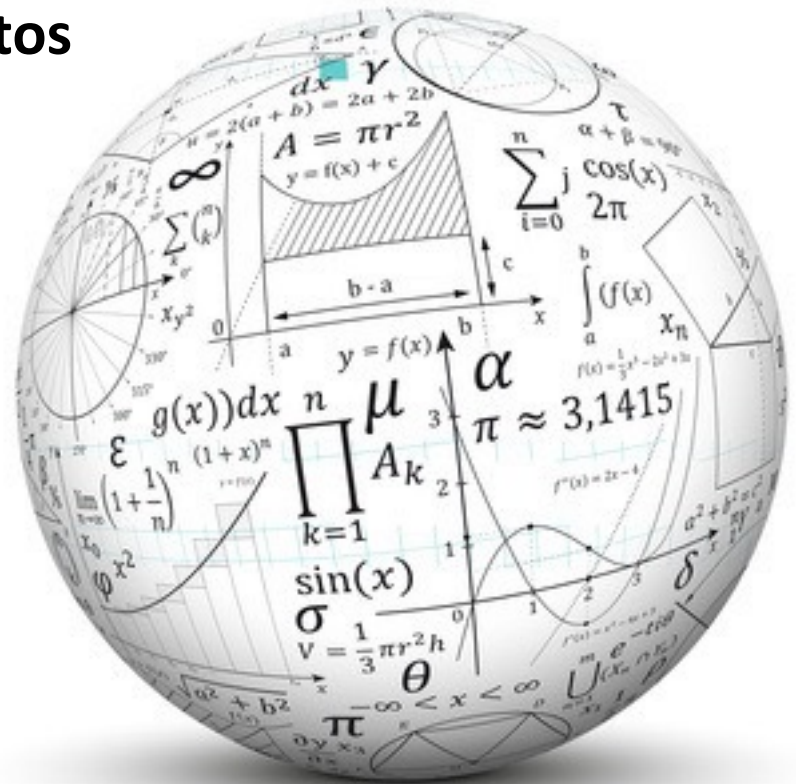


MAP 2110 – Modelagem e Matemática

1º Semestre - 2023

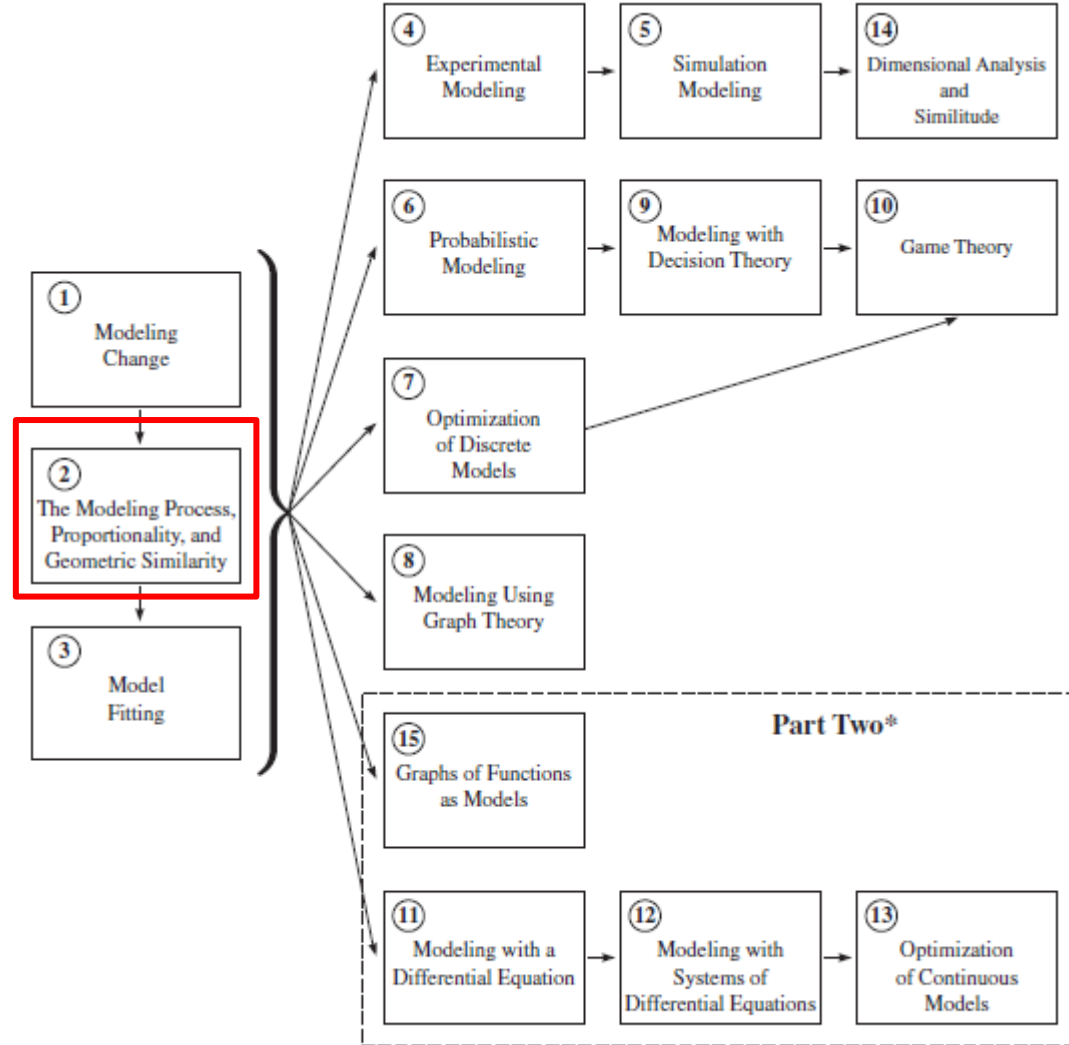
Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



A First Course in
MATHEMATICAL MODELING
 Fifth Edition

Frank R. Giordano
 William P. Fox
 Steven B. Horton



*Part Two requires single-variable calculus as a corequisite.

2.2 Modeling Using Proportionality

Proporcionalidade
Direta

$$a \propto b$$

$$c \propto \frac{1}{d}$$

Proporcionalidade
Inversa

$$y \propto x \leftrightarrow y = kx$$

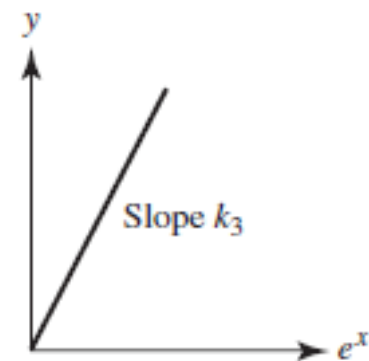
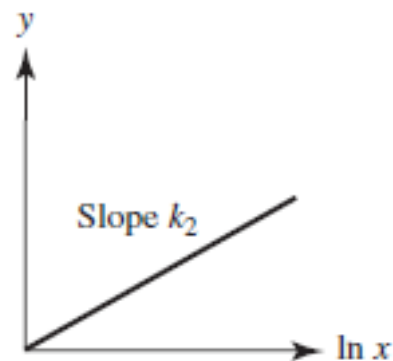
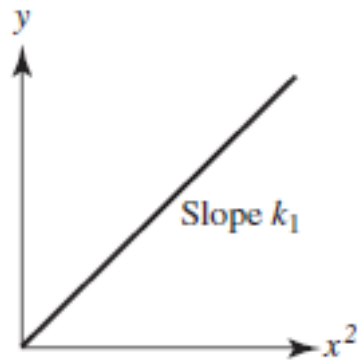
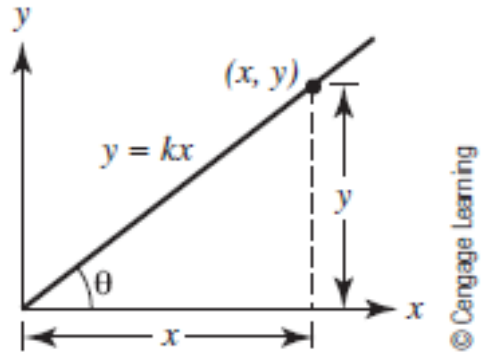
$$y \propto x^2 \leftrightarrow y = kx^2$$

$$y \propto e^x \leftrightarrow y = ke^x$$

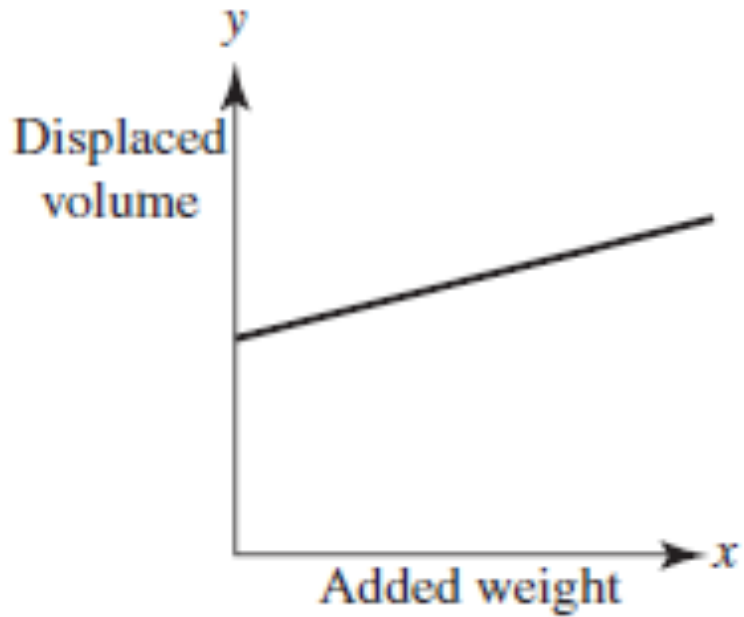
$$y \propto \ln x \leftrightarrow y = \ln x$$

$$y \propto x^n \leftrightarrow y = kx^n$$

A proporcionalidade ou relação linear não se limita apenas a equação da reta, existem várias opções funcionais que permitem alguma flexibilidade



Diferentes declividades indicam a intensidade da proporcionalidade entre x e y



Não necessariamente o intercepto é nulo.

$$y = mx + b$$

declividade

intercepto

A Física é prolífica em relações de proporcionalidade

Table 2.2 Famous proportionalities

Hooke's law: $F = kS$, where F is the restoring force in a spring stretched or compressed a distance S .

Newton's law: $F = ma$ or $a = \frac{1}{m}F$, where a is the acceleration of a mass m subjected to a net external force F .

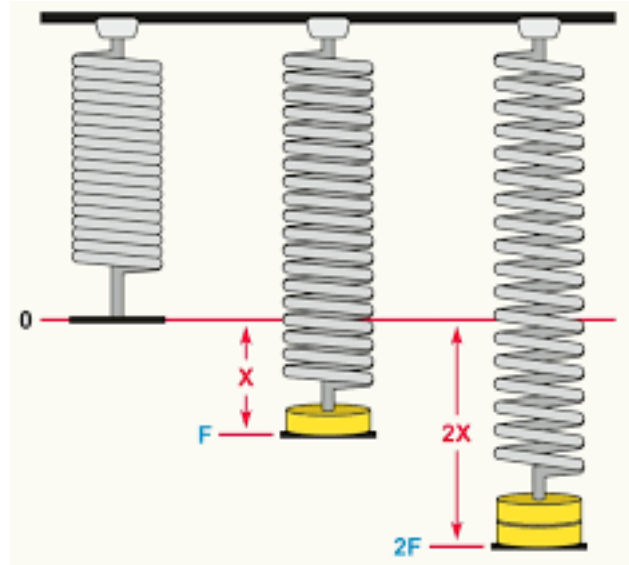
Ohm's law: $V = iR$, where i is the current induced by a voltage V across a resistance R .

Boyle's law: $V = \frac{k}{p}$, where under a constant temperature k , the volume V is inversely proportional to the pressure p .

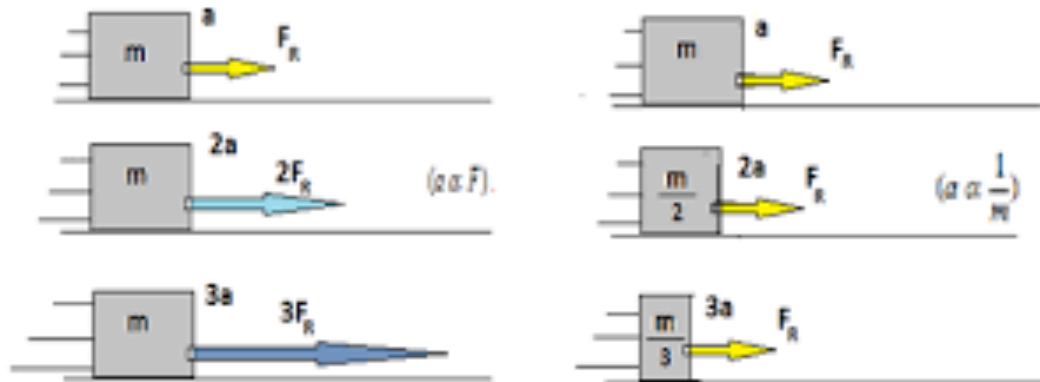
Einstein's theory of relativity: $E = c^2M$, where under the constant speed of light squared c^2 , the energy E is proportional to the mass M of the object.

Kepler's third law: $T = cR^{\frac{3}{2}}$, where T is the period (days) and R is the mean distance to the sun.

Lei de Hooke

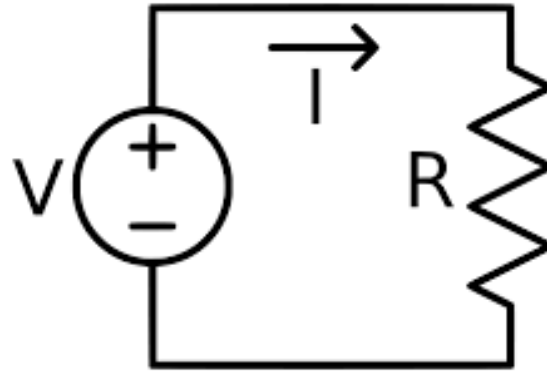


(2ª) Lei de Newton

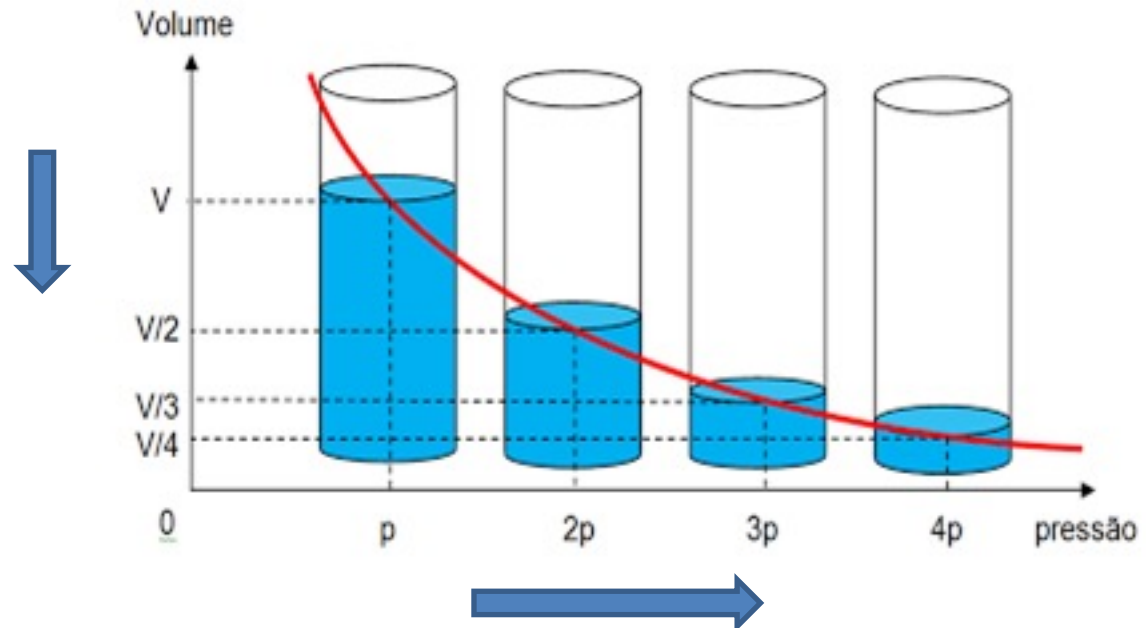


$$(a \propto \frac{F}{m}) \Rightarrow a = \frac{F}{m} \text{ ou } F_R = ma$$

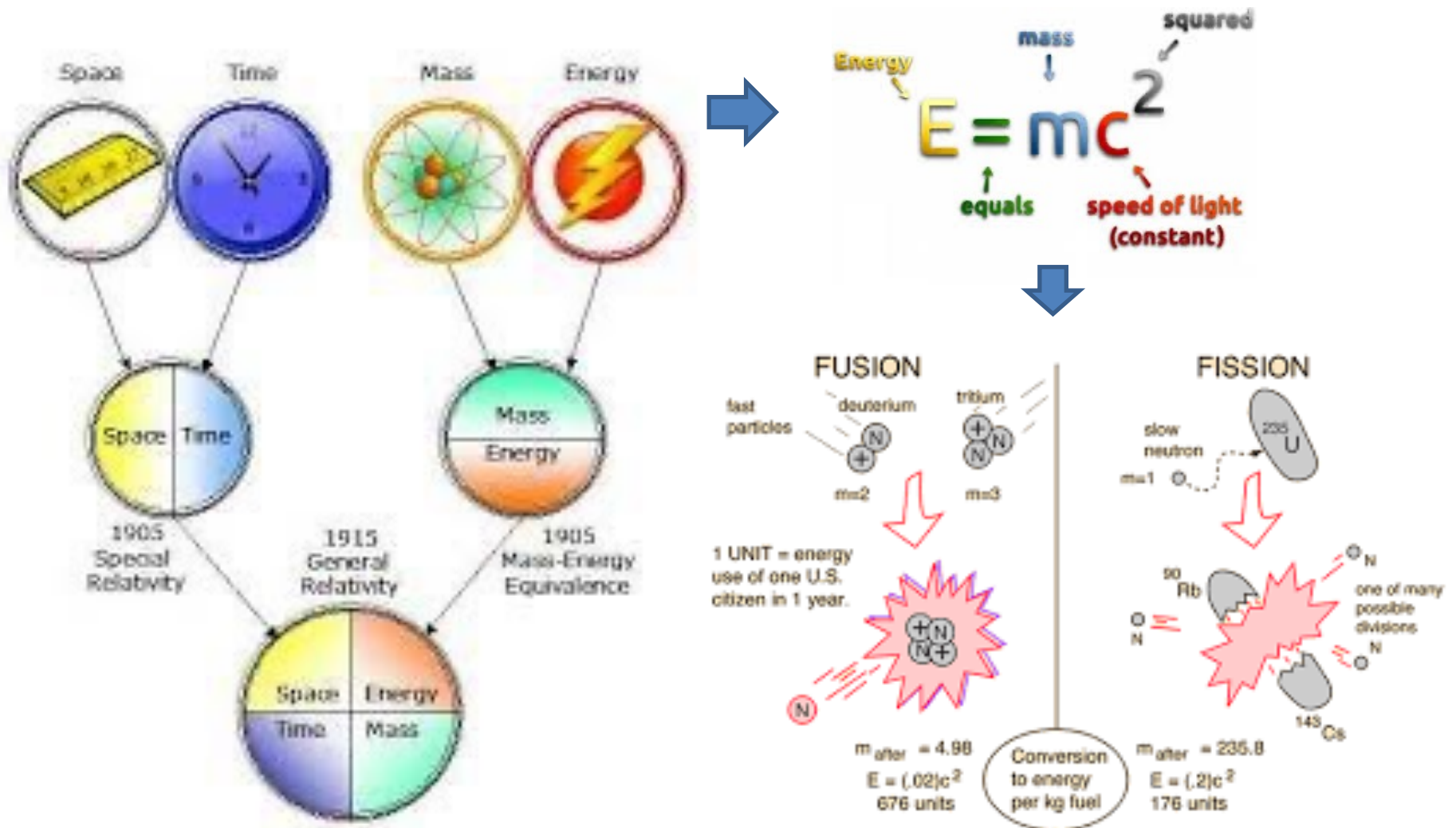
(1ª) Lei de Ohm

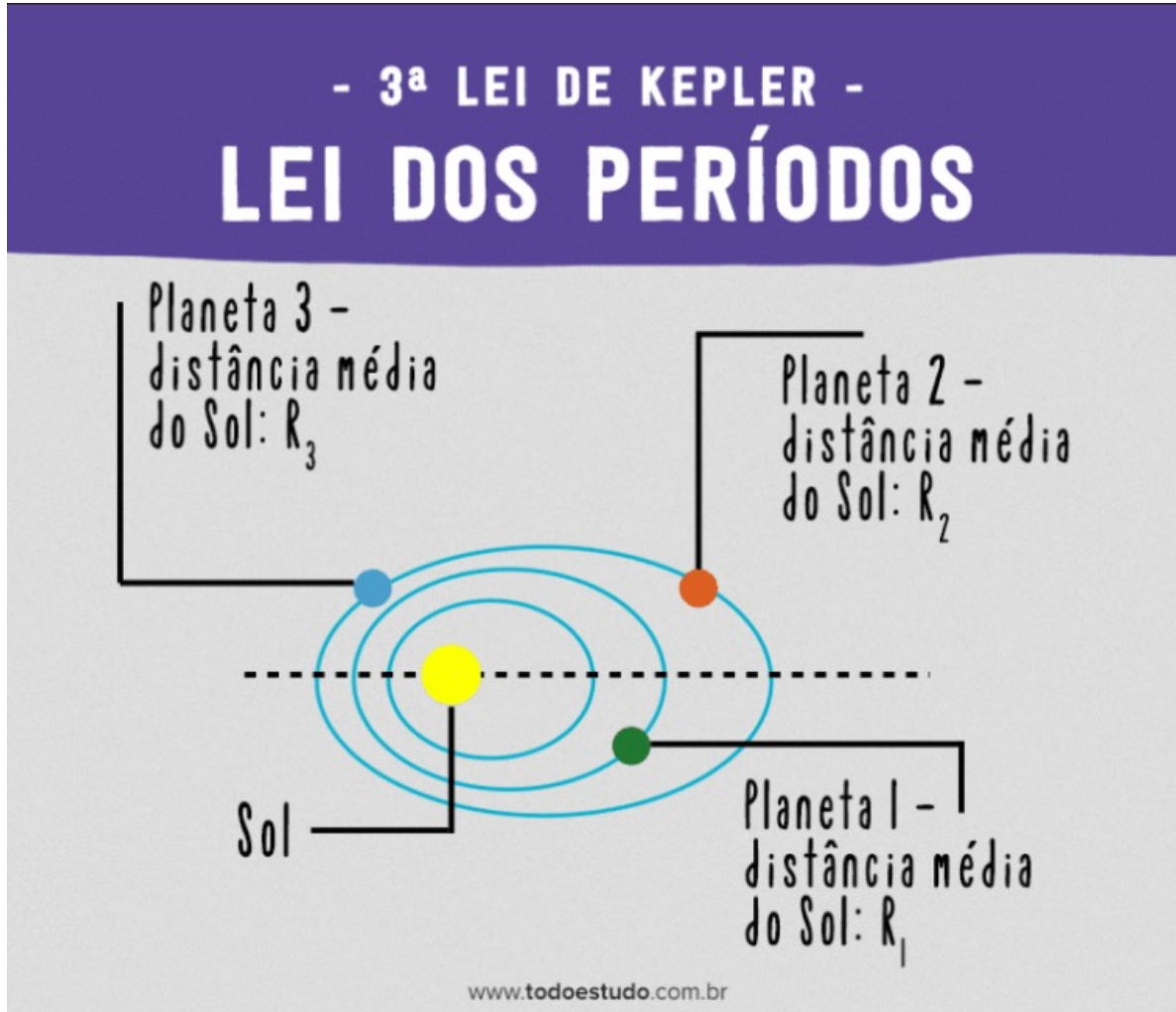


Lei de Boyle



Teoria da relatividade de Einstein



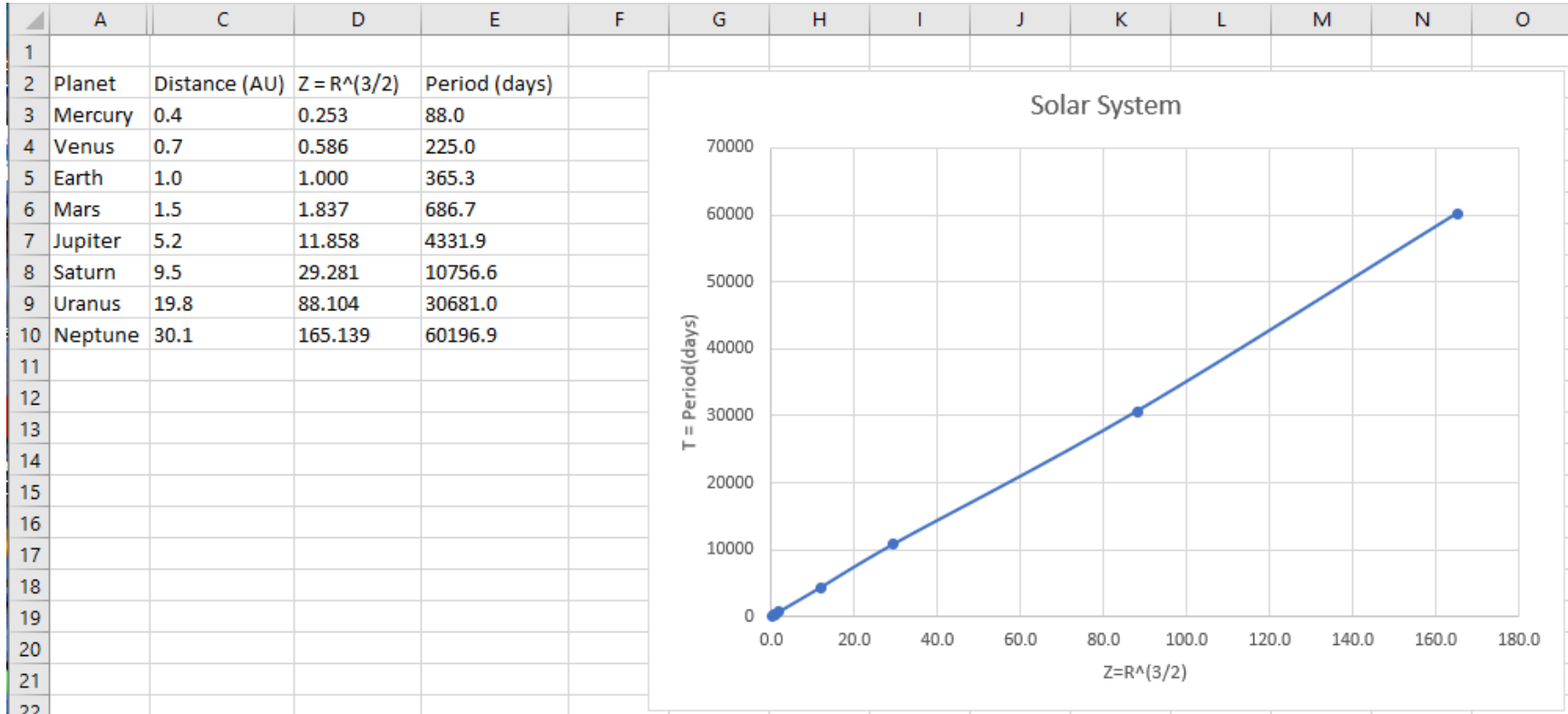


$$\frac{T^2}{R^3} = k$$

The screenshot shows the NASA Solar System Overview page. The browser address bar displays the URL: <https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/our-solar-system/overview/>. The page features a navigation menu with categories: Solar System, Planets, Moons, Asteroids, Comets & Meteors, and MORE. The main content area is split into two panels. The left panel is titled "Earth" and includes a "Terrestrial Planet" icon, a photo of Earth, and text describing it as the only planet with liquid water. It also lists "365.25 DAYS" for the length of year and "1 AU" for the distance from the Sun. The right panel is a 3D model of the solar system showing the Sun at the center, the orbits of the planets (Mercury, Venus, Earth, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune), and various spacecraft and asteroids. A blue arrow points to the "Earth" panel. The bottom of the page has a navigation bar with "Our Solar System", "PLANETS | DWARF PLANETS 8 | 5", and "MOONS 200 +".

Clicando sistema você vê o posicionamento dos astros no instante.

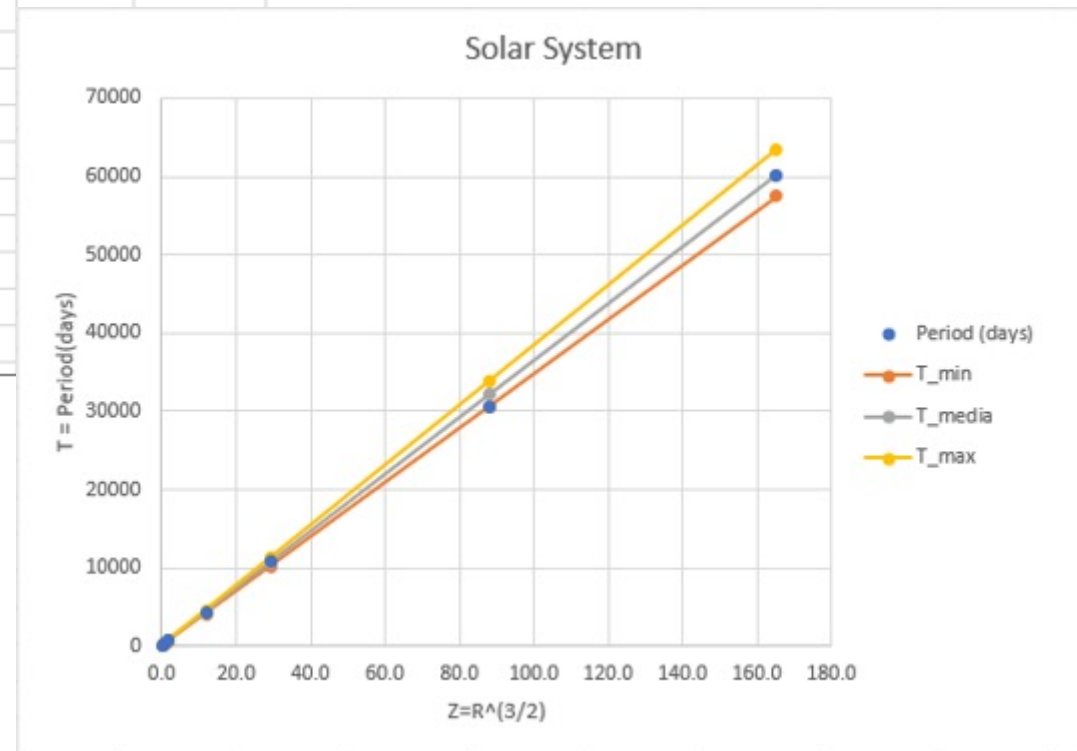
Dados colhidos do site anterior:



Pela análise visual do gráfico pode-se propor um modelo simples da forma:

$$T = kz = k(R^{3/2})$$

	A	C	D	E	F	G	H	I
1								
2	Planet	Distance (AU)	$Z = R^{(3/2)}$	Period (days)	k	T_min	T_media	T_max
3	Mercury	0.4	0.253	88.0	347.9	88.0	92.2	97.2
4	Venus	0.7	0.586	225.0	384.2	203.7	213.5	225.0
5	Earth	1.0	1.000	365.3	365.3	347.9	364.6	384.2
6	Mars	1.5	1.837	686.7	373.8	639.0	669.7	705.8
7	Jupiter	5.2	11.858	4331.9	365.3	4124.8	4322.9	4555.5
8	Saturn	9.5	29.281	10756.6	367.4	10185.4	10674.7	11249.2
9	Uranus	19.8	88.104	30681.0	348.2	30647.2	32119.5	33848.0
10	Neptune	30.1	165.139	60196.9	364.5	57443.7	60203.3	63443.2
11								
12				media	364.6			
13				min	347.9			
14				max	384.2			
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								



Analisando o valor médio, mínimo e máximo pode-se produzir um modelo “ingênuo” para o valor de k.

Retornando ao exemplo da aula passada:

REGRA DOS 2 SEGUNDOS

- 1 - Escolha um ponto fixo à margem da rodovia
- 2 - Quando o veículo da frente passar pelo ponto fixo, comece a contar
- 3 - Conte 2 segundos pausadamente
- 4 - A distância entre o seu veículo e o da frente será segura se você passar pelo ponto fixo após a contagem dos dois segundos
- 5 - Caso contrário, reduza a velocidade e conte novamente

ponto de
referência



Vehicle Stopping Distance

Scenario Consider the following rule often given in driver education classes:

Allow one car length for every 10 miles of speed under normal driving conditions, but more distance in adverse weather or road conditions. One way to accomplish this is to use the 2-second rule for measuring the correct following distance no matter what your speed. To obtain that distance, watch the vehicle ahead of you pass some definite point on the highway, like a tar strip or overpass shadow. Then count to yourself “one thousand and one, one thousand and two;” that is 2 seconds. If you reach the mark before you finish saying those words, then you are following too close behind.

“Um comprimento de carro para cada 10 milhas”

Essas regras são equivalentes ?

“Uma forma de conseguir isso é contar 2 segundos ...”

Considerando a regra, a exatas 10 milhas/hora

$$\begin{aligned} 1 \text{ car length} = \text{distance} &= \left(\frac{\text{speed in ft}}{\text{sec}} \right) (2 \text{ sec}) \\ &= \left(\frac{10 \text{ miles}}{\text{hr}} \right) \left(\frac{5280 \text{ ft}}{\text{mi}} \right) \left(\frac{1 \text{ hr}}{3600 \text{ sec}} \right) (2 \text{ sec}) = 29.33 \text{ ft} \end{aligned}$$

Os 10 carros mais vendidos do Brasil em 2021

- Jeep Renegade.
- Chevrolet Onix. ...
- Jeep Compass. ...
- Volkswagen Gol. ...
- Fiat Mobi. ...
- Hyundai Creta. ...
- Volkswagen T-Cross. ...
- Chevrolet Onix Plus. ...

Mais itens... • 16 de jan. de 2022

Chevrolet Onix / Comprimento

4.474 mm Chevrolet Onix Plus	4.163 mm Chevrolet Onix
---------------------------------	----------------------------

Comprimento

4,163	=	13,658136
Metro		Pé

Fórmula para um resultado aproximado, multiplique o valor de comprimento por 3,415

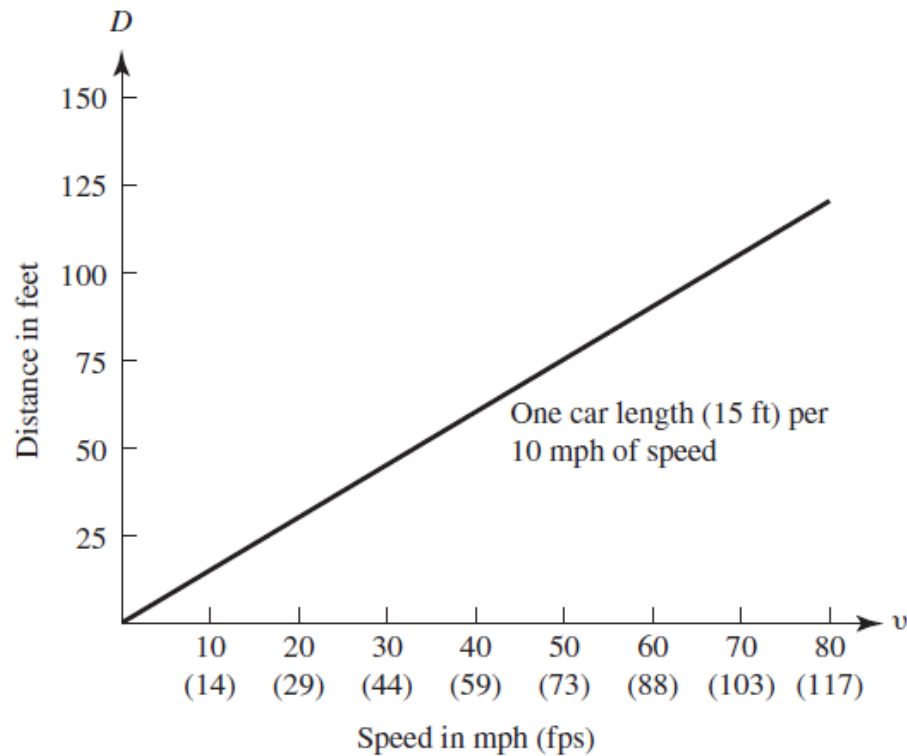
Assumir o comprimento de 15 pés do carro leva a aproximadamente uma margem de dois comprimentos de carro a baixa velocidade.

Será que a regra tem abrangência ?

Assumindo o comprimento de referência de 15
pés por 10 milhas para a distância ?

$$D = kv$$

$$k = \frac{15 \text{ ft}}{10 \text{ mph}} = \frac{15 \text{ ft}}{52,800 \text{ ft}/3600 \text{ sec}} = \frac{90}{88} \text{ sec}$$



Na discussão/exemplo da aula passada foi proposto um modelo onde a distância de parada era a soma entre a distância percorrida no tempo de reação e a distância de frenagem:

total stopping distance = reaction distance + braking distance

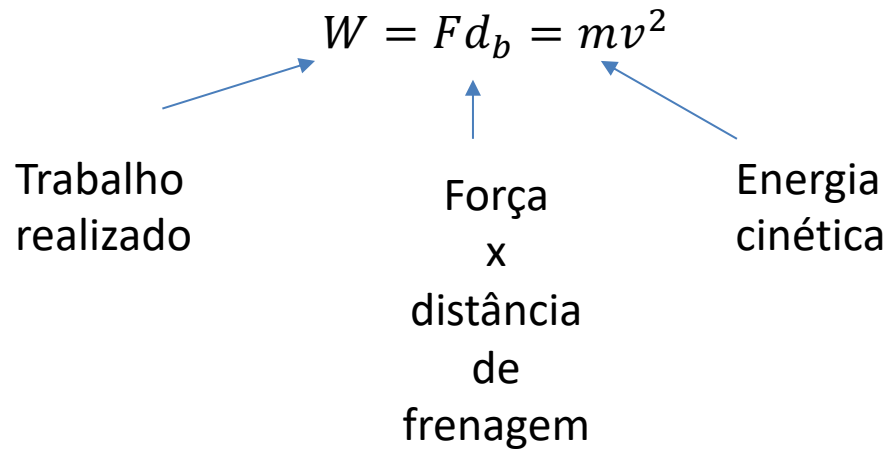
reaction distance = $f(\text{response time, speed})$

$$d_r = t_r v$$

braking distance = $h(\text{weight, speed})$

Como modelar a relação da distância de frenagem?





Uma hipótese de “conforto” é que a força de frenagem seja proporcional a massa do veículo de forma que a desaceleração dos ocupantes seja próxima independente da massa do veículo

Dessa forma a distância de frenagem seria proporcional ao quadrado da velocidade

$$d_b \propto v^2$$

Table 2.4 Observed reaction and braking distances

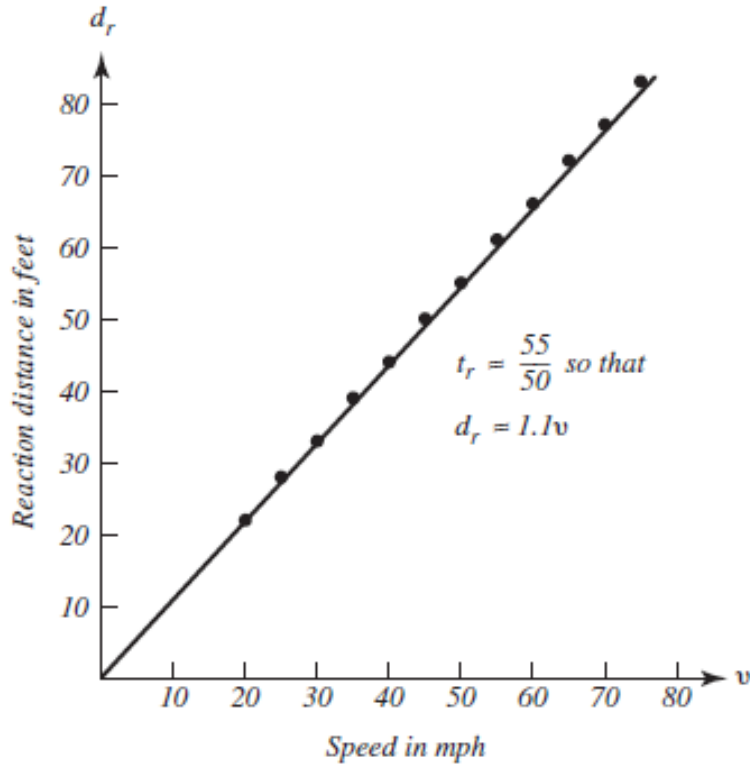
Speed (mph)	Driver reaction distance (ft)	Braking distance* (ft)		Total stopping distance (ft)	
20	22	18–22	(20)	40–44	(42)
25	28	25–31	(28)	53–59	(56)
30	33	36–45	(40.5)	69–78	(73.5)
35	39	47–58	(52.5)	86–97	(91.5)
40	44	64–80	(72)	108–124	(116)
45	50	82–103	(92.5)	132–153	(142.5)
50	55	105–131	(118)	160–186	(173)
55	61	132–165	(148.5)	193–226	(209.5)
60	66	162–202	(182)	228–268	(248)
65	72	196–245	(220.5)	268–317	(292.5)
70	77	237–295	(266)	314–372	(343)
75	83	283–353	(318)	366–436	(401)
80	88	334–418	(376)	422–506	(464)

© Cengage Learning

*Interval given includes 85% of the observations based on tests conducted by the U.S. Bureau of Public Roads. Figures in parentheses represent average values.

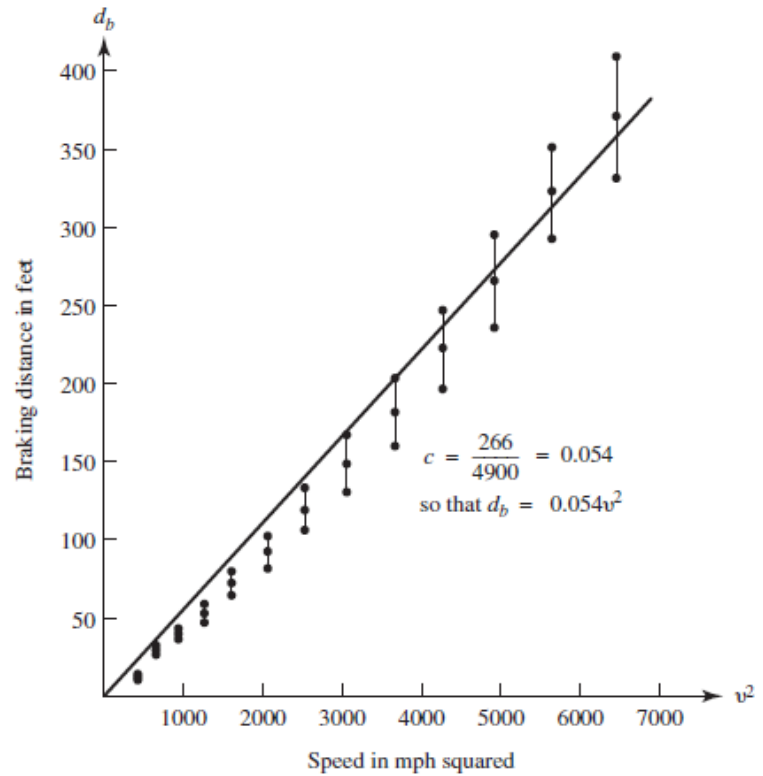
Os dados coletados pelo U.S. Bureau of Public Roads podem ser usados para construir o modelo.

Proportionality of reaction distance and speed



Distância de Reação

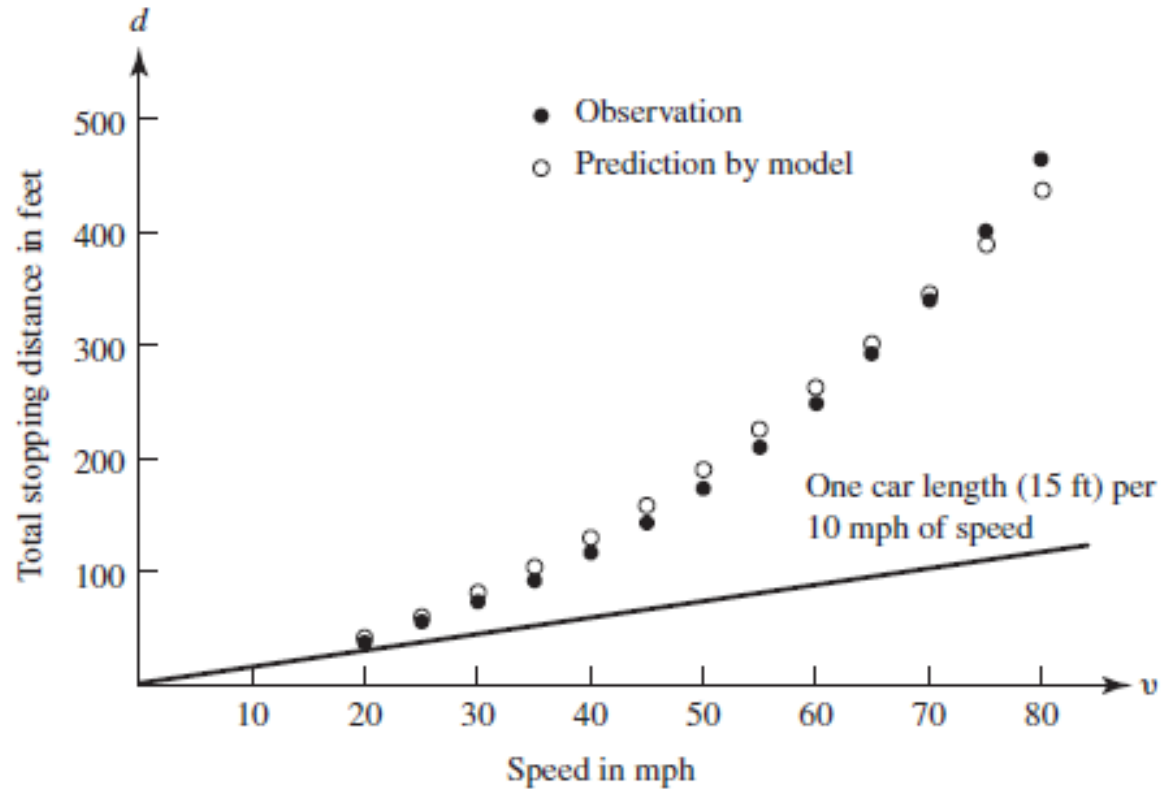
Proportionality of braking distance and the speed squared



Distância de Frenagem

Combinando os termos, o modelo tem a forma:

$$d = 1.1v + 0.054v^2$$



A aderência do modelo aos dados é boa, e claramente se vê que a regra de bolso dos 2 segundos não resulta numa distância segura para velocidades mais altas.

Uma proposta mais segura seria assumir que o veículo que segue seja capaz de parar no tempo necessário ou distância necessária em relação ao veículo a frente.

Table 2.5 Time required to allow the proper stopping distance

Speed		Trailing time required for maximum stopping distance (sec)		
(mph)	(fps)	Stopping distance* (ft)		
20	(29.3)	42	(44) [†]	1.5
25	(36.7)	56	(59)	1.6
30	(44.0)	73.5	(78)	1.8
35	(51.3)	91.5	(97)	1.9
40	(58.7)	116	(124)	2.1
45	(66.0)	142.5	(153)	2.3
50	(73.3)	173	(186)	2.5
55	(80.7)	209.5	(226)	2.8
60	(88.0)	248	(268)	3.0
65	(95.3)	292.5	(317)	3.3
70	(102.7)	343	(372)	3.6
75	(110.0)	401	(436)	4.0
80	(117.3)	464	(506)	4.3



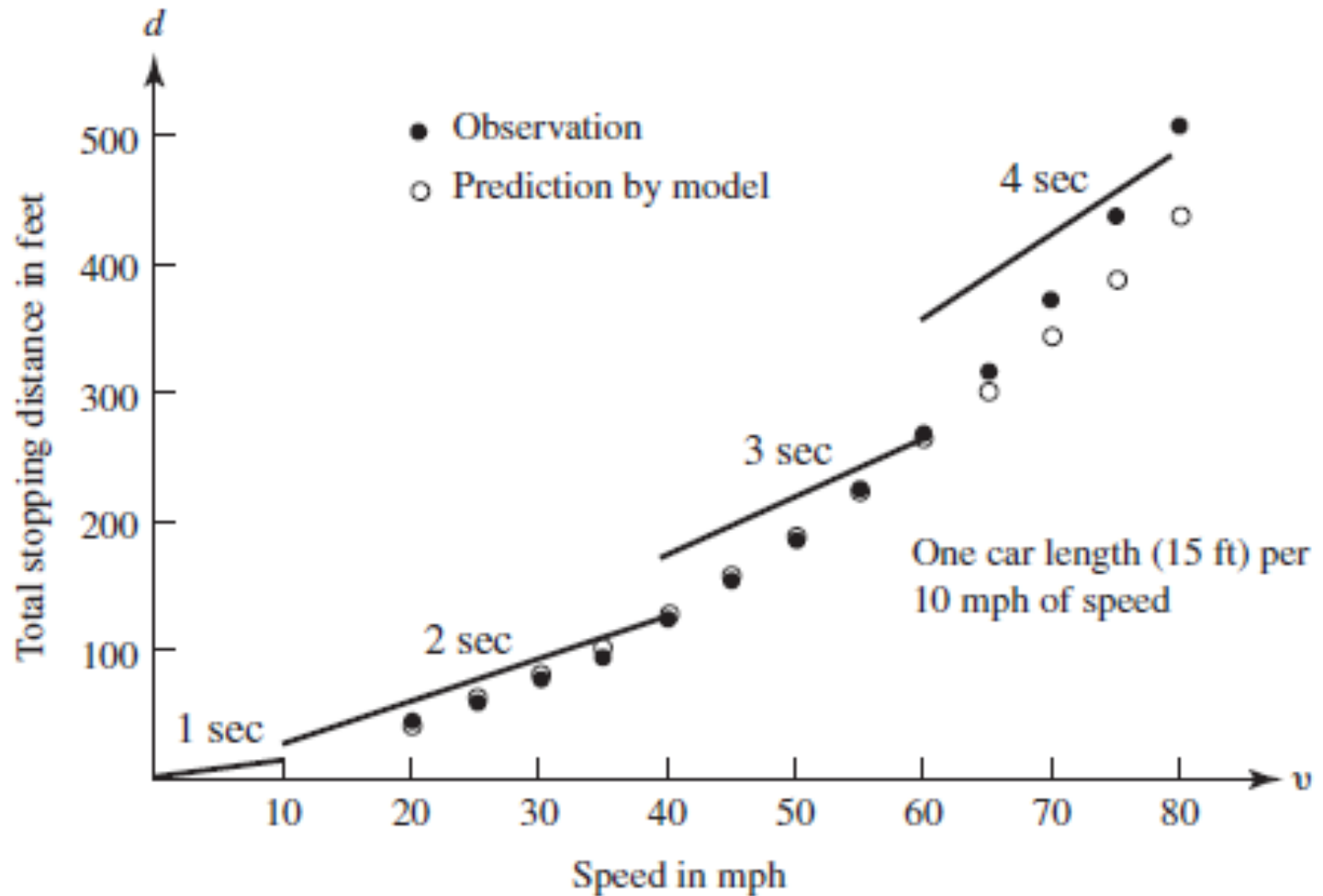
Speed (mph)	Guideline (sec)
0–10	1
10–40	2
40–60	3
60–75	4

A regra seria escalonada por faixa de velocidade

© Cengage Learning

*Includes 85% of the observations based on tests conducted by the U.S. Bureau of Public Roads.

[†]Figures in parentheses under stopping distance represent maximum values and are used to calculate trailing times.



As estradas em geral tem limites de velocidade também escalonados de acordo com o tipo, logo a regra poderia ser associada ao tipo de estrada (via local, via expressa, auto-estrada, por exemplo)

2.2 PROBLEMS

Usando como referência o exemplo da Lei de Kepler para os planetas procure verificar se as proposta de proporcionalidade são aceitáveis.

In Problems 7–12, determine whether the data set supports the stated proportionality model.

7. Force \propto Stretch

Force	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Stretch	19	57	94	134	173	216	256	297	343

8. $y \propto x^3$

y	19	25	32	51	57	71	113	141	123	187	192	205	252	259	294
x	17	19	20	22	23	25	28	31	32	33	36	37	38	39	41

9. $d \propto v^2$

d	22	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77
v	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70

10. $y \propto x^2$

y	4	11	22	35	56	80	107	140	175	215
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11. $y \propto x^3$

y	0	1	2	6	14	24	37	58	82	114
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

12. $y \propto e^x$

y	6	15	42	114	311	845	2300	6250	17000	46255
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fim Aula 08