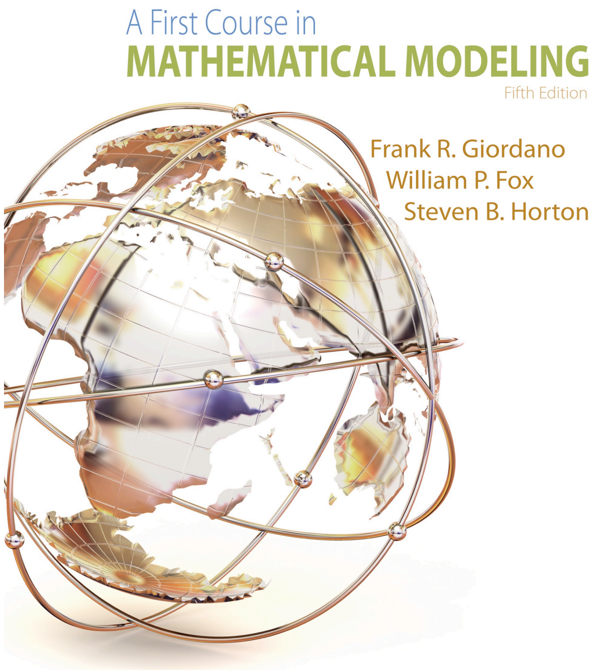
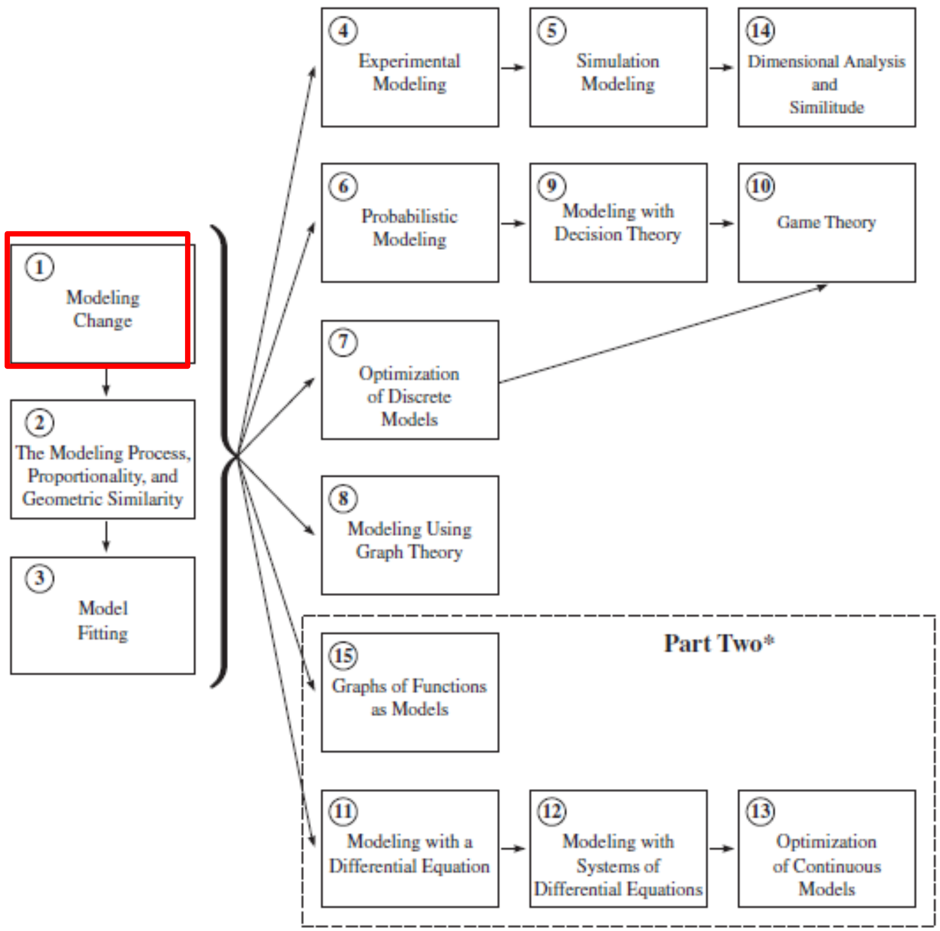
MAP 2110 – Modelagem e Matemática

1º Semestre - 2023

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br





*Part Two requires single-variable calculus as a corequisite.

1. With the price of gas continuing to rise, you wish to look at cars that get better gas mileage. You narrow down your choices to the following 2012 models: Ford Fiesta, Ford Focus, Chevy Volt, Chevy Cruz, Toyota Camry, Toyota Camry Hybrid, Toyota Prius and Toyota Corolla. Each company has offered you their "best deal" as listed in the following table. You are able to allocate approximately \$500 for a car payment each month up to 60 months, although less time would be preferable. Use dynamical systems to determine which new car you can afford.

2012 Model	Best Deal Price	Cash Down	Interest and Duration
Ford Fiesta	\$14,200	\$500	4.5% APR for 60 months
Ford Focus	\$20,705	\$750	4.38% APR for 60 months
Chevy Volt	\$39,312	\$1,000	3.28% APR for 48 months
Chevy Cruz	\$16,800	\$500	4.4% APR for 60 months
Toyota Camry	\$22,955	0	4.8% APR for 60 months
Toyota Camry Hybrid	\$26,500	0	3% APR for 48 months
Toyota Corolla	\$16,500	\$900	4.25% for 60 months
Toyota Prius	\$19,950	\$1,000	4.3% for 60 months

Por simplicidade assuma que a APR é 12X a taxa mensal r

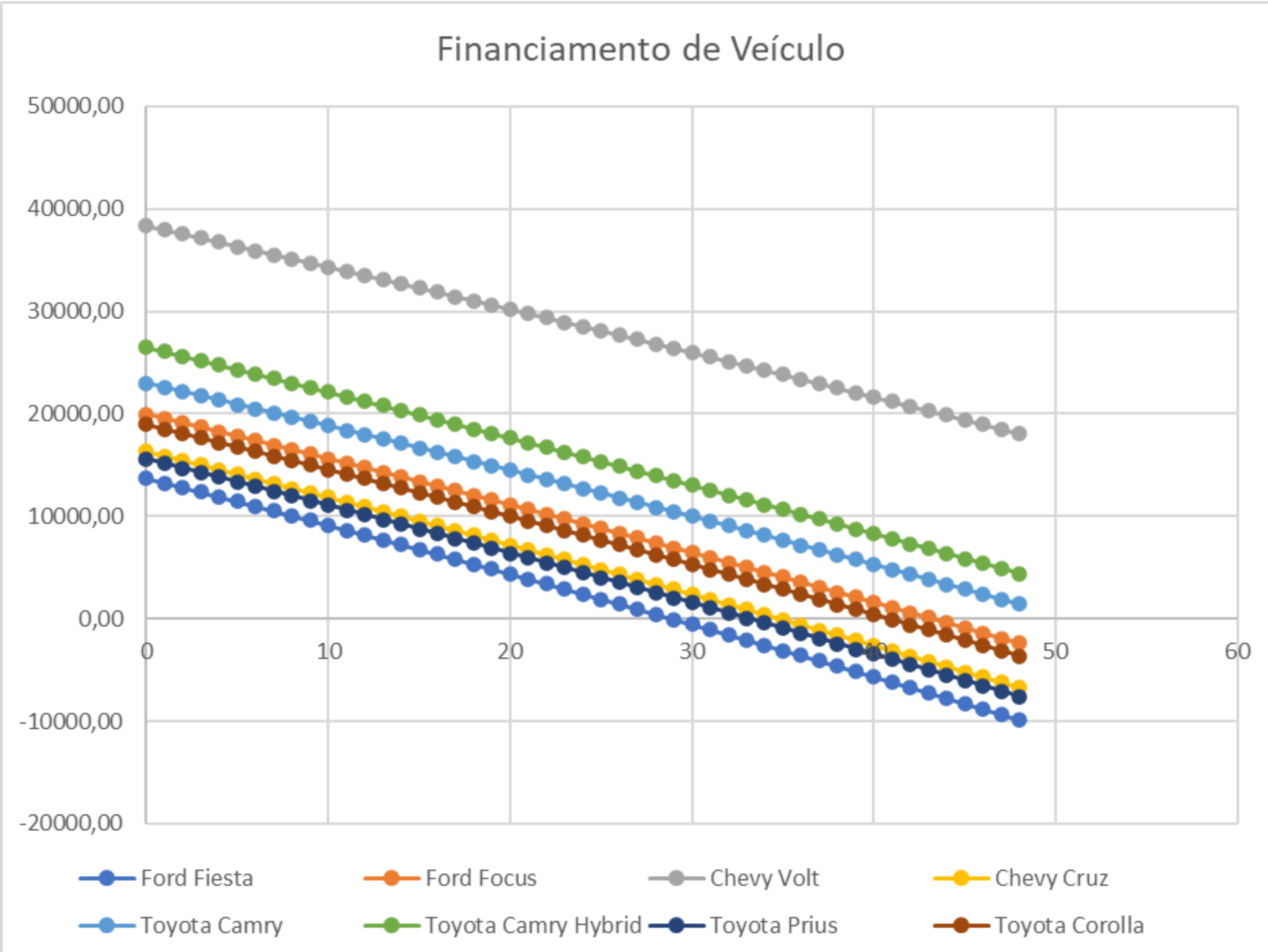
Implementando a expressão da sequência:

$$S_{n+1} = (1 + r) * S_n - p$$

	Ford Fiesta	Ford Focus	Chevy Volt	Chevy Cruz	Toyota Camry	Toyota Camry Hybrid	Toyota Prius	Toyota Corolla
S_i	14200	20705	39312	16800	22955	26500	16500	19950
Desconto	500	750	1000	500	0	0	900	1000
S_0	13700	19955	38312	16300	22955	26500	15600	18950
APR	0,0425	0,0438	0,0328	0,044	0,048	0,03	0,0425	0,043
r	0,0035417	0,00365	0,002733	0,003667	0,004	0,0025	0,003542	0,003583
p	500							

t	Ford Fiesta	Ford Focus	Chevy Volt	Chevy Cruz	Toyota Camry	Toyota Camry Hybrid	Toyota Prius	Toyota Corolla
0	13700,00	19955,00	38312,00	16300,00	22955,00	26500,00	15600,00	18950,00
1	13248,52	19527,84	37916,72	15859,77	22546,82	26066,25	15155,25	18517,90
2	12795,44	19099,11	37520,36	15417,92	22137,01	25631,42	14708,92	18084,26
3	12340,76	18668,82	37122,91	14974,45	21725,56	25195,49	14261,02	17649,06
4	11884,47	18236,97	36724,38	14529,36	21312,46	24758,48	13811,53	17212,30
5	11426,56	17803,53	36324,76	14082,63	20897,71	24320,38	13360,44	16773,98
6	10967,03	17368,51	35924,05	13634,27	20481,30	23881,18	12907,76	16334,09
7	10505,87	16931,91	35522,24	13184,26	20063,22	23440,88	12453,48	15892,62
8	10043,08	16493,71	35119,34	12732,60	19643,48	22999,49	11997,58	15449,57
9	9578,65	16053,91	34715,33	12279,29	19222,05	22556,98	11540,07	15004,93

⋮


Financiamento de Veículo
50000,00
40000,00
30000,00
20000,00
10000,00
0,00
-10000,00
-20000,00
0
10
20
30
40
50
60
Ford Fiesta
Ford Focus
Chevy Volt
Chevy Cruz
Toyota Camry
Toyota Camry Hybrid
Toyota Prius
Toyota Corolla

Registrando o instante onde o saldo se torna negativo ou que atinge o prazo do financiamento.

	Ford Fiesta	Ford Focus	Chevy Volt	Chevy Cruz	Toyota Camry	Toyota Camry Hybrid	Toyota Prius	Toyota Corolla
T	29	44	48	35	51	48	34	41
V_T	-63,26	-393,46	18067,12	-108,51	-86,69	4408,59	-439,48	-96,78
prazo	60	60	48	60	60	48	60	60

A exceção do Chevy Volt e do Toyota Camry Hybrid todos os outros carros podem ser pagos com o orçamento reservado

A decisão depende do que o comprador mais valoriza.

1.2 Aproximando a Variação com Equações de Diferenças

Os modelos financeiros simples consideram exercícios em tempos discretos (a variável independente t está no conjunto dos inteiros).

Na realidade a grande maioria dos fenômenos envolvem grandezas contínuas descritas por números reais.

Mesmo assim as Equações de Diferenças podem ser usadas como aproximações discretas de problemas contínuos.

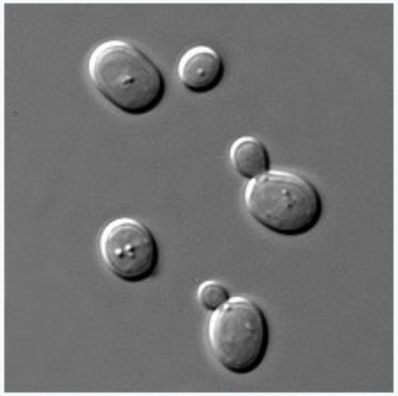
Veremos alguns exemplos em que o modelo surge da análise da variação e a partir dela constrói-se a sequência discreta (aproximada).

$$\textit{change} = \Delta a_n = \textit{some function } f$$

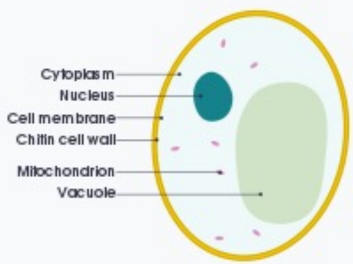
$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

Exemplo 1: Crescimento de uma Cultura de Leveduras (Yeast)

Yeast



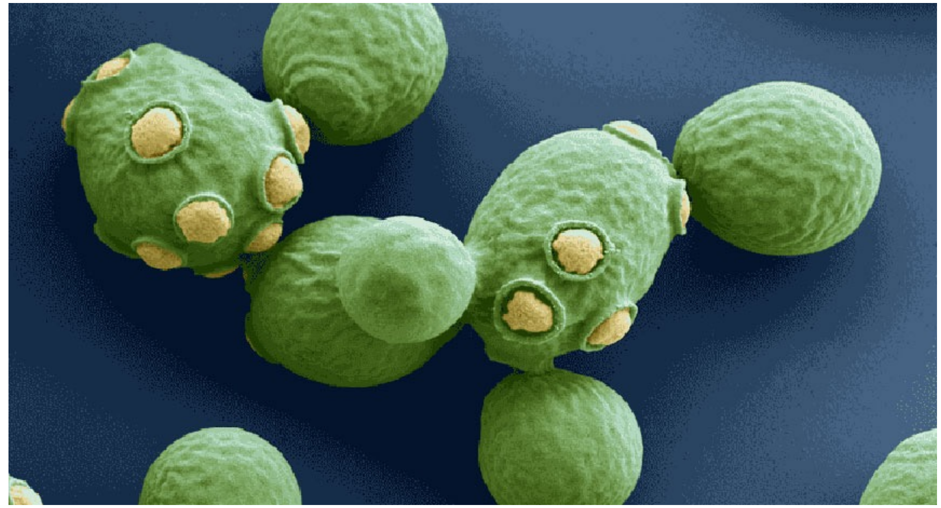
Yeast of the species *Saccharomyces cerevisiae*



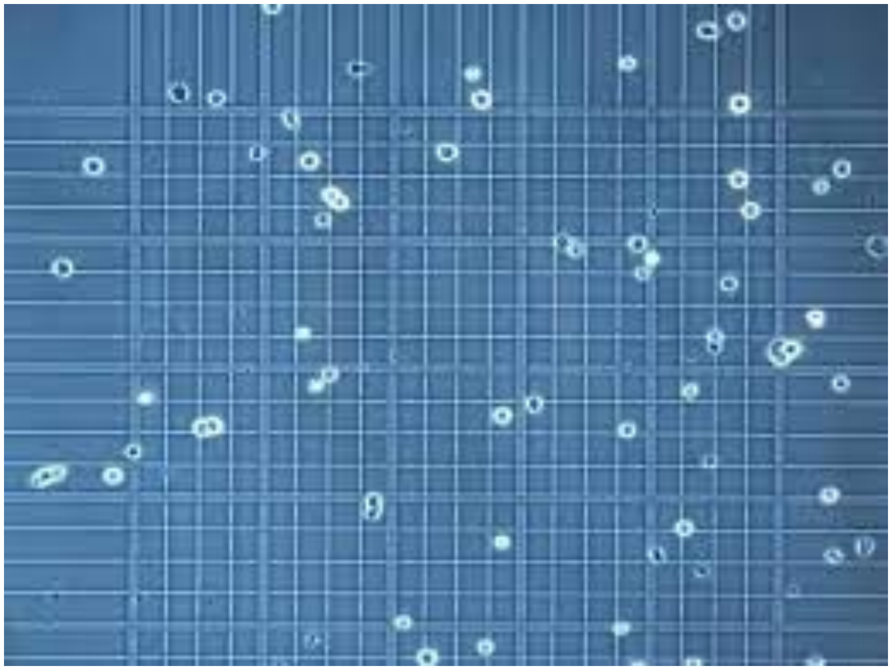
Cross-sectional labelled diagram of a typical yeast cell

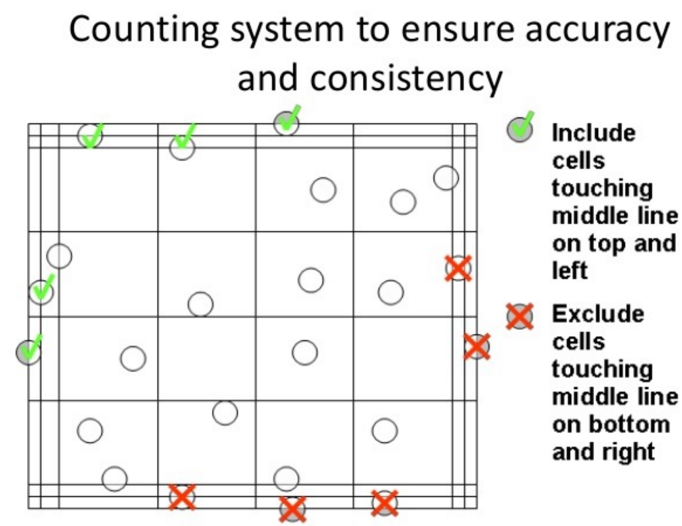
Scientific classification

Domain:	Eukaryota
Kingdom:	Fungi



Exemplo 1: Crescimento de uma Cultura de Leveduras (Yeast)





Contagem manual e estimativa de biomassa

Time in hours n	Observed yeast biomass p_n	Change in biomass $p_{n+1} - p_n$
0	9.6	8.7
1	18.3	10.7
2	29.0	18.2
3	47.2	23.9
4	71.1	48.0
5	119.1	55.5
6	174.6	82.7
7	257.3	

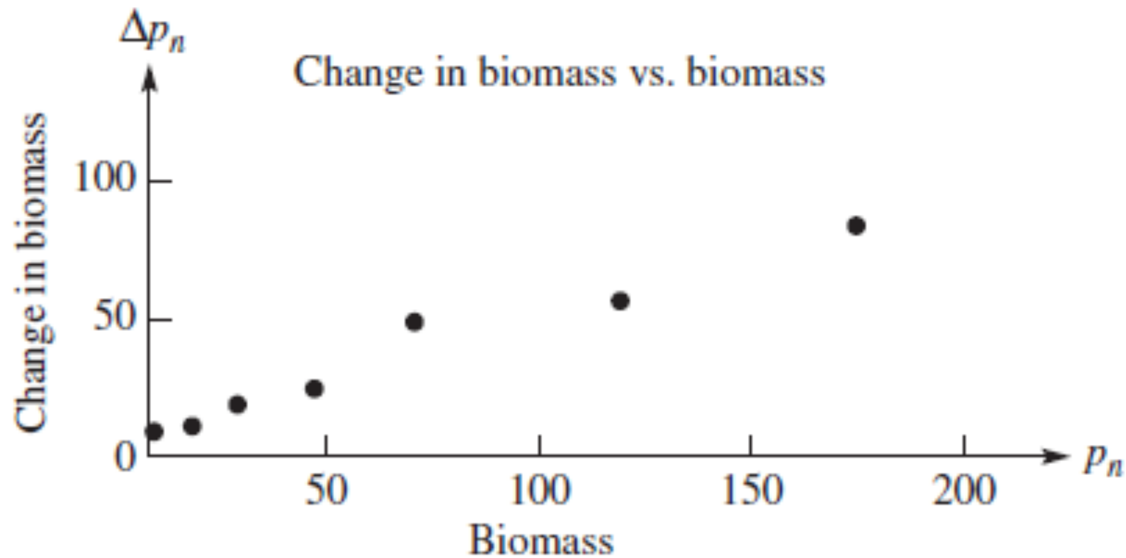


Figure 1.7

Growth of a yeast culture versus time in hours; data from R. Pearl, "The Growth of Population," *Quart. Rev. Biol.* 2(1927): 532–548

Observando o gráfico da variação de biomassa em relação a biomassa qual relação você proporia ?

Pela observação dos dados um modelo que poderia ser proposto:

$$\Delta p_n = (p_{n+1} - p_n) = k * p_n$$

Mas sabemos que se $k > 0$ a sequência

$$p_n = (1 + k)^n * p_0$$

tenderá a ∞ o que não tem sentido biológico

Exemplo 2: Crescimento de uma Cultura de Leveduras (Yeast) Revisitado

Time in hours n	Yeast biomass p_n	Change/hour $p_{n+1} - p_n$
0	9.6	8.7
1	18.3	10.7
2	29.0	18.2
3	47.2	23.9
4	71.1	48.0
5	119.1	55.5
6	174.6	82.7
7	257.3	93.4
8	350.7	90.3
9	441.0	72.3
10	513.3	46.4
11	559.7	35.1
12	594.8	34.6
13	629.4	11.4
14	640.8	10.3
15	651.1	4.8
16	655.9	3.7
17	659.6	2.2
18	661.8	

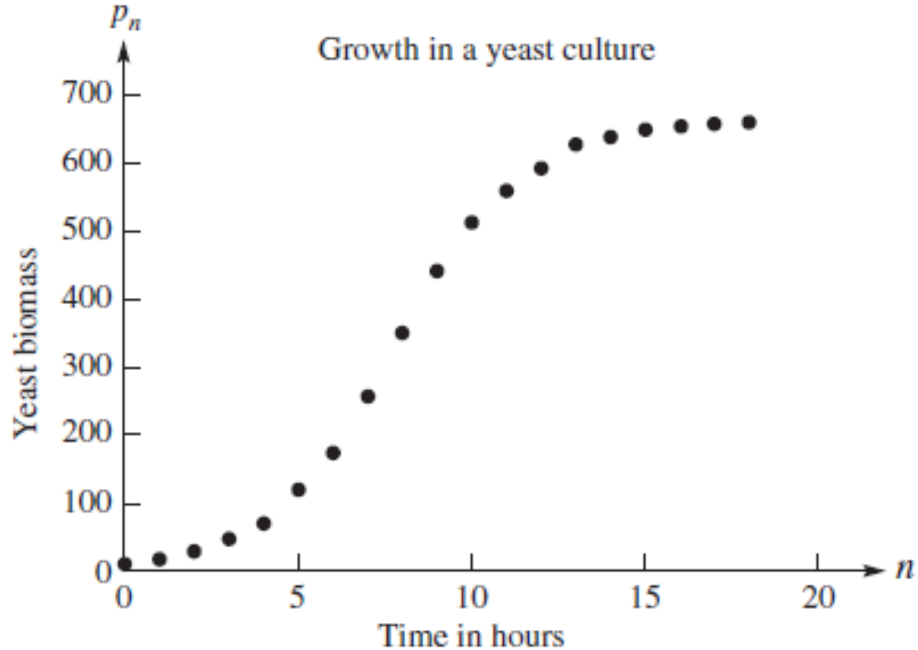


Figure 1.8
Yeast biomass approaches a limiting population level

Estendendo o intervalo de observação percebe-se uma saturação do valor da biomassa

Exemplo 2: Crescimento de uma Cultura de Leveduras (Yeast) Revisitado

Uma nova proposta de modelagem considerando esses resultados é:

$$\Delta p_n = (p_{n+1} - p_n) = k * (p_{sat} - p_n)p_n$$

Os dados indicam que o valor de p_{sat} é 665.

Testando a hipótese do modelo:

Fazendo uma estimativa simples da constante k (perceba que aqui é a razão dos extremos do intervalo).

$$slope = \frac{\Delta(p_{n+1} - p_n)}{\Delta(p_n(665 - p_n))} = (90.3 - 0)/(110225.01 - 0) = 0.00082$$

Que resulta no modelo:

$$p_{n+1} - p_n = 0.00082(665 - p_n)p_n$$

Comparando o modelo e os dados medidos observa-se a aderência do modelo para a variação da população

$p_{n+1} - p_n$	$p_n(665 - p_n)$
8.7	6291.84
10.7	11,834.61
18.2	18,444.00
23.9	29,160.16
48.0	42,226.29
55.5	65,016.69
82.7	85,623.84
93.4	104,901.21
90.3	110,225.01
72.3	98,784.00
46.4	77,867.61
35.1	58,936.41
34.6	41,754.96
11.4	22,406.64
10.3	15,507.36
4.8	9050.29
3.7	5968.69
2.2	3561.84

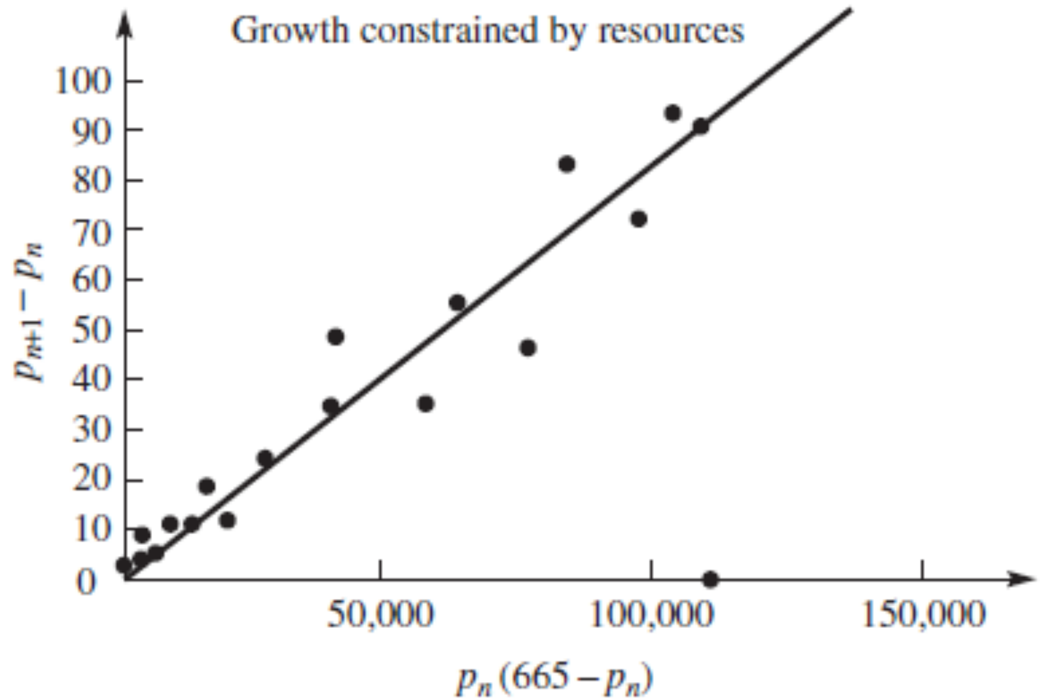


Figure 1.9

Testing the constrained growth model

Testando agora o modelo completo contra as medidas

$$p_{n+1} = p_n + k * (p_{sat} - p_n)p_n$$

Substituindo os valores estimados a partir dos dados.

$$p_{n+1} = p_n + 0.00082(665 - p_n)p_n$$

Time in hours	Observation	Prediction
0	9.6	9.6
1	18.3	14.8
2	29.0	22.6
3	47.2	34.5
4	71.1	52.4
5	119.1	78.7
6	174.6	116.6
7	257.3	169.0
8	350.7	237.8
9	441.0	321.1
10	513.3	411.6
11	559.7	497.1
12	594.8	565.6
13	629.4	611.7
14	640.8	638.4
15	651.1	652.3
16	655.9	659.1
17	659.6	662.3
18	661.8	663.8

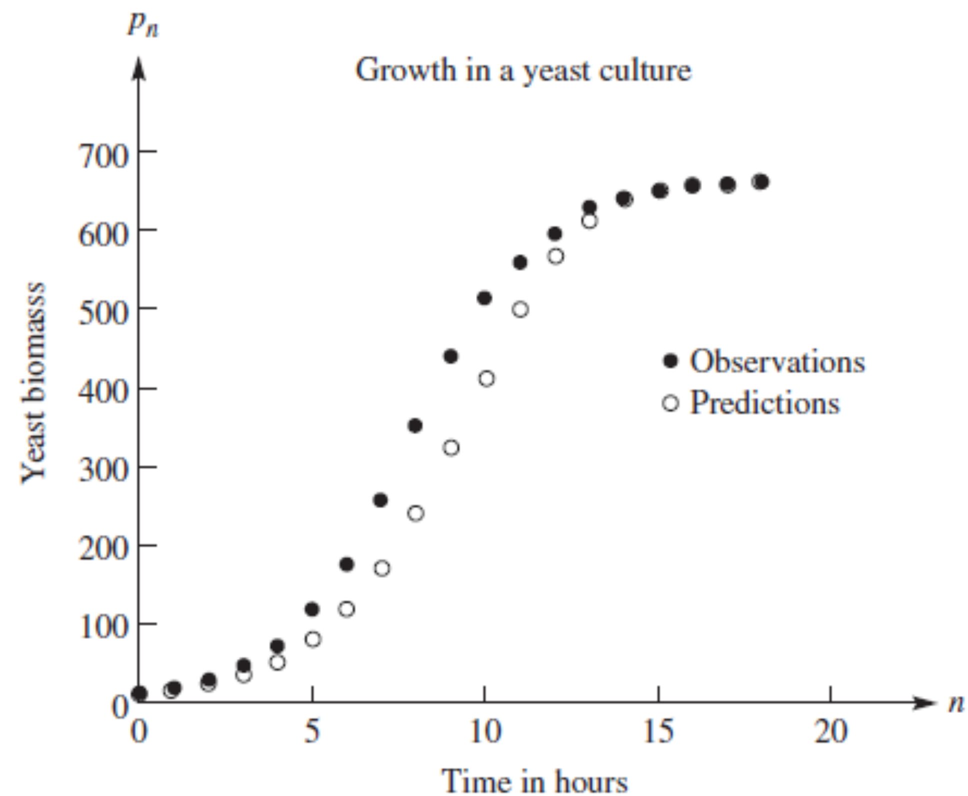


Figure 1.10

Model predictions and observations

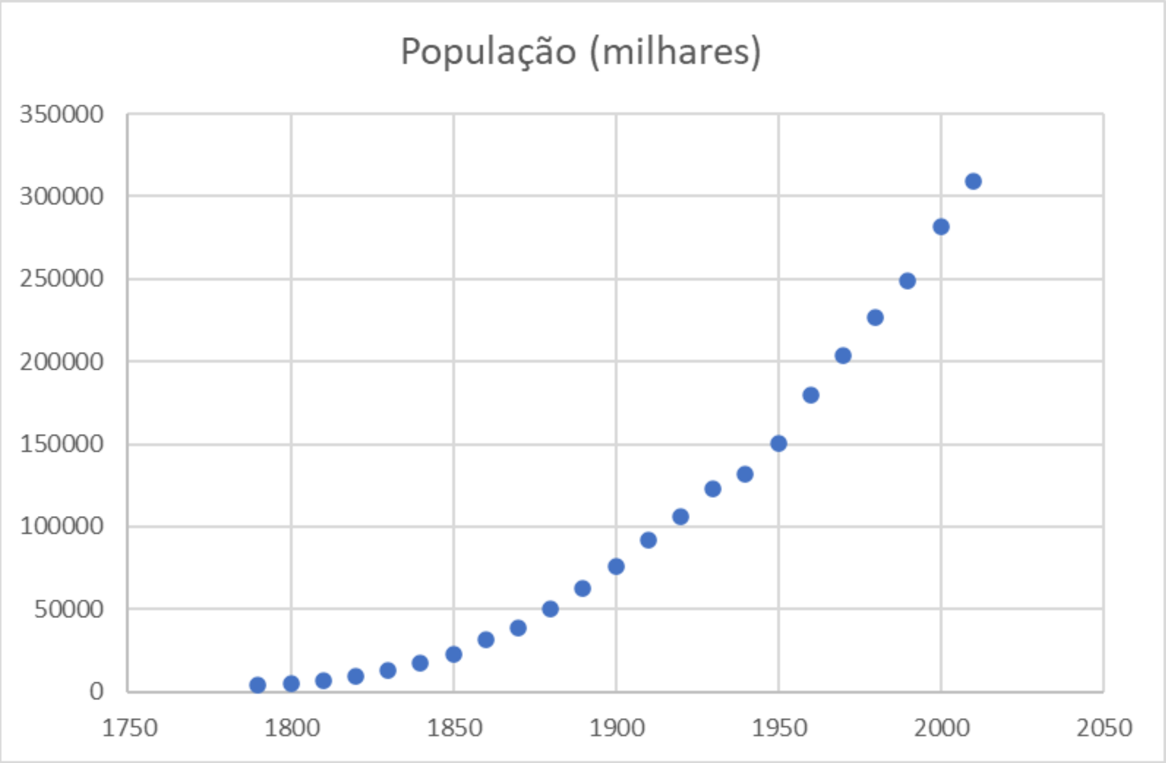
1.2

2. The following data represent the U.S. population from 1790 to 2010. Find a dynamical system model that fits the data fairly well. Test your model by plotting the predictions of the model against the data.

Year	Population	Year	Population	Year	Population
1790	3,929,000	1870	38,558,000	1950	150,697,000
1800	5,308,000	1880	50,156,000	1960	179,323,000
1810	7,240,000	1890	62,948,000	1970	203,212,000
1820	9,638,000	1900	75,995,000	1980	226,505,000
1830	12,866,000	1910	91,972,000	1990	248,710,000
1840	17,069,000	1920	105,711,000	2000	281,416,000
1850	23,192,000	1930	122,755,000	2010	308,746,000
1860	31,443,000	1940	131,669,000		

Seguindo os exemplos anteriores vamos plotar os dados para tentar propor um modelo.

Ano	População (milhares)
1790	3929
1800	5308
1810	7240
1820	9638
1830	12866
1840	17069
1850	23192
1860	31443
1870	38558
1880	50156
1890	62948
1900	75995
1910	91972
1920	105711
1930	122755
1940	131669
1950	150697
1960	179323
1970	203212
1980	226505
1990	248710
2000	281416
2010	308746



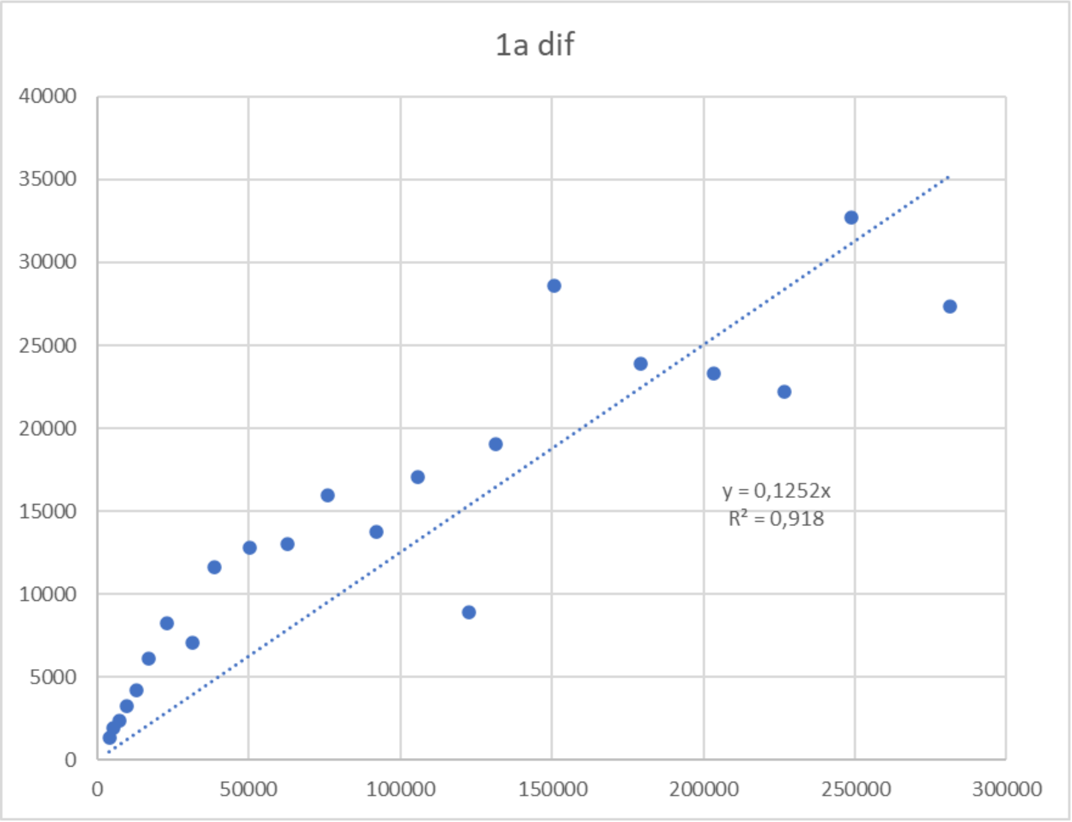
O aspecto geral indica inicialmente um comportamento exponencial próximo das sequências da forma:

$$\Delta p_n = k * p_n$$

$$p_{n+1} = (1 + k) * p_n$$

Ano	População (milhares)	1a dif	k
1790	3929	1379	0,3510
1800	5308	1932	0,3640
1810	7240	2398	0,3312
1820	9638	3228	0,3349
1830	12866	4203	0,3267
1840	17069	6123	0,3587
1850	23192	8251	0,3558
1860	31443	7115	0,2263
1870	38558	11598	0,3008
1880	50156	12792	0,2550
1890	62948	13047	0,2073
1900	75995	15977	0,2102
1910	91972	13739	0,1494
1920	105711	17044	0,1612
1930	122755	8914	0,0726
1940	131669	19028	0,1445
1950	150697	28626	0,1900
1960	179323	23889	0,1332
1970	203212	23293	0,1146
1980	226505	22205	0,0980
1990	248710	32706	0,1315
2000	281416	27330	0,0971
2010	308746		

k_med	0,2234
k_ext	0,093521
k_MMQ	0,1252

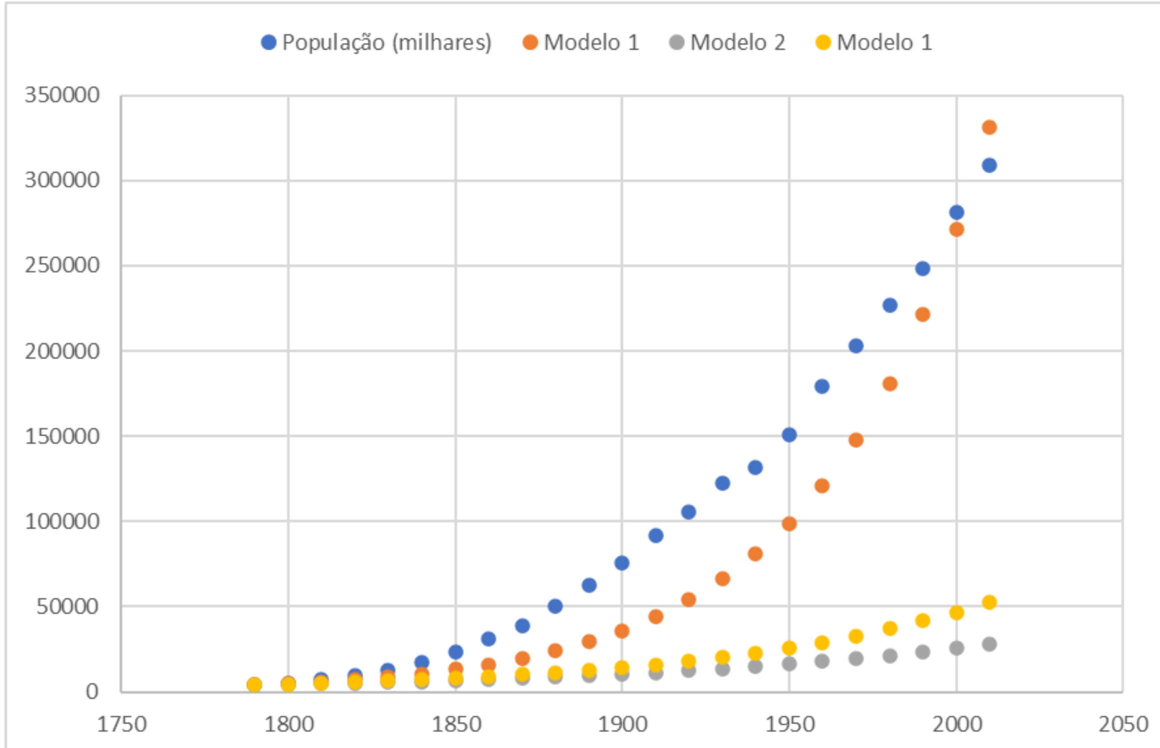


Foram consideradas 3 possibilidades:

- Média das declividades
- Declividade média usando os extremos
- Coeficiente do ajuste linear (MMQ-Excel)

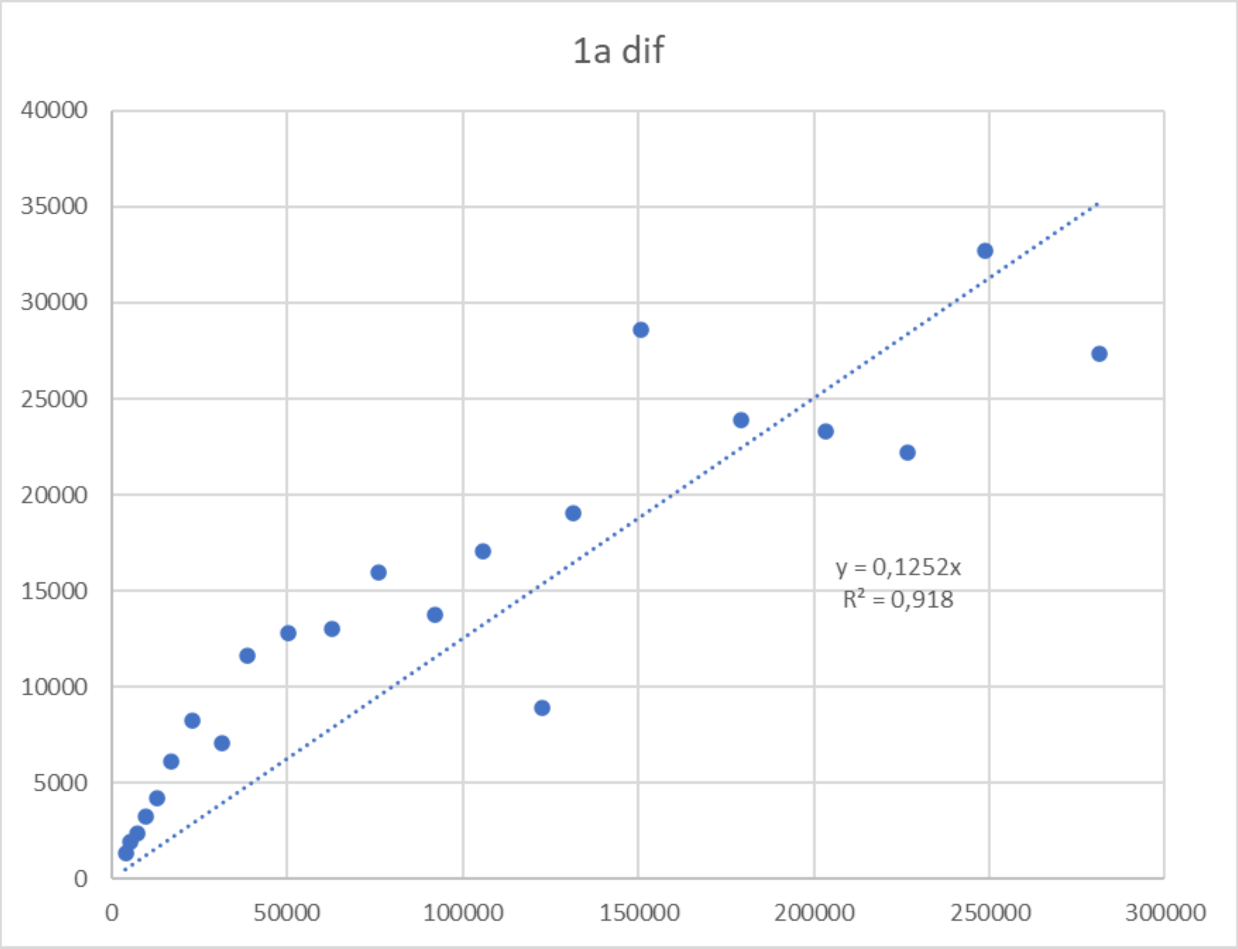
k_med	0,2234
k_ext	0,093521
k_MMQ	0,1252

Ano	População (milhares)	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
1790	3929	3929	3929	3929
1800	5308	4807	4296	4421
1810	7240	5880	4698	4974
1820	9638	7194	5138	5597
1830	12866	8801	5618	6298
1840	17069	10766	6144	7086
1850	23192	13171	6718	7974
1860	31443	16113	7346	8972
1870	38558	19712	8033	10095
1880	50156	24115	8785	11359
1890	62948	29502	9606	12781
1900	75995	36092	10505	14382
1910	91972	44153	11487	16182
1920	105711	54016	12561	18208
1930	122755	66081	13736	20488
1940	131669	80842	15021	23053
1950	150697	98899	16426	25939
1960	179323	120990	17962	29187
1970	203212	148015	19641	32841
1980	226505	181077	21478	36953
1990	248710	221524	23487	41579
2000	281416	271005	25684	46785
2010	308746	331538	28086	52642



O modelo 1 subestima os valores intermediários mas tem a tendência de superestimar os valores mais recentes. Os modelos 2 e 3 subestimam todo o intervalo. Porque ?

Como não conseguimos um bom modelo o correto é retornar aos dados e buscar relações que melhor capturem dados



A aproximação da 1ª diferença por reta não parece apropriada para os dados.

Novas relações precisam ser pesquisadas.

6. A certain drug is effective in treating a disease if the concentration remains above 100 mg/L. The initial concentration is 640 mg/L. It is known from laboratory experiments that the drug decays at the rate of 20% of the amount present each hour.

a. Formulate a model representing the concentration at each hour.

b. Build a table of values and determine when the concentration reaches 100 mg/L.

Usando uma equação de diferenças para modelar a dose de medicamento na corrente sanguínea ao longo do tempo.

$$D_{n+1} = D_n - \Delta D_n$$

onde o decaimento da dose pode ser modelado uma taxa r.

$$\Delta D_n = r * p_n$$

O modelo é semelhante aos que já apresentamos anteriormente:

$$D_{n+1} = (1 - r) * D_n$$

Para o problema do exercício 6:

$$D_0 = 640$$

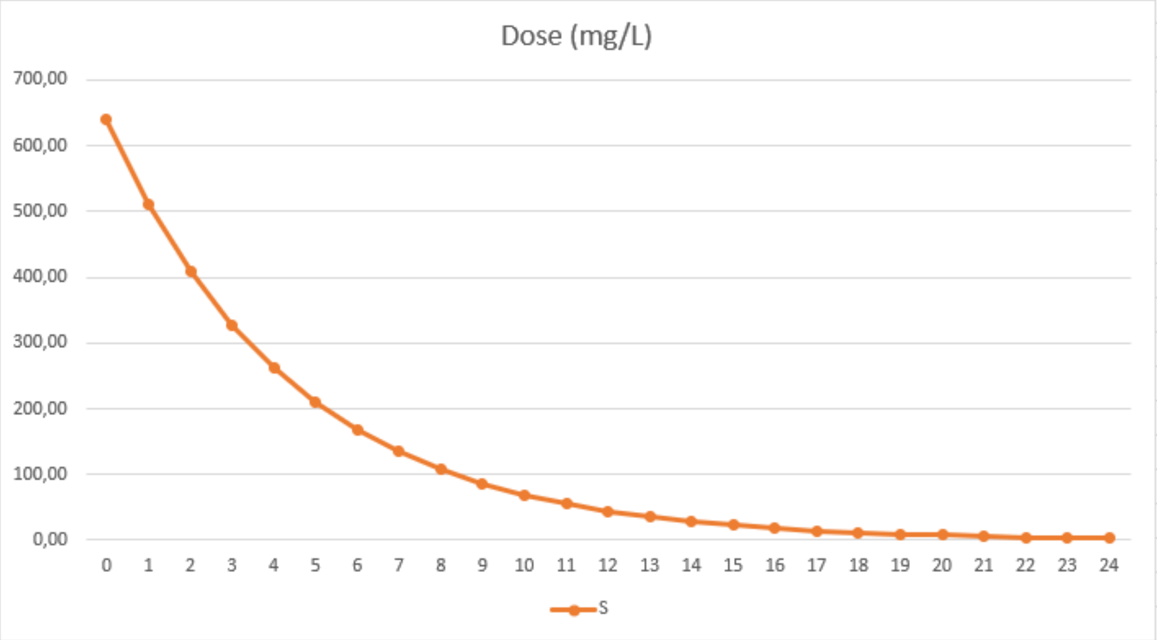
$$r = 0.2$$

$$D_{n+1} = (1 - r) * D_n$$

D_0	640
r	0,2
p	0

t	S
0	640,00
1	512,00
2	409,60
3	327,68
4	262,14
5	209,72
6	167,77
7	134,22
8	107,37
9	85,90
10	68,72
11	54,98
12	43,98
13	35,18
14	28,15
15	22,52
16	18,01
17	14,41
18	11,53
19	9,22
20	7,38
21	5,90
22	4,72
23	3,78
24	3,02

O valor de 100 mg/L ocorre entre a 8ª e 9ª hora



Qual seria o uso prático do resultado desse modelo ?

7. Use the model developed in Problem 6 to prescribe an initial dosage and a maintenance dosage that keeps the concentration above the effective level of 500 ppm but below a safe level of 1000 ppm. Experiment with different values until you have results you think are satisfactory.

Para contemplar esse cenário é necessário incluir a dose de manutenção. Essa dose pode ser modelada como uma adição fixa a cada hora p:

$$D_{n+1} = (1 - r) * D_n + \mathrm{p}$$

Vamos tentar resolver esse problema ?

Fim Aula 02