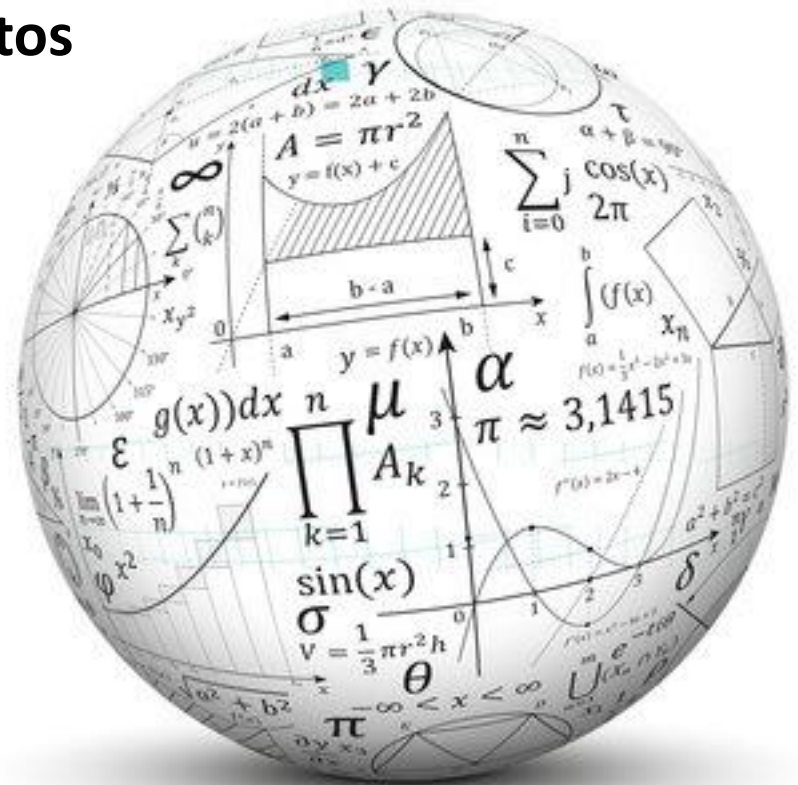


MAP 2110 – Modelagem e Matemática

1º Semestre - 2023

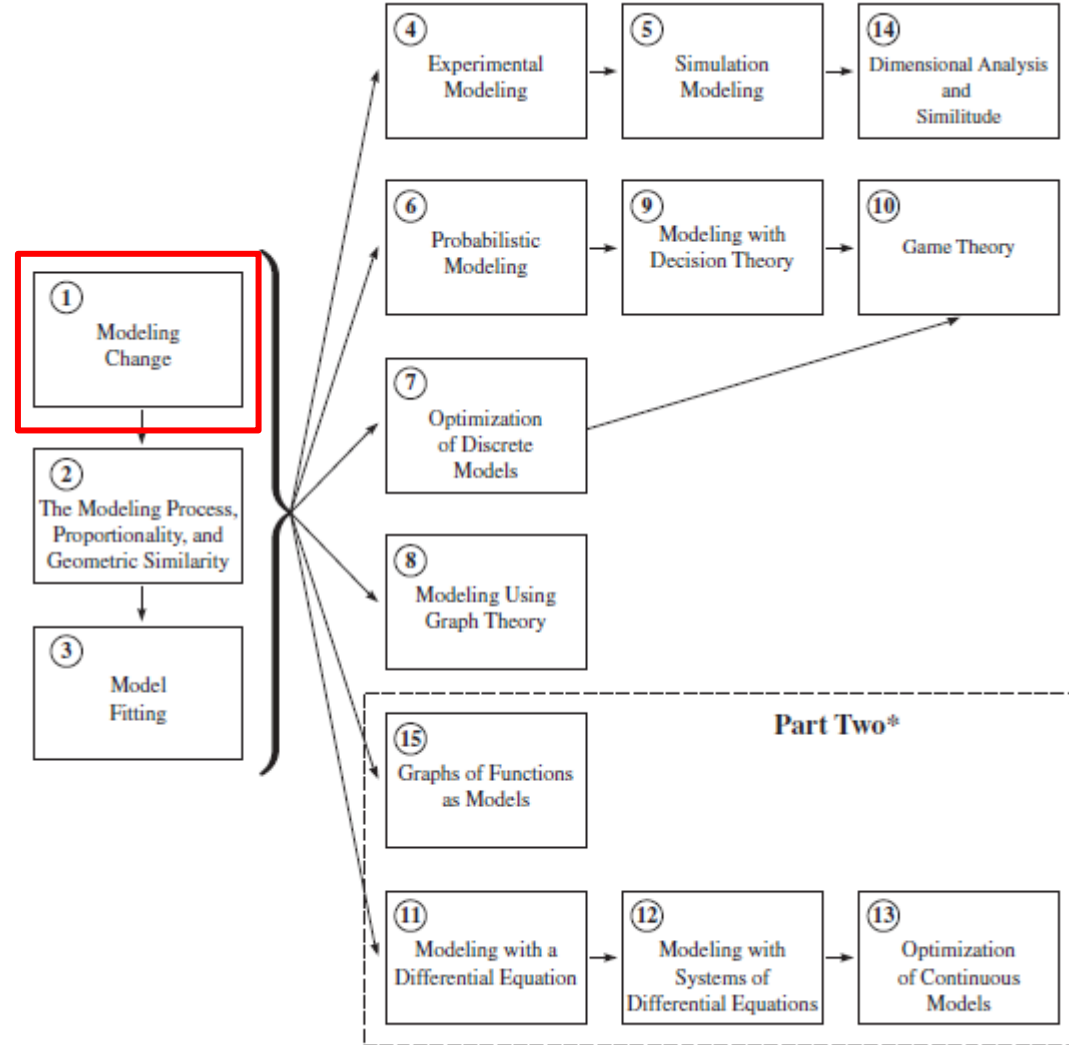
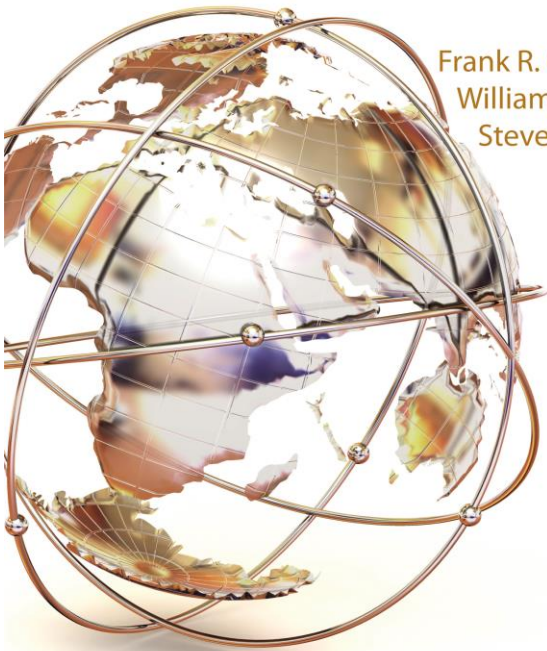
Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



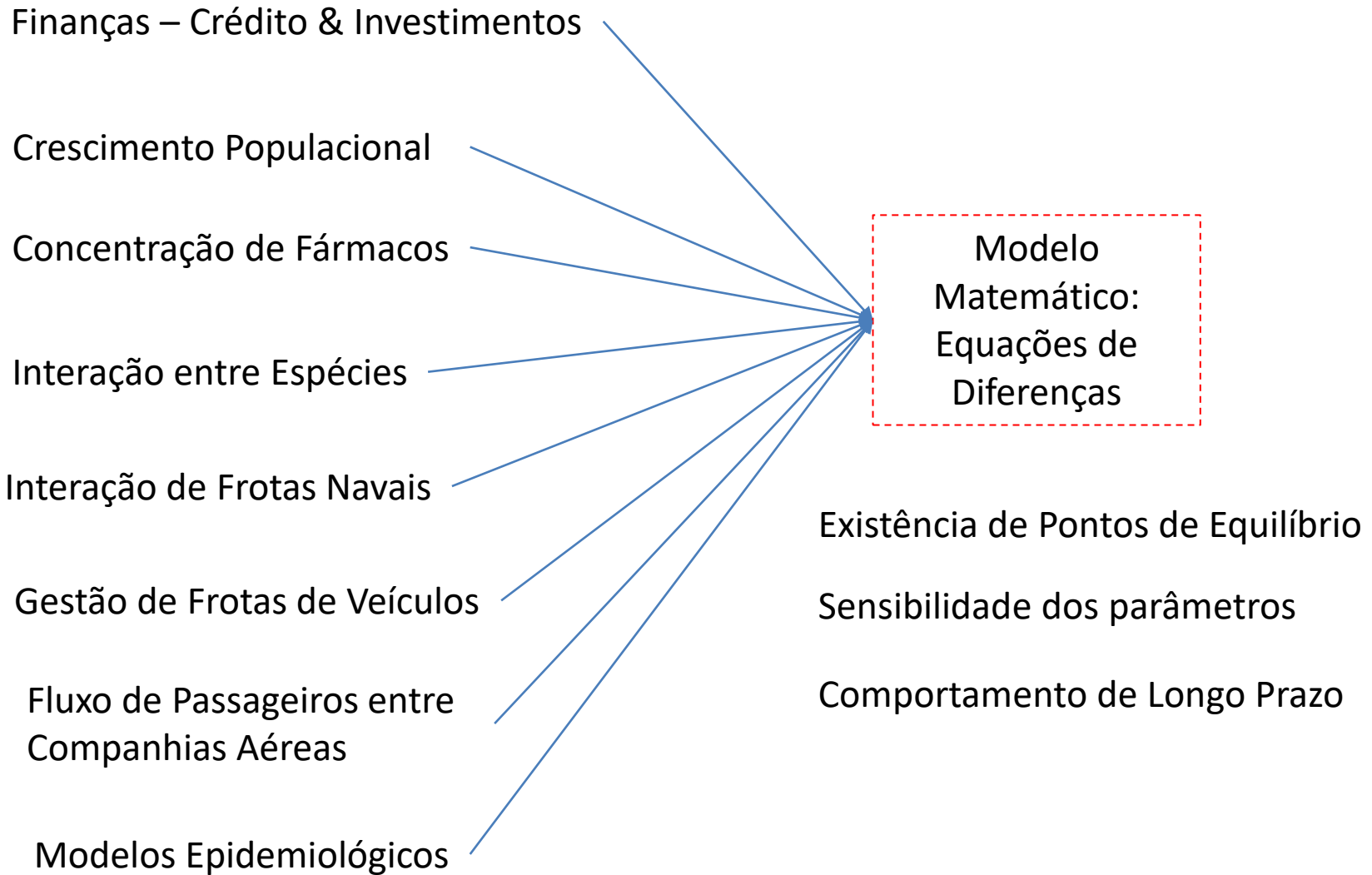
A First Course in
MATHEMATICAL MODELING
 Fifth Edition

Frank R. Giordano
 William P. Fox
 Steven B. Horton



*Part Two requires single-variable calculus as a corequisite.

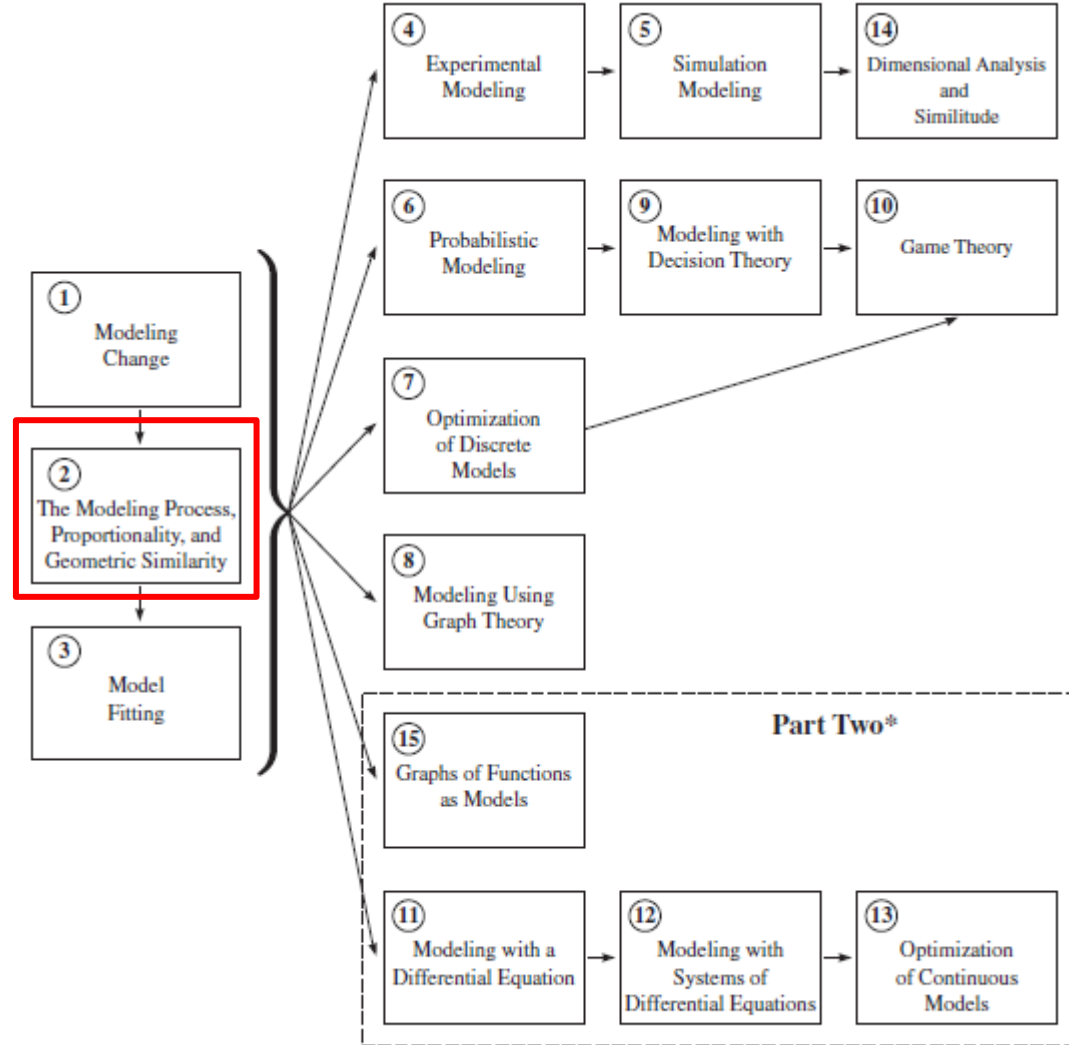
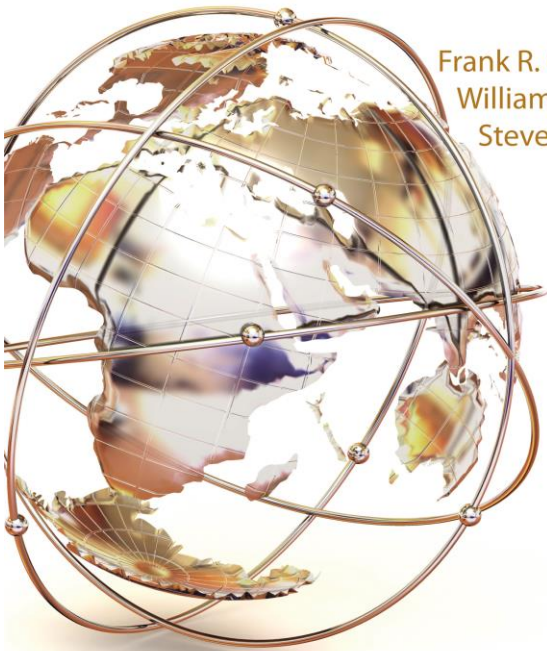
Nas aulas anteriores nos dedicamos ao capítulo 1



Vimos como diversos problemas poderiam ser resolvidos utilizando uma classe de modelos matemáticos: as equações de diferenças

A First Course in
MATHEMATICAL MODELING
 Fifth Edition

Frank R. Giordano
 William P. Fox
 Steven B. Horton



*Part Two requires single-variable calculus as a corequisite.

O capítulo 2 combina alguns elementos ...



The Modeling Process, Proportionality, and Geometric Similarity

2.1 - Processo de Modelagem: Como trazer o mundo real para o mundo da matemática ?

2.2 - Proporcionalidade: Como usar a relação numérica mais simples (com algumas variações versáteis) para modelar a relação entre grandezas de interesse ?

2.3 - Similaridade Geométrica: Será que podemos usar modelos reduzidos para extrapolar as relações das aplicações reais ?

2.4 & 2.5 - Duas aplicações

São 3 tópicos: um mais geral sobre o processo de modelagem e dois mais aplicados usando relações simples.

Real-world systems

Observed behavior
or phenomenon

Mathematical world

Models
Mathematical operations
and rules
Mathematical conclusions

O processo de modelagem visa representar aspectos do mundo real por algum conjunto de modelos e relações matemáticas.

[link](#)



Caminhão Real



Caminhão de
"Brinquedo" =
"modelo
educacional" 😊



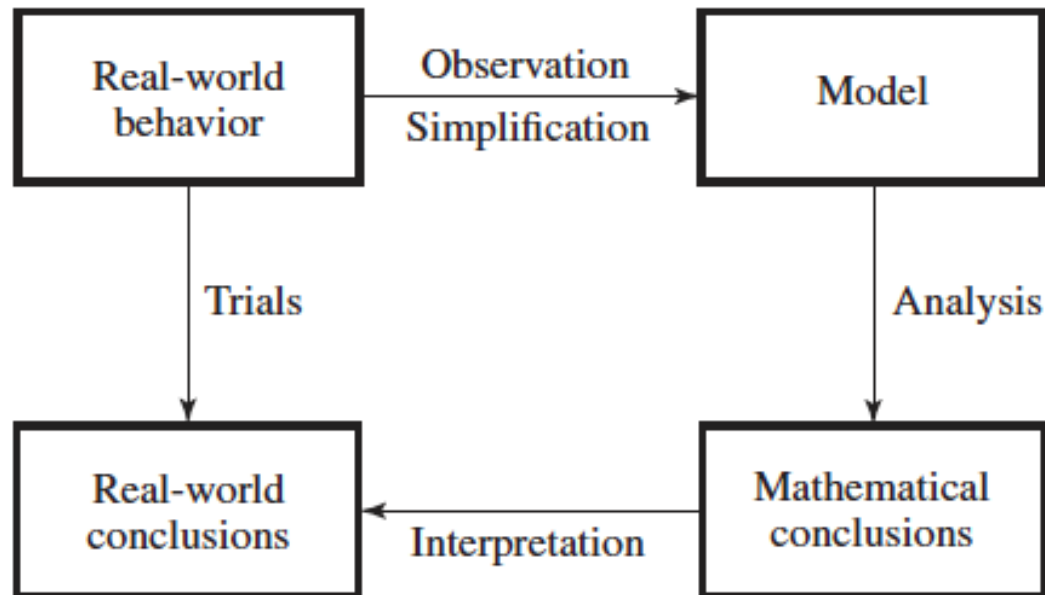
Modelo geométrico do
Caminhão



Simulador de pilotagem de
Caminhão

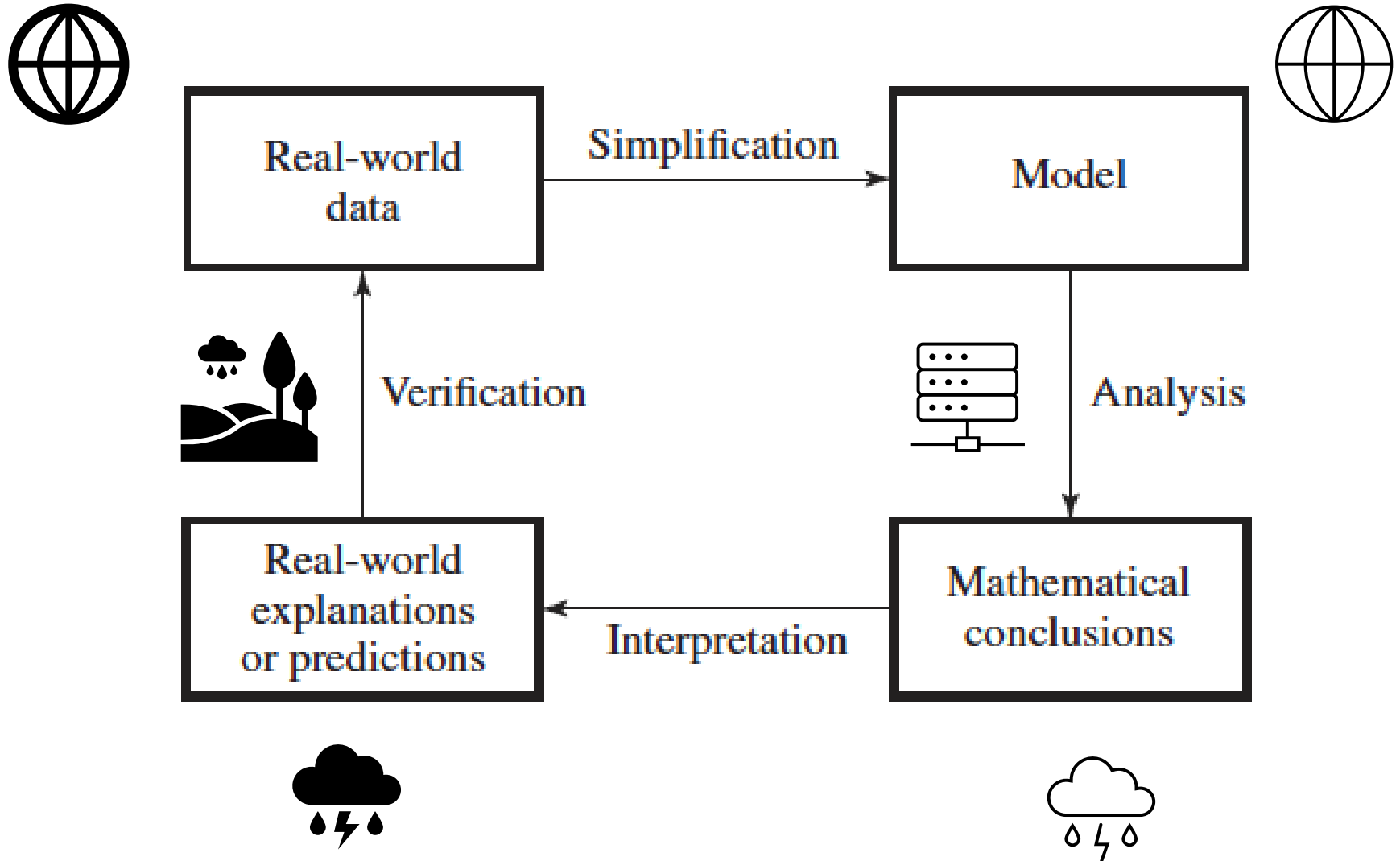
Um mesmo sistema pode ser representado por diferentes tipos e níveis de modelos
-> Em função do uso do Modelo

Experimentos são a natureza real mas podem ser limitados por risco, custo ou escala.



Modelos podem ser construídos para auxiliar no entendimento do mundo real, mas sempre contém simplificações e consequentemente limitações

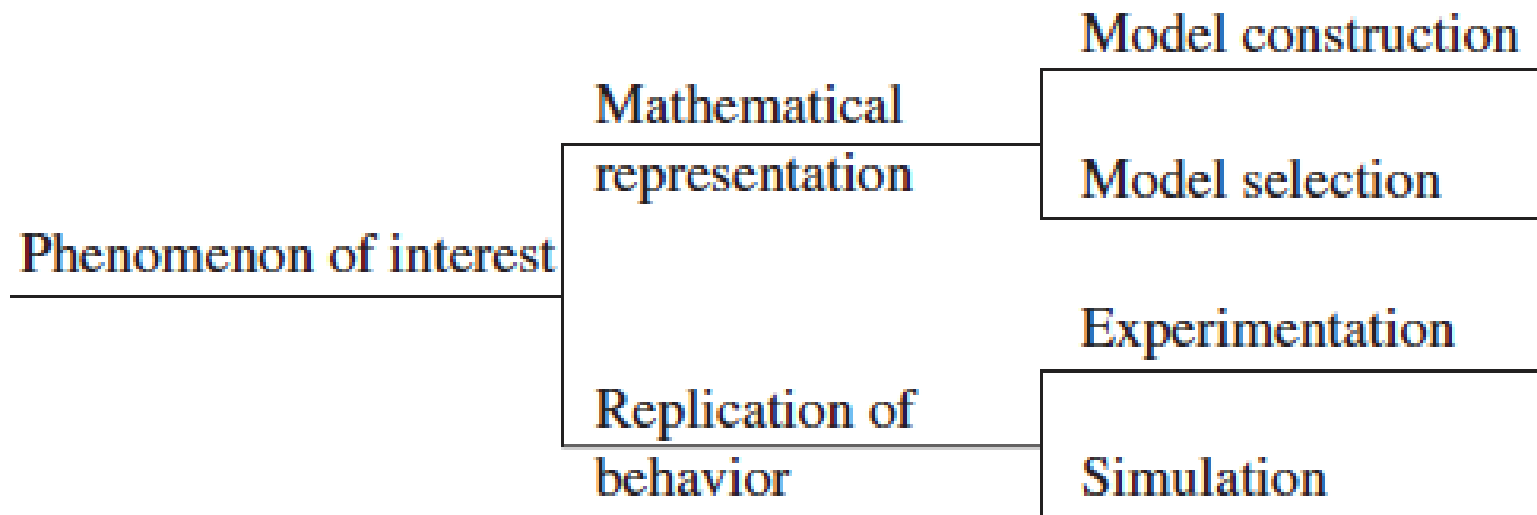
Processo de Modelagem como um sistema fechado



2.1 Mathematical Models

The nature of the model

A natureza do modelo



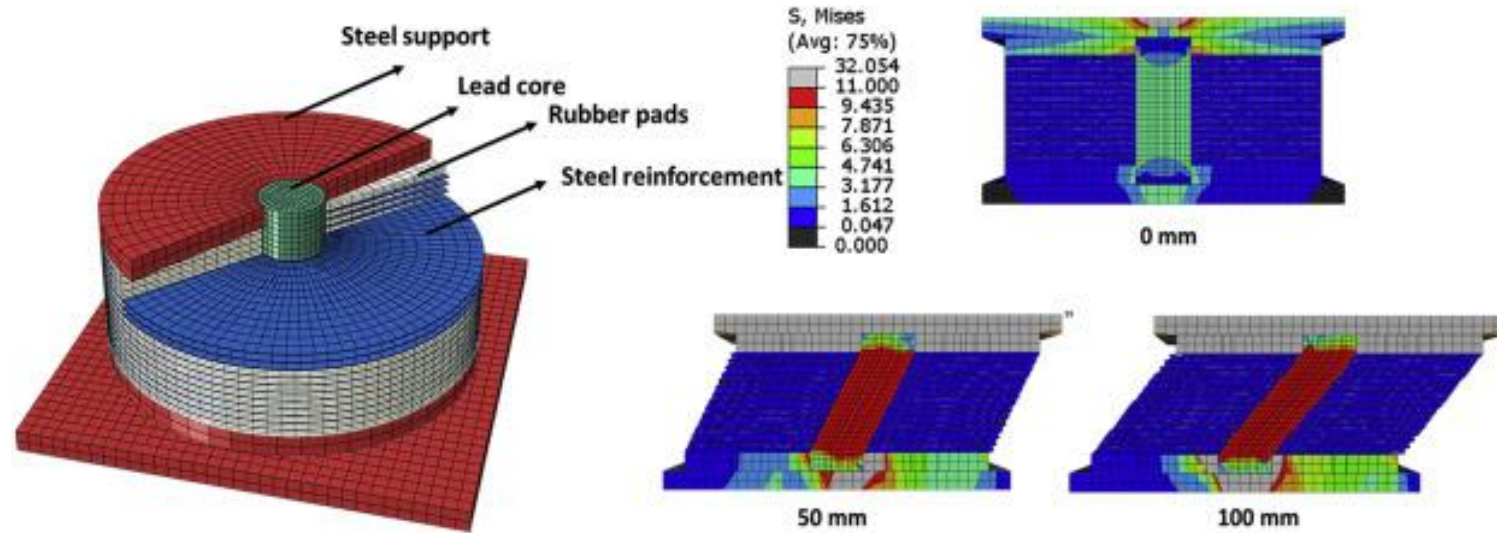


Tomando como exemplo o dano causado por terremotos: como eles podem ser reduzidos ?

- a) Estruturas resistentes: projetar a estrutura para suportar o abalo
- b) Controle de Vibração: adicionar contrapesos para minimizar a amplitude de oscilação
- c) Isoladores de base: manter a estrutura isolada do solo e da oscilação



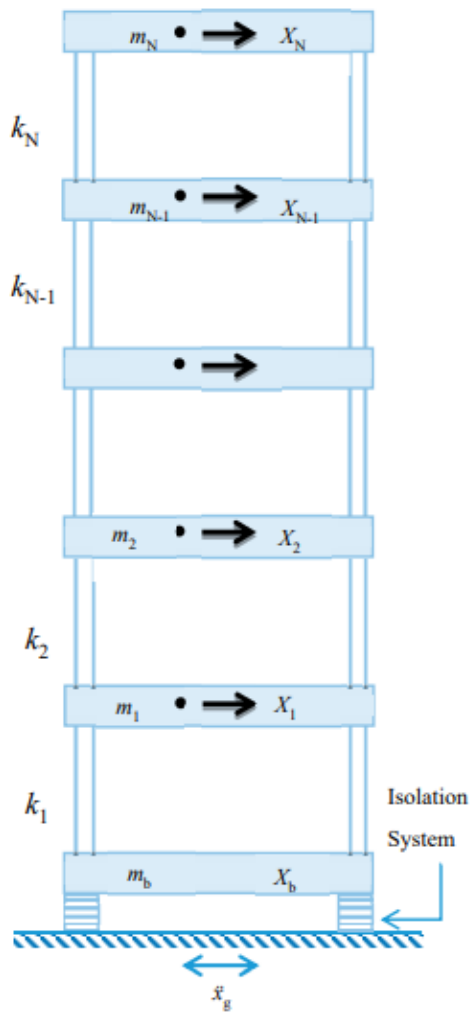
Isolador de Base – É uma peça com diversos materiais, capaz de suportar a carga da estrutura e flexível o suficiente para manter a oscilação de topo menor que da base



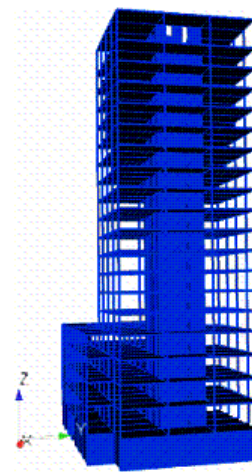
LRB-350

Diameter	350 mm	Lead diameter	60 mm
Rubber layer thickness	7 mm	Maximum displacement	210 mm
Number of rubber layer	15	Nominal Effective stiffness	0.49 kN/mm
Rubber shear modulus	0.4 MPa	Nominal damping ratio	30 %
Rubber damping	10 %	Maximum Axial Load	700 kN

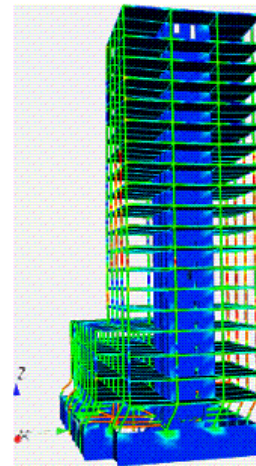
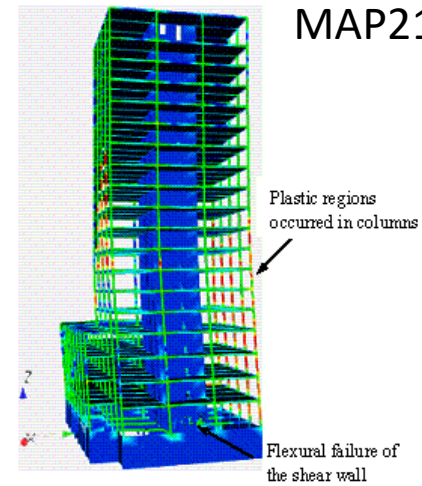
O desempenho do Oscilador de Base tem que ser projetado e um recurso é o uso de modelos (no caso um Modelo de Elementos Finitos)



Modelo de Parâmetros Concentrados



(b)



(d)

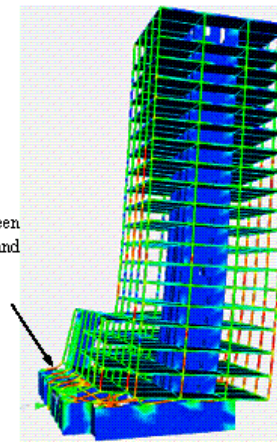
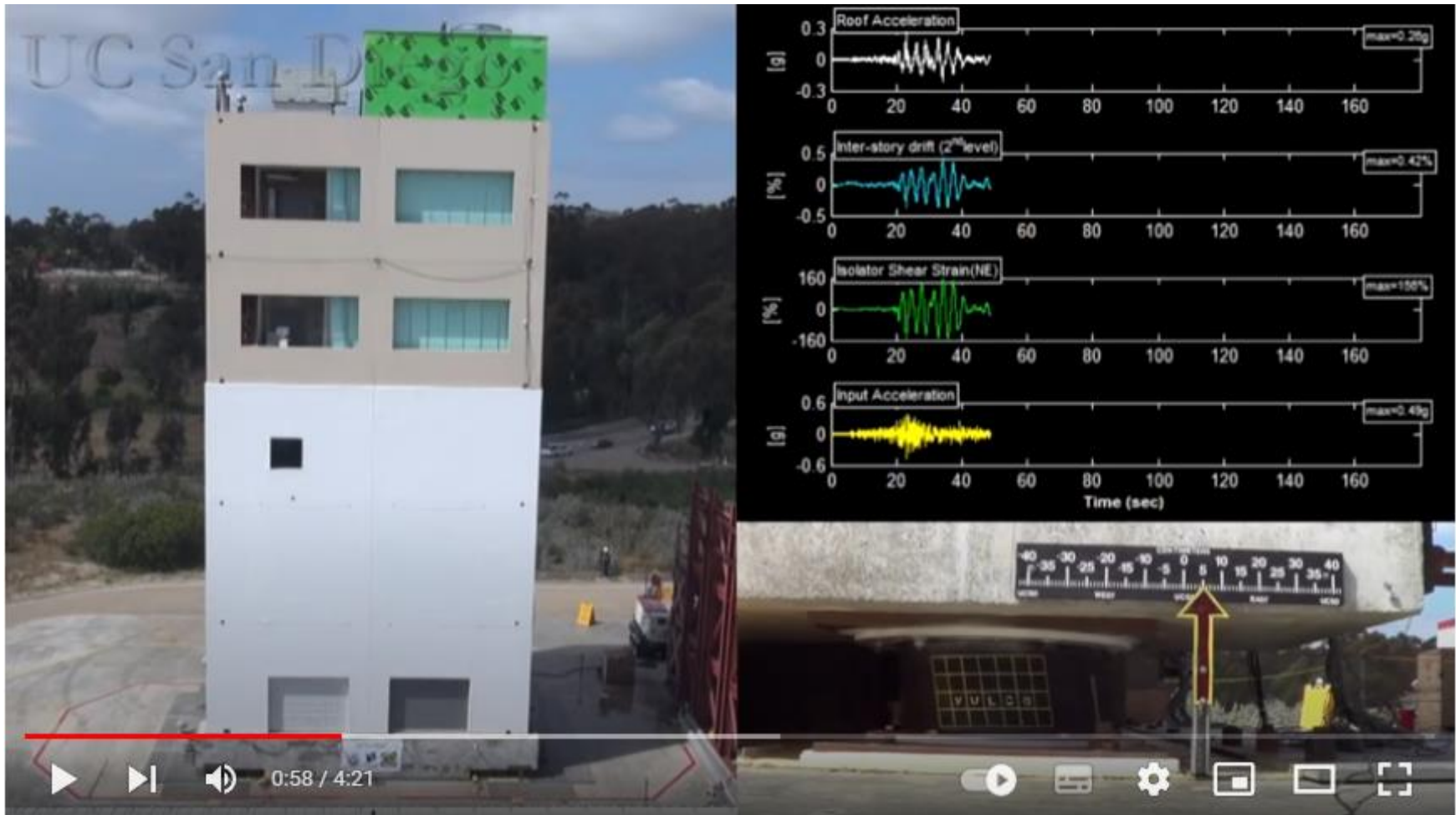


Figure 25 Collapse process of the 20-story frame-core tube building (Ground motion: Kocaeli, Turkey, PGA=4000 gal): (a) $t=0.0s$; (b) $t=14.5s$; (c) $t=15.5s$; (d) $t=16.3s$

Modelo de Elementos Finitos

Diferentes tipos de modelos podem ser usado para avaliar a eficácia do isolador e o potencial dano nas estruturas com diferentes nível de fidelidade.

Um experimento em escala é uma forma de validar a solução física e provê dados para a validação de modelos (para uso futuro)



Base Isolation Test

<https://www.youtube.com/watch?v=Es0Bp7XYJbk>

Propriedades dos Modelos:

Fidelity: The preciseness of a model's representation of reality

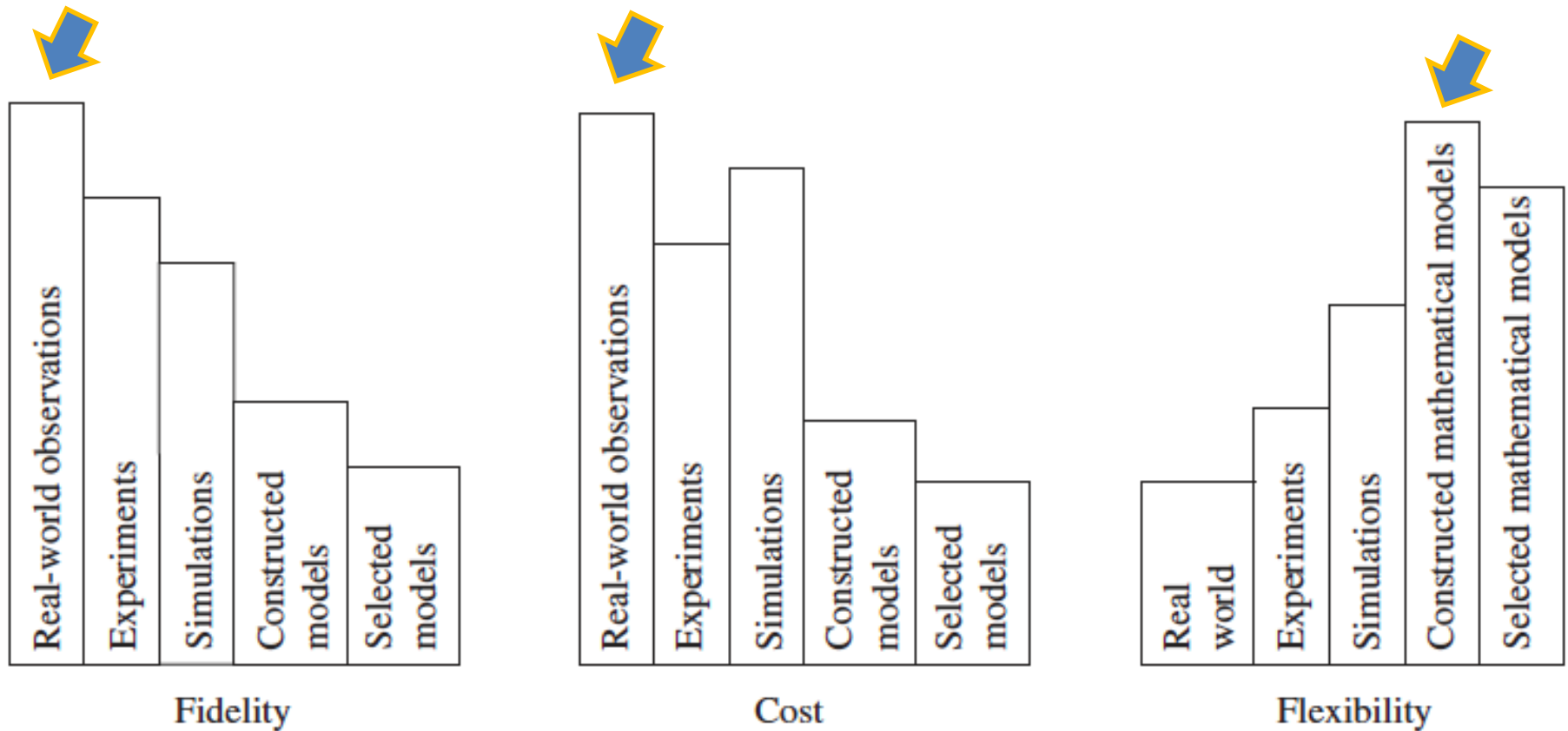
Precisão do modelo na representação da realidade

Costs: The total cost of the modeling process

O custo total do processo de modelagem

Flexibility: The ability to change and control conditions affecting the model as required data are gathered

A habilidade de mudar e controlar as condições afetando o modelo a medida que os dados são coletados



“Simulations”, “Constructed Models” e “Selected Models” podem ser vistos como diferentes níveis de simplificação do equacionamento dos fenômenos envolvidos no modelo (ex. 3D, 1D e 0D).

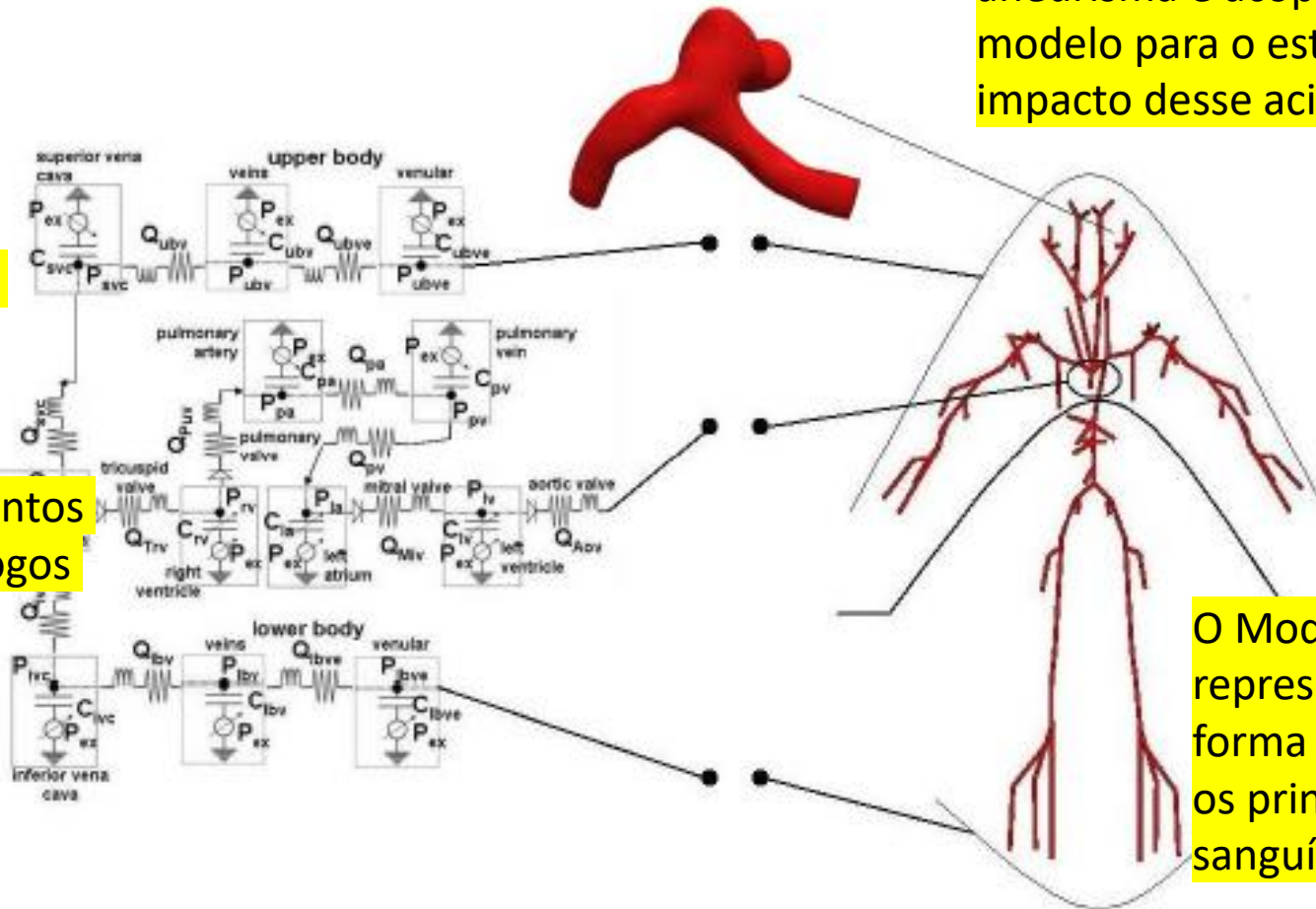
Pablo J. Blanco^{a,b} and Raúl A. Feijóo^{a,b}

^aLaboratório Nacional de Computação Científica LNCC/MCT, Av. Getúlio Vargas 333, 25651-075
Petrópolis, Brazil, {pjblanco,feij}@lncc.br, <http://www.lncc.br>

^bInstituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Medicina Assistida por Computação Científica,
Petrópolis, Brazil, <http://macc.lncc.br/>

Um modelo 3-D de um aneurisma é acoplado ao modelo para o estudo do impacto desse acidente

O modelo 0-D simplifica as relações metabólicas usando elementos simples (análogos a circuitos elétricos)



O Modelo 1-D representa de forma simplificada os principais vasos sanguíneos

Figure 12: Scheme of the 1D-0D closed-loop model with a 3D patient-specific aneurysm embedded in it.

Construction of a mathematical model

Passos para a Construção do Modelo

Step 1. Identify the problem.

Step 2. Make assumptions.

- a. Identify and classify the variables.
- b. Determine interrelationships between the variables and submodels.

Step 3. Solve the model.

Step 4. Verify the model.

- a. Does it address the problem?
- b. Does it make common sense?
- c. Test it with real-world data.

Step 5. Implement the model.

Step 6. Maintain the model.

STEP 1 **IDENTIFY THE PROBLEM.** What is the problem you would like to explore? Typically this is a difficult step because in real-life situations no one simply hands you a mathematical problem to solve. Usually you have to sort through large amounts of data and identify some particular aspect of the situation to study. Moreover, it is imperative to be sufficiently precise (ultimately) in the formulation of the problem to allow for translation of the verbal statements describing the problem into mathematical symbols. This translation is accomplished through the next steps. It is important to realize that the answer to the question posed might not lead directly to a usable problem identification.

A identificação do problema é um dos passos mais complexos da modelagem matemática pois envolve tanto o entendimento do fenômeno, a existência de modelos representativos do fenômeno e qual a abordagem de interesse do problema resolvido (o uso do modelo).

STEP 2 **MAKE ASSUMPTIONS.** Generally, we cannot hope to capture in a usable mathematical model all the factors influencing the identified problem. The task is simplified by reducing the number of factors under consideration. Then, relationships among the remaining variables must be determined. Again, by assuming relatively simple relationships, we can reduce the complexity of the problem. Thus the assumptions fall into two main activities:

A complexidade do mundo real é sempre muito maior do que o alcance dos modelos existentes, logo é necessário um conjunto de hipóteses simplificadoras para encaixar o problema dentro das possibilidades de modelagem.

Consequentemente, ao interpretar os resultados do modelo deve-se lembrar das hipóteses feitas e que o modelo não pode representar o que não está modelado.

- a. **CLASSIFY THE VARIABLES.** What things influence the behavior of the problem identified in Step 1? List these things as variables. The variables the model seeks to explain are the dependent variables, and there may be several of these. The remaining variables are the independent variables. Each variable is classified as dependent, independent, or neither.

Uma vez selecionada a classe do modelo deve-se classificar as variáveis. Essa classificação irá definir as entradas e saídas e a necessidade de dados e hipóteses.

- b. **DETERMINE INTERRELATIONSHIPS AMONG THE VARIABLES SELECTED FOR STUDY.** Before we can hypothesize a relationship among the variables, we generally must make some additional simplifications. The problem may be so complex that we cannot see a relationship among all the variables initially. In such cases it may be possible to study submodels.

Em alguns casos algumas variáveis são dependentes entre si. Se isso é verdade o modelo pode ser reduzido, o que ajuda em relação ao custo computacional.

STEP 3 SOLVE OR INTERPRET THE MODEL. Now put together all the submodels to see what the model is telling us. In some cases the model may consist of mathematical equations or inequalities that must be solved to find the information we are seeking. Often, a problem statement requires a best solution, or *optimal solution*, to the model. Models of this type are discussed later.

Dependendo da classe de problema matemático, um processo de solução específico será executado.

STEP 4 VERIFY THE MODEL. Before we can use the model, we must test it out. There are several questions to ask before designing these tests and collecting data—a process that can be expensive and time-consuming. First, does the model answer the problem identified in Step 1, or did it stray from the key issue as we constructed the model? Second, is the model usable in a practical sense? That is, can we really gather the data necessary to operate the model? Third, does the model make common sense?

Once the commonsense tests are passed, we will want to test many models using actual data obtained from empirical observations.

Para estabelecer a confiança no modelo para uso prático ele deve passar por algumas fases de verificação, desde da consistência conceitual quanto na aplicação em problemas análogos de resposta conhecida.

STEP 5 IMPLEMENT THE MODEL. Of course, our model is of no use just sitting in a filing cabinet. We will want to explain our model in terms that the decision makers and users can understand if it is ever to be of use to anyone. Furthermore, unless the model is placed in a user-friendly mode, it will quickly fall into disuse. Expensive computer programs sometimes suffer such a demise. Often the inclusion of an additional step to facilitate the collection and input of the data necessary to operate the model determines its success or failure.

Esse passo se confunde com o passo 3. O modelo pode ser implementado em alguma plataforma seja linguagem de programação, ou aplicativo. Na solução prévia ao passo de verificação pode-se optar por uma forma de implementação e posteriormente para o uso definitivo utilizar outra.

STEP 6 MAINTAIN THE MODEL. Remember that the model is derived from a specific problem identified in Step 1 and from the assumptions made in Step 2. Has the original problem changed in any way, or have some previously neglected factors become important? Does one of the submodels need to be adjusted?

Na sua forma final para uso contínuo o modelo implementado deve ser mantido, tanto em relação aos aspectos computacionais quanto em relação a dados que são usados para suportar a solução que venham a evoluir.

EXAMPLE 1**Scenario**

REGRA DOS 2 SEGUNDOS

- 1 - Escolha um ponto fixo à margem da rodovia
- 2 - Quando o veículo da frente passar pelo ponto fixo, comece a contar
- 3 - Conte 2 segundos pausadamente
- 4 - A distância entre o seu veículo e o da frente será segura se você passar pelo ponto fixo após a contagem dos dois segundos
- 5 - Caso contrário, reduza a velocidade e conte novamente



Problem Identification

Identificação do Problema

Uma pergunta vaga é “O quanto essa regra é boa ?”

A princípio a regra não leva em conta a velocidade do veículo, logo pode-se propor o problema de uma outra forma:

“Qual é a distância de parada de um veículo em função da sua velocidade ?”

Obtida essa resposta pode-se investigar para qual limite de velocidade a regra ainda é segura.

Predict the vehicle's total stopping distance as a function of its speed.

Assumptions

Hipóteses

total stopping distance = reaction distance + braking distance

Distância de parada

Distância de reação

reaction distance = $f(\text{response time, speed})$

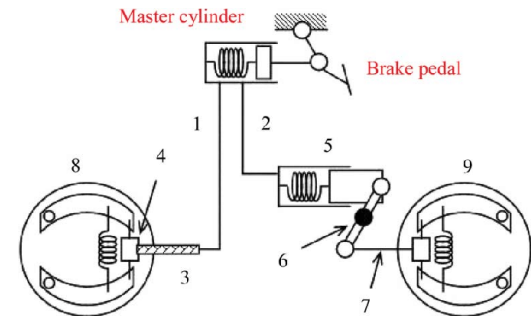
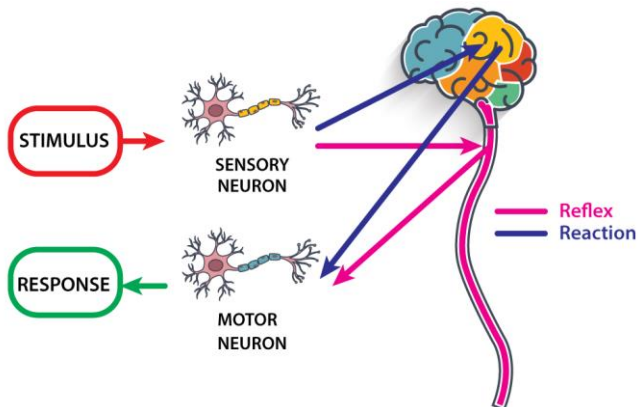
Peso do veículo

Distância de frenagem

braking distance = $h(\text{weight, speed})$

Tempo de reação

velocidade



- 1: Front brake tube; 2: Rear brake tube; 3: Brake hose;
- 4: Wheel cylinder; 5: Power cylinder; 6: Link;
- 7: Wire; 8: Front drum brake; 9: Rear drum brake

O processo de modelagem pode ser visto como uma forma de implementação do método científico

One version of the **scientific method** is as follows:

- STEP 1** Make some general observations of a phenomenon.
- STEP 2** Formulate a hypothesis about the phenomenon.
- STEP 3** Develop a method to test that hypothesis.
- STEP 4** Gather data to use in the test.
- STEP 5** Test the hypothesis using the data.
- STEP 6** Confirm or deny the hypothesis.

O modelo é válido para representar o fenômeno ?

A construção de modelos é um processo de natureza iterativa.

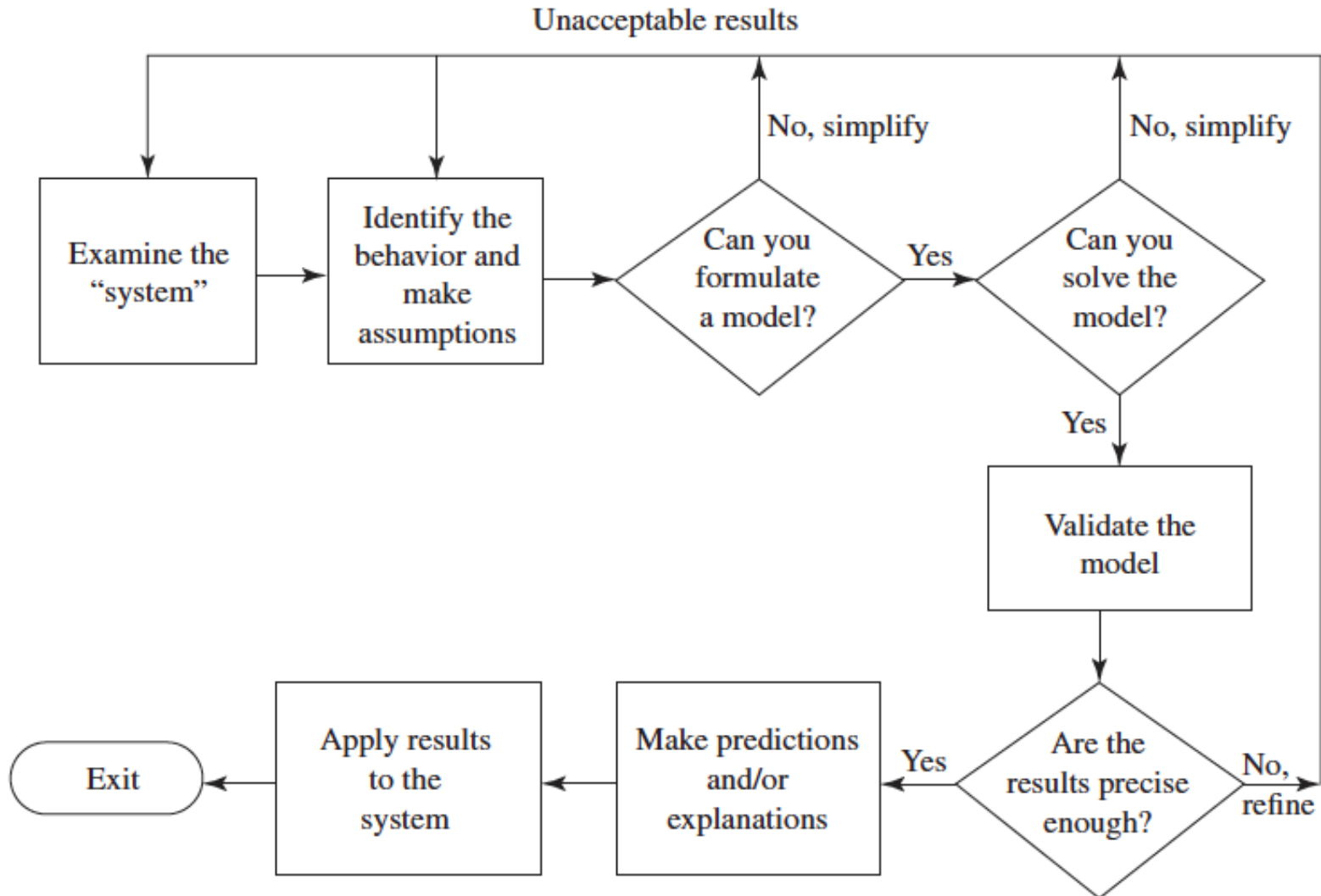


Table 2.1 The art of mathematical modeling: simplifying or refining the model as required


Model simplification	Model refinement
<ol style="list-style-type: none"> 1. Restrict problem identification. 2. Neglect variables. 3. Conglomerate effects of several variables. 4. Set some variables to be constant. 5. Assume simple (linear) relationships. 6. Incorporate more assumptions. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Expand the problem. 2. Consider additional variables. 3. Consider each variable in detail. 4. Allow variation in the variables. 5. Consider nonlinear relationships. 6. Reduce the number of assumptions.

Simplifica-se o modelo para que seja possível obter uma solução

Refina-se o modelo para que a solução tenha a precisão necessária para o uso desejado.



In Problems 1–8, the scenarios are vaguely stated. From these vague scenarios, identify a problem you would like to study. Which variables affect the behavior you have identified in the problem identification? Which variables are the most important? Remember, there are really no right answers.

1. 
2. A retail store intends to construct a new parking lot. How should the lot be illuminated?
3. A farmer wants to maximize the yield of a certain crop of food grown on his land. Has the farmer identified the correct problem? Discuss alternative objectives.
4. How would you design a lecture hall for a large class?
5. An object is to be dropped from a great height. When and how hard will it hit the ground?
6. How should a manufacturer of some product decide how many units of that product should be manufactured each year and how much to charge for each unit?
7. The United States Food and Drug Administration is interested in knowing if a new drug is effective in the control of a certain disease in the population.
8. How fast can a skier ski down a mountain slope?

Considere os seguintes problemas para a realização de um trabalho.

- FORMEM GRUPOS DE NO MÁXIMO 5 PESSOAS.
- DISCUTAM EM GRUPO PARA CADA PROBLEMA, AS VARIÁVEIS, HIPÓTESES E POTENCIAIS ABORDAGEMS.
- ENVIEM UM DOCUMENTO DIGITAL COM UM TEXTO RESUMINDO A DISCUSSÃO EM PDF INCLUINDO OS PARTICIPANTES DO GRUPO.
- ESSA ENTREGA, SE FEITA COM QUALIDADE, PODERÁ ADICIONAR ATÉ 0.5 PONTO NA MÉDIA FINAL.
- ENVIEM O MATERIAL POR E-MAIL ATÉ 19/05/2023 as 23:59.

Fim Aula 07