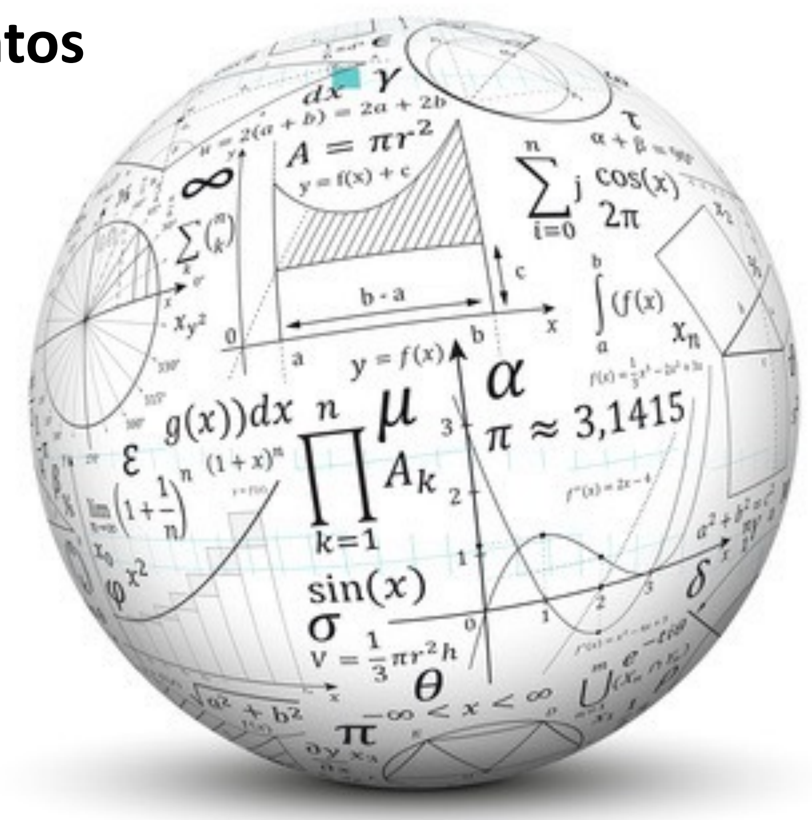
MAP 2110 – Modelagem e Matemática

1º Semestre - 2023

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



Preâmbulo: Na aula passada for apresentada e verificada a solução

The solution of the dynamical system $a_{n+1} = ra_n + b, r \neq 1$ is

$$a_k = r^k c + \frac{b}{1-r}$$

for some constant c (which depends on the initial condition).

Como ela pode ser deduzida ?

$$a_{n+1} = r a_n + b$$

$$a_1 = r a_0 + b$$

$$a_2 = r a_1 + b = r^2 a_0 + br + b$$

$$a_3 = r a_2 + b = r^3 a_0 + br^2 + br + b$$

$$\vdots$$

$$a_k = r^k a_0 + b \sum_{i=0}^{k-1} r^i$$

$$S_r = \sum_{i=0}^{k-1} r^i$$

$$S_r = \sum_{i=0}^{k-1} r^i$$

$$S_r = 1 + r + r^2 + \dots + r^{k-1}$$

$$r S_r = r + r^2 + r^3 + \dots + r^k$$

$$S_r - r S_r = 1 - r^k$$

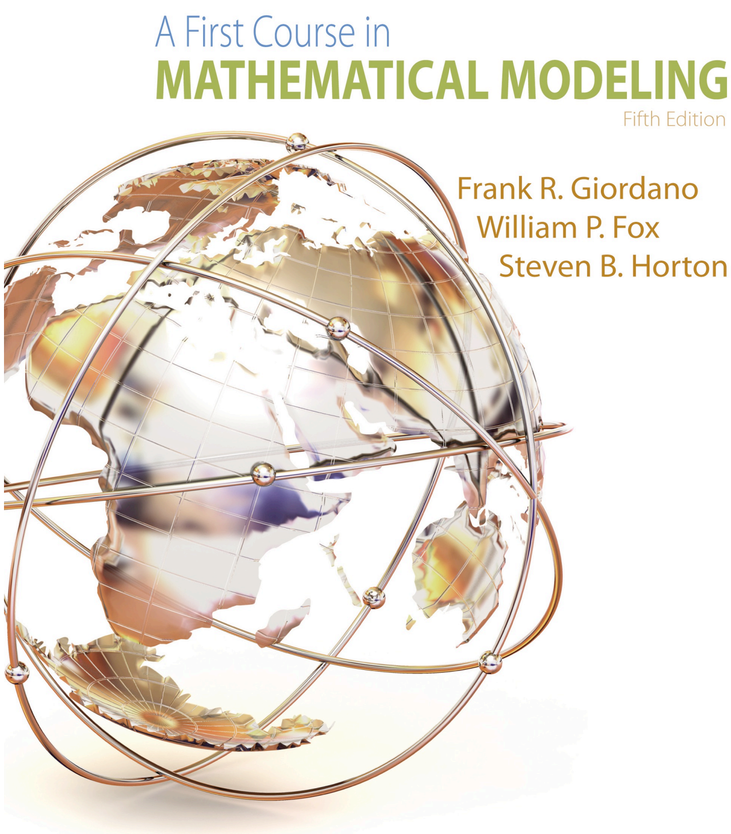
$$(1-r) S_r = 1 - r^k$$

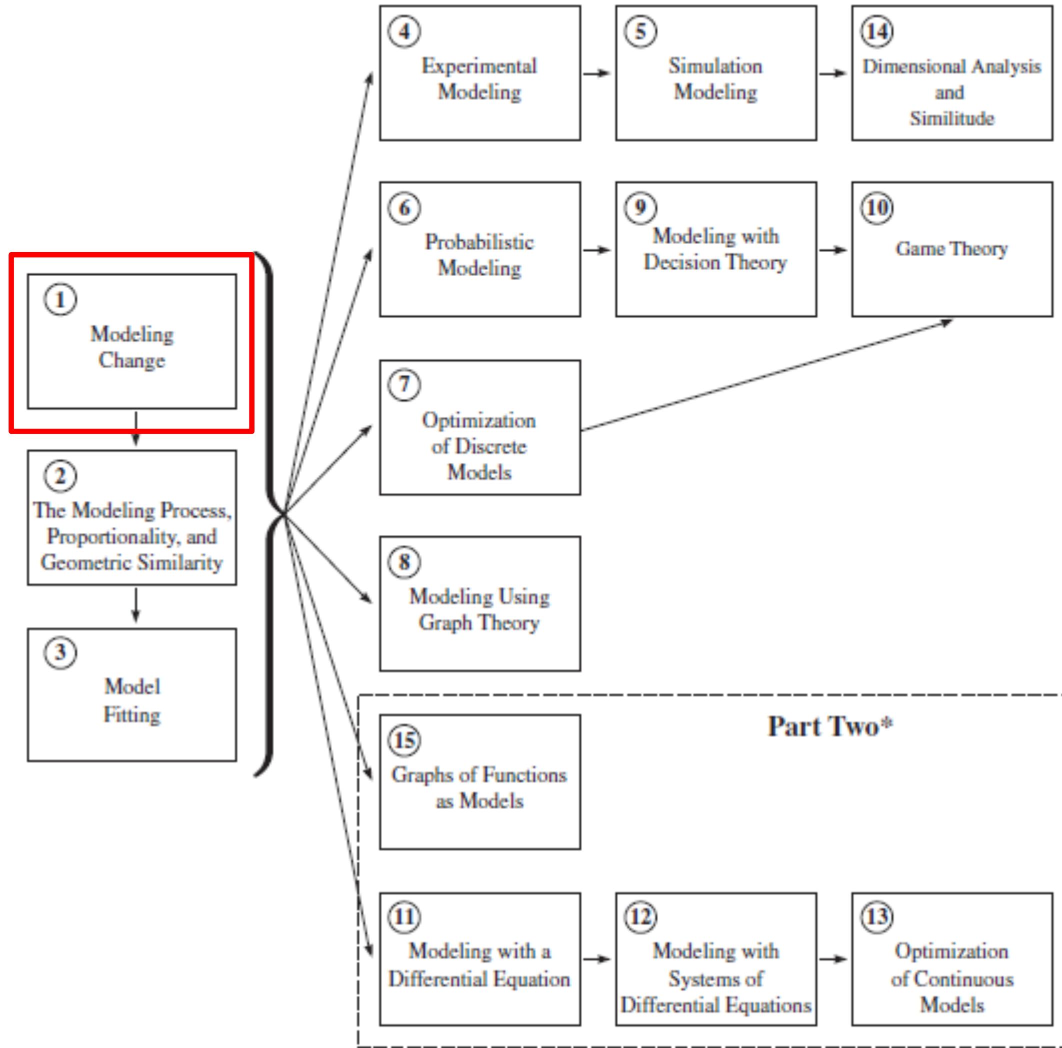
$$S_r = \frac{1-r^k}{1-r}$$

Logo

$$a_k = r^k a_0 + \frac{b(1-r^k)}{(1-r)}$$

$$a_k = r^k \Big[\underbrace{a_0 - \frac{b}{(1-r)}}_{c} \Big] + \frac{b}{(1-r)}$$





*Part Two requires single-variable calculus as a corequisite.

1.4 Sistemas de Equações de Diferenças

Na seção anterior foram avaliados os conceitos de estabilidade para Equações de Diferenças:

- Existe um valor de equilíbrio ?

- Se existe um valor de equilíbrio, caso as condições iniciais variem as soluções permanecem próximas, tendem ao equilíbrio ou se afastam ?

- Qual a sensibilidade do valor de equilíbrio aos parâmetros do sistema ?

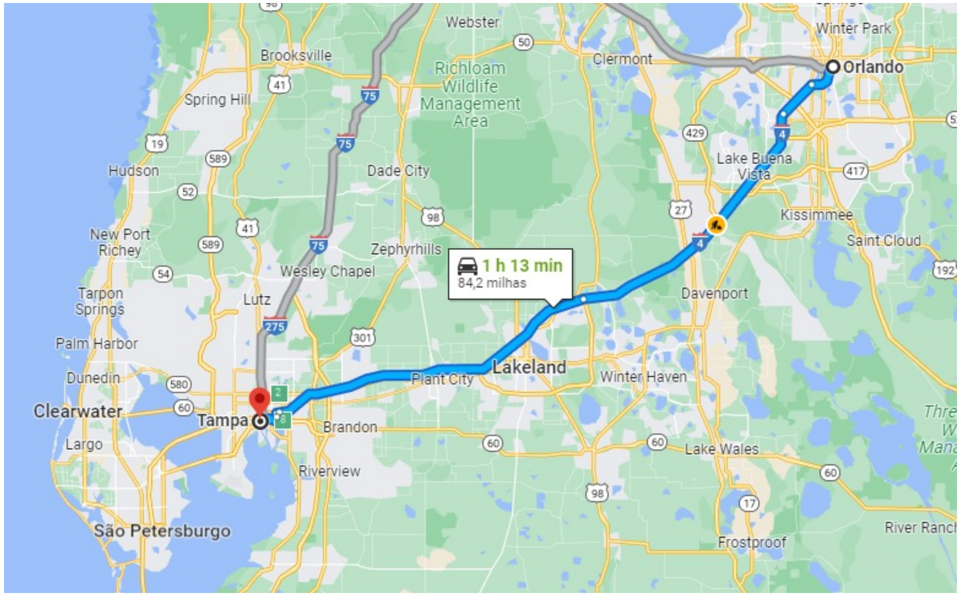
Nessa seção vamos considerar sistemas de equações de diferenças.

EXAMPLE 1 *A Car Rental Company*

Loja de Aluguel de carros com distribuidores em Orlando e Tampa.

Dados históricos indicam que:

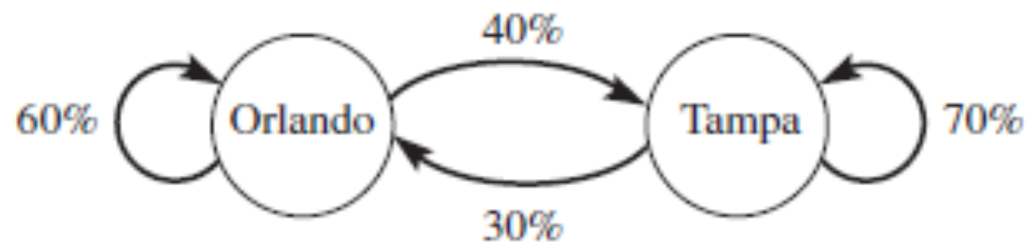
- 60% dos carros alugados em Orlando são devolvidos em Orlando, e 40% são devolvidos em Tampa.
- 70% dos carros alugados em Tampa são devolvidos em Tampa, e 30% são devolvidos em Orlando.



Como seria um modelo para essa dinâmica em equações de diferenças ?

Figure 1.22

Car rental offices in Orlando and Tampa



Dynamical Systems Model Let's develop a model of the system. Let n represent the number of business days. Now define

$$O_n = \text{the number of cars in Orlando at the end of day } n$$
$$T_n = \text{the number of cars in Tampa at the end of day } n$$

Thus the historical records reveal the system

$$O_{n+1} = 0.6O_n + 0.3T_n$$
$$T_{n+1} = 0.4O_n + 0.7T_n$$

$$O_{n+1} = aO_n + bT_n$$
$$T_{n+1} = cO_n + dT_n$$

$$a = 0.6; b = 0.3; c = 0.4; d = 0.7$$

No equilíbrio: $O_{n+1} = O_n = O^*$

$T_{n+1} = T_n = T^*$

$$\begin{aligned} O^* &= aO^* + bT^* \\ T^* &= cO^* + dT^* \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (1-a)O^* - bT^* &= 0 \\ (1-d)\,T^* - cO^* &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} (1-a) & -b \\ -c & (1-d) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O^* \\ T^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 \\ -0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O^* \\ T^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad O^* = \frac{0.3}{0.4} T^* = \frac{3}{4} T^*$$

Equilibrium Values The equilibrium values for the system are those values of O_n and T_n for which no change in the system takes place. Let's call the equilibrium values, if they exist, O and T, respectively. Then $O = O_{n+1} = O_n$ and $T = T_{n+1} = T_n$ simultaneously. Substitution in our model yields the following requirements for the equilibrium values:

$$O = 0.6O + 0.3T$$
$$T = 0.4O + 0.7T$$

$$\begin{bmatrix} -.4 & .3 \\ .4 & -.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This system is satisfied whenever $O = \frac{3}{4}T$.

Analisando diferentes condições iniciais o que ocorre em 1 semana (os dados são diários, logo em n = 7 ?)

Four starting values for the car rental problem

	Orlando	Tampa
Case 1	7000	0
Case 2	5000	2000
Case 3	2000	5000
Case 4	0	7000

$$O_{n+1} = aO_n + bT_n$$
$$T_{n+1} = cO_n + dT_n$$

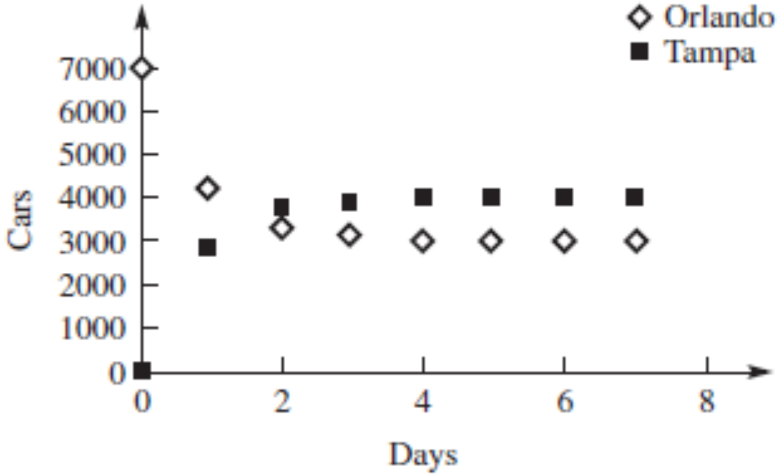
a	0,6
b	0,3
c	0,4
d	0,7

Caso 1				Caso 2				Caso 3				Caso 4		
dia	Orlando	Tampa		dia	Orlando	Tampa		dia	Orlando	Tampa		dia	Orlando	Tampa
0	7000,0	0,0		0	5000,0	2000,0		0	2000,0	5000,0		0	0,0	7000,0
1	4200,0	2800,0		1	3600,0	3400,0		1	2700,0	4300,0		1	2100,0	4900,0
2	3360,0	3640,0		2	3180,0	3820,0		2	2910,0	4090,0		2	2730,0	4270,0
3	3108,0	3892,0		3	3054,0	3946,0		3	2973,0	4027,0		3	2919,0	4081,0
4	3032,4	3967,6		4	3016,2	3983,8		4	2991,9	4008,1		4	2975,7	4024,3
5	3009,7	3990,3		5	3004,9	3995,1		5	2997,6	4002,4		5	2992,7	4007,3
6	3002,9	3997,1		6	3001,5	3998,5		6	2999,3	4000,7		6	2997,8	4002,2
7	3000,9	3999,1		7	3000,4	3999,6		7	2999,8	4000,2		7	2999,3	4000,7

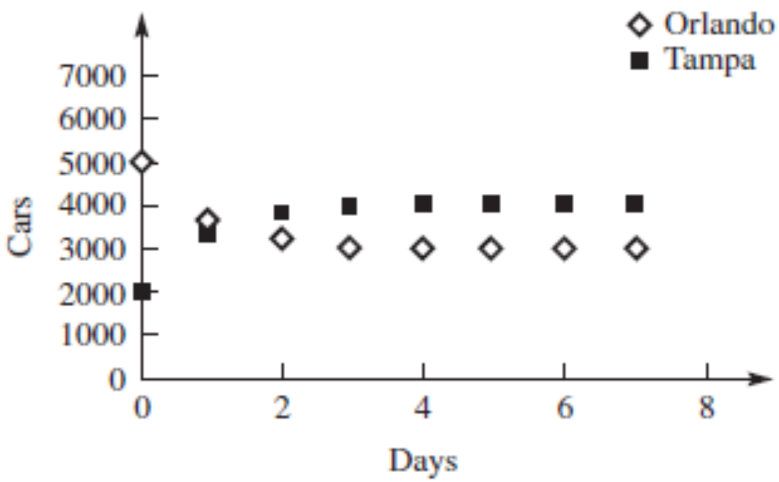
Em todos os cenários testados o equilíbrio é atingido

Figure 1.23

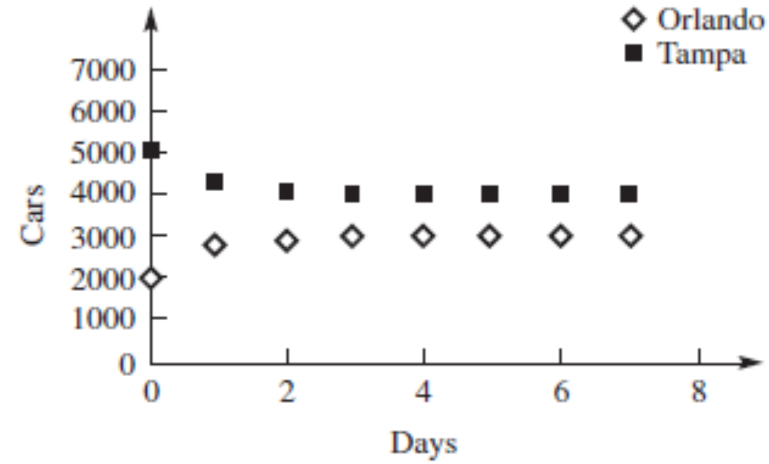
The rental car problem



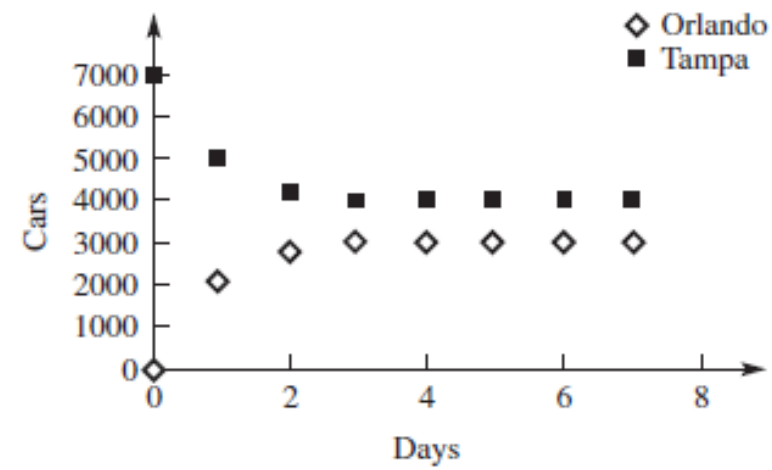
a. Case 1



b. Case 2

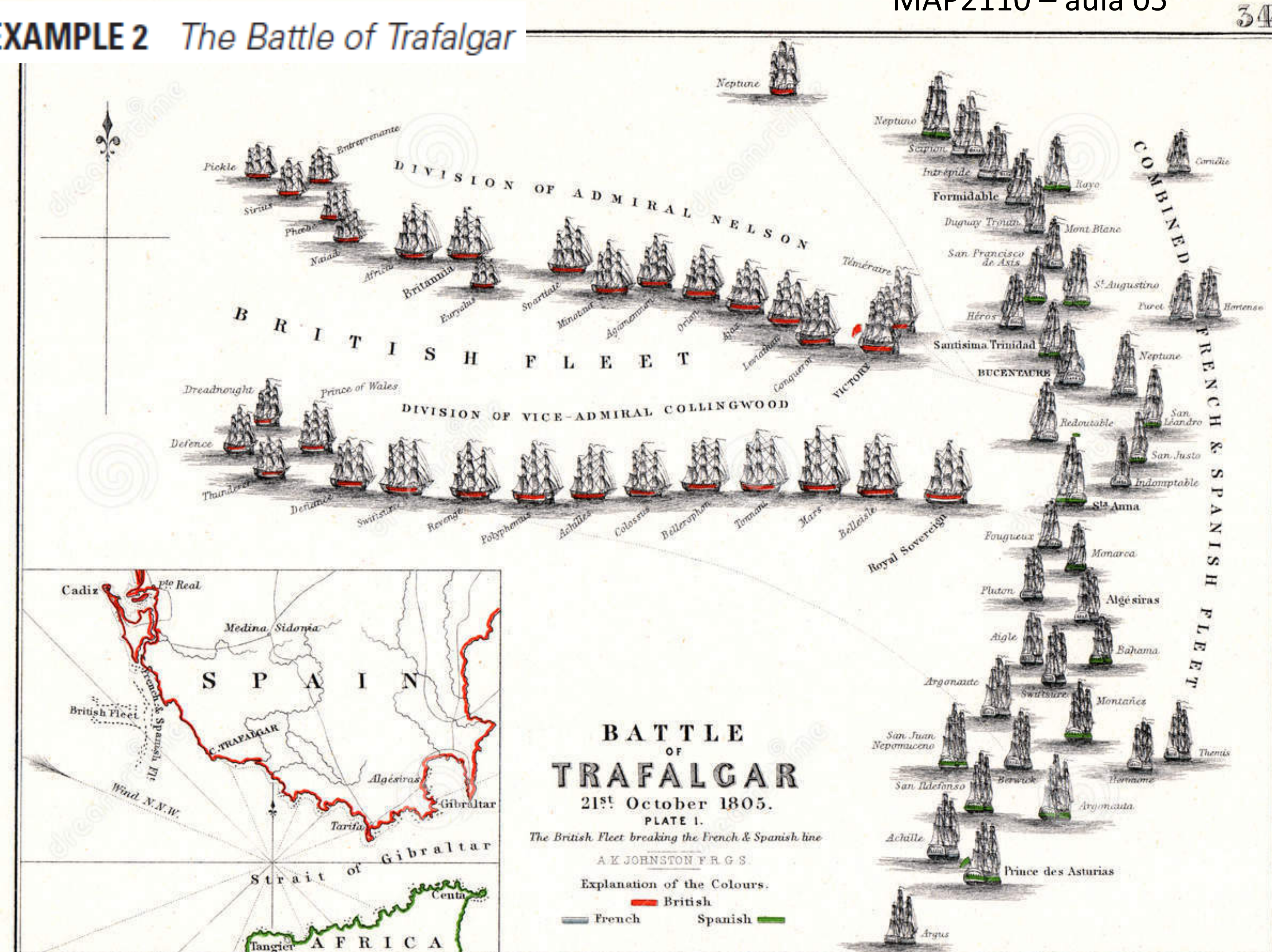


c. Case 3



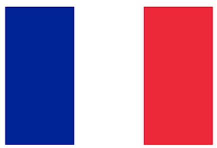
d. Case 4

EXAMPLE 2 *The Battle of Trafalgar*



EXAMPLE 2 *The Battle of Trafalgar*

27 navios

 + 

33 navios

Assumindo que a cada ciclo (n) cada lado se danifica em 10% proporcional ao tamanho da frota adversária.

Qual o resultado previsto da batalha ?

Modelo Proposto:

$$B_{n+1} = B_n - aF_n \qquad B_0 = 27$$
$$F_{n+1} = F_n - aB_n \qquad F_0 = 33$$

$$a = 0.1$$

a	0,1	
n	B	F
0	27,000	33,000
1	23,700	30,300
2	20,670	27,930
3	17,877	25,863
4	15,291	24,075
5	12,883	22,546
6	10,629	21,258
7	8,503	20,195
8	6,483	19,345
9	4,549	18,696
10	2,679	18,242
11	0,855	17,974

Esse modelo prevê a vitória Franco-Espanhola.

A verdade é que quem venceu foi a Inglaterra. Como ?

Trafalgar Square

Dividir para Conquistar

O Almirante Nelson planejou o ataque a frota franco-espanhola em fases:

Na verdade a frota francesa desistiu antes da 3ª fase e retornou com 13 navios

13 navios

+ 3 navios

Fase A

≈26 navios

+ ≈ 18 navios

Fase B

≈ 19 navios

+ ≈ 14 navios

Fase C

Battle A

Stage	British force	French force
1	13.0000	3.00000
2	12.8500	2.35000
3	12.7325	1.70750
4	12.6471	1.07088

Nesse modelo a % de dano foi reduzida para 5%.

Battle B

Stage	British force	French force
1	26.6471	18.0709
2	25.7436	16.7385
3	24.9066	15.4513
4	24.1341	14.2060
5	23.4238	12.9993
6	22.7738	11.8281
7	22.1824	10.6894
8	21.6479	9.5803
9	21.1689	8.4979
10	20.7440	7.4395
11	20.3720	6.4023
12	20.0519	5.3837
13	19.7827	4.3811
14	19.5637	3.3919
15	19.3941	2.4138
16	19.2734	1.4441

Battle C

Stage	British force	French force
1	19.2734	14.4441
2	18.5512	13.4804
3	17.8772	12.5529
4	17.2495	11.6590
5	16.6666	10.7965
6	16.1268	9.9632
7	15.6286	9.1569
8	15.1707	8.3754
9	14.7520	7.6169
10	14.3711	6.8793
11	14.0272	6.1607
12	13.7191	5.4594
13	13.4462	4.7734
14	13.2075	4.1011
15	13.0024	3.4407
16	12.8304	2.7906
17	12.6909	2.1491
18	12.5834	1.5146

EXAMPLE 3 *Competitive Hunter Model—Spotted Owls and Hawks*

Corujas

Gaviões

Ambas as espécies competem pelo mesmo ambiente

EXAMPLE 3 *Competitive Hunter Model—Spotted Owls and Hawks*

Ambas as espécies competem pelo mesmo ambiente.

Na ausência da outra espécie o crescimento é exponencial.

$$\Delta O_n = k_1 O_n - k_3 O_n H_n$$
$$\Delta H_n = k_2 H_n - k_4 O_n H_n$$

A presença da competição é um efeito modelado pelo produto da população de cada espécie.

$$O_{n+1} = (1 + k_1) O_n - k_3 O_n H_n$$
$$H_{n+1} = (1 + k_2) H_n - k_4 O_n H_n$$

Todas as constantes do modelo devem ser positivas.

Quais seriam os pontos de equilíbrio ?

O modelo na forma geral é dado por:

$$O_{n+1} = (1 + k_1) * O_n - k_3 * O_n * H_n$$

$$H_{n+1} = (1 + k_2) * H_n - k_4 * O_n * H_n$$

O equilíbrio é alcançado quando :

$$O_{n+1} = O_n = O^*$$

$$H_{n+1} = H_n = H^*$$

Substituindo no sistema:

$$O^* = (1 + k_1) * O^* - k_3 * O^* * H^*$$

$$H^* = (1 + k_2) * H^* - k_4 * O^* * H^*$$

$$0 = (k_1 - k_3 * H^*) * O^*$$

$$0 = (k_2 - k_4 * O^*) * H^*$$

Pontos de Equilíbrio:

(O^*, H^*) = (0,0)

(O^*, H^*) = $(\frac{k_2}{k_4}, \frac{k_1}{k_3})$

No exemplo do livro os coeficientes tem os valores:

k_1=0.2; $k_2 = 0.3$; k_3=0.001; $k_4 = 0.002$

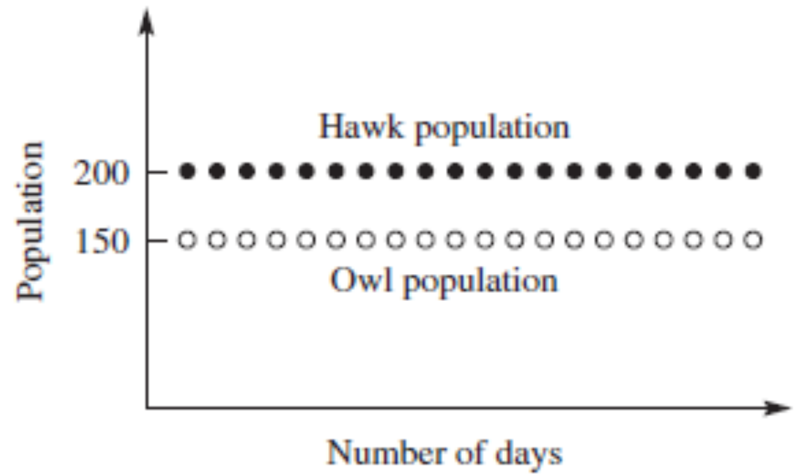
Dessa forma o equilíbrio não-nulo é dado por:

(O^*, H^*) = (150,200)

Sensibilidade as Condições Inicial e Comportamento de Longo Prazo:

Figure 1.27

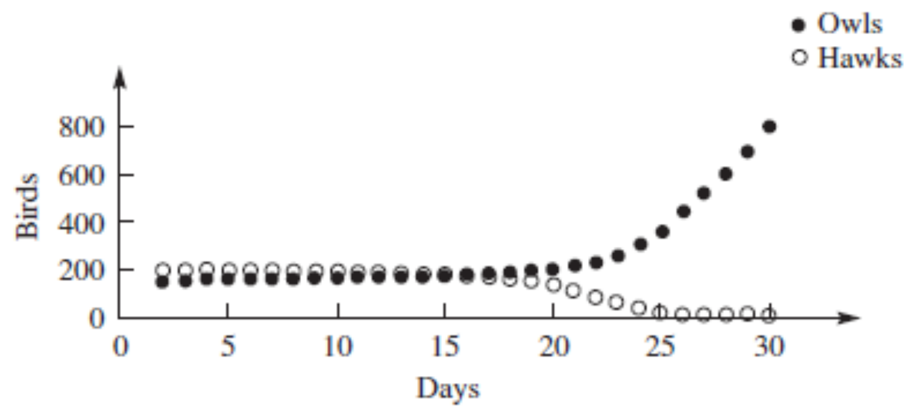
If the owl population begins at 150 and the hawk population begins at 200, the two populations remain at their starting values.



O que acontece com as soluções que iniciam nos cenários indicados ?

	Owls	Hawks
Case 1	151	199
Case 2	149	201
Case 3	10	10

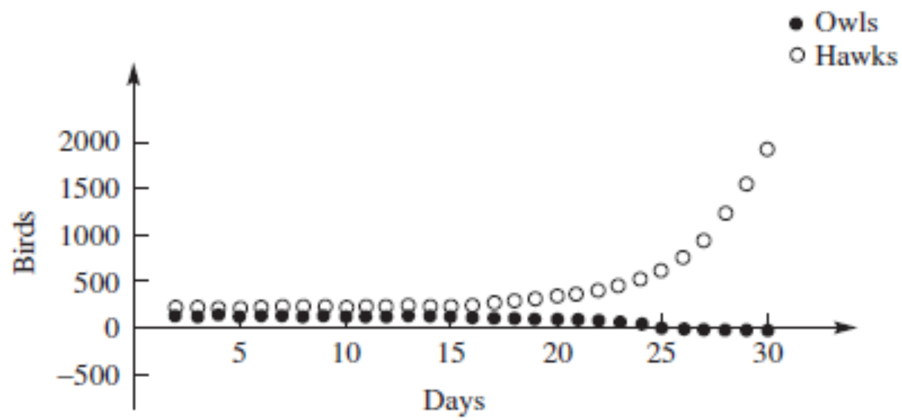
n	Owls	Hawks
1	151	199
2	151.151	198.602
3	151.3623	198.1448
4	151.6431	197.6049
5	152.0063	196.9556
6	152.4691	196.1653
7	153.0538	195.1966
8	153.7889	194.0044
9	154.711	192.5343
10	155.866	190.7202
11	157.3124	188.4827
12	159.1242	185.7261
13	161.3956	182.3369
14	164.2463	178.1812
15	167.83	173.1044
16	172.3438	166.9315
17	178.043	159.4717
18	185.2588	150.5276
19	194.424	139.9128
20	206.1064	127.4818
21	221.0528	113.1767
22	240.2454	97.09366
23	264.9681	79.56915
24	296.8785	61.27332
25	338.0634	43.27385
26	391.0468	26.99739
27	458.6989	13.98212
28	544.0252	5.349589
29	649.9199	1.133844
30	779.1669	0.000182



a. Case 1

Figure 1.28
Either owls or hawks dominate the competition. (*Continues*)

n	Owls	Hawks
1	149	201
2	148.851	201.402
3	148.6423	201.8648
4	148.3651	202.413
5	148.0071	203.0748
6	147.552	203.8842
7	146.9789	204.8824
8	146.2613	206.1204
9	145.3661	207.6616
10	144.2524	209.5862
11	142.8696	211.9954
12	141.1558	215.0186
13	139.0358	218.822
14	136.4189	223.6204
15	133.1966	229.6944
16	129.2414	237.4137
17	124.406	247.2705
18	118.5253	259.9277
19	111.4223	276.29
20	102.9219	297.6073
21	92.87598	325.6289
22	81.20808	362.8313
23	67.98486	412.751
24	53.52101	480.4547
25	38.51079	573.1623
26	24.14002	700.9651
27	12.04671	877.412
28	3.886124	1119.496
29	0.31285	1446.643
30	–0.07716	1879.731

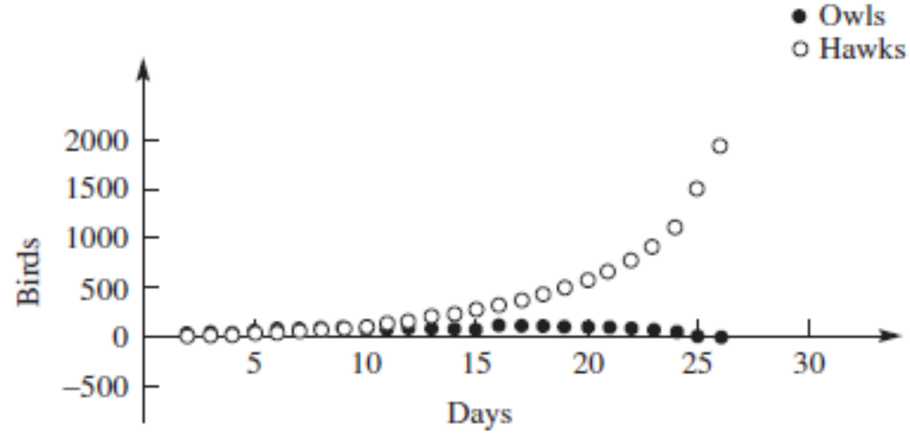


b. Case 2

Figure 1.28

Either owls or hawks dominate the competition. (*Continues*)

n	Owls	Hawks
1	10	10
2	11.9	12.8
3	14.12768	16.33536
4	16.72244	20.77441
5	19.71952	26.31193
6	23.14457	33.16779
7	27.00583	41.58282
8	31.28402	51.81171
9	35.91994	64.11347
10	40.80098	78.7416
11	45.74844	95.93862
12	50.50908	115.9421
13	54.75477	139.0125
14	58.09413	165.493
15	60.09878	195.9126
16	60.34443	231.1382
17	58.46541	272.5838
18	54.22177	322.4855
19	47.58039	384.2597
20	38.81324	462.9712
21	28.60647	565.9237
22	18.13869	703.3227
23	9.009075	888.8048
24	2.803581	1139.432
25	0.169808	1474.872
26	–0.04668	1916.833



c. Case 3

Figure 1.28

Either owls or hawks dominate the competition. (*Continues*)

A investigação sobre o comportamento a longo prazo pode ser feita numericamente amostrando as condições iniciais dentro dos valores de O,H.

Aparentemente o ponto de equilíbrio encontrado é instável, qualquer perturbação leva a dominância de uma das espécies.

Exercício:

4. Suppose the spotted owls' primary food source is a single prey: mice. An ecologist wishes to predict the population levels of spotted owls and mice in a wildlife sanctuary. Letting M_n represent the mouse population after n years and O_n the predator owl population, the ecologist has suggested the model.

$$M_{n+1} = 1.2M_n - 0.001O_n M_n$$
$$O_{n+1} = 0.7O_n + 0.002O_n M_n$$

The ecologist wants to know whether the two species can coexist in the habitat and whether the outcome is sensitive to the starting populations. Find the equilibrium values of the dynamical system for this predator-prey model.

Exercício:

a. Compare the signs of the coefficients of the preceding model with the signs of the coefficients of the owls–hawks model in Example 3. Explain the sign of each of the four coefficients $1.2, -0.001, 0.7$, and 0.002 in terms of the predator–prey relationship being modeled.

b. Test the initial populations in the following table and predict the long-term outcome:

	Owls	Mice
Case A	150	200
Case B	150	300
Case C	100	200
Case D	10	20

c. Now experiment with different values for the coefficients using the starting values given. Then try different starting values. What is the long-term behavior? Do your experimental results indicate that the model is sensitive to the coefficients? Is it sensitive to the starting values?

Fim Aula 05