1 Resumo das Equações

Essa lista de exercício inclui exercícios sobre Guias de Ondas Metálicos Retangulares e também Cavidades Ressonantes.

Como as Equações foram derivadas em sala, segue abaixo um resumo das Equações que serão usadas para os exercícios. No entanto, é importante saber como fazer as derivações.

Usamos aqui o guia da Figura (1), onde a é o maior lado e b o menor. A notação será:

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a} \qquad \beta_y = \frac{n\pi}{b} \qquad \beta_z = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

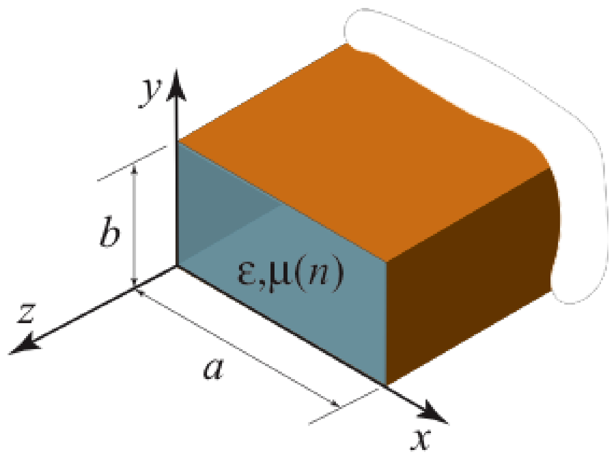

Figura 1: Guia de Ondas Retangular

1.1 Guias Metálicos Retangulares - Modo TE

$$H_z(x,y,z) = H_0\cos(\beta_x x)\cos(\beta_y y)e^{-j\beta_z z} \tag{1}$$

$$E_z(x,y,z) = 0 \tag{2}$$

$$H_y(x,y,z) = \frac{j\beta_y\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)e^{-j\beta_z z} \tag{3}$$

$$H_x(x,y,z) = \frac{j\beta_x\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)e^{-j\beta_z z} \tag{4}$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{-j\omega\mu\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)e^{-j\beta_z z} \tag{5}$$

$$E_x(x,y,z) = \frac{j\omega\mu\beta_y}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)e^{-j\beta_z z} \tag{6}$$

$$\eta_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta_z} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{7}$$

$$\omega_{c_{nm}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} \tag{8}$$

$$\omega_{c_{nm}} = 2\pi f_{c_{nm}} \tag{9}$$

$$\lambda_c = \frac{1/\sqrt{\mu\epsilon}}{f_{c_{nm}}} \tag{10}$$

1.2 Guias Metálicos Retangulares - Modo TM

$$E_z(x, y, z) = E_0 \cos(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \tag{11}$$

$$H_z(x, y, z) = 0 \tag{12}$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{-j\beta_y\beta_z}{\beta_x^2 + \beta_y^2} E_0 \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \tag{13}$$

$$E_x(x, y, z) = \frac{-j\beta_x\beta_z}{\beta_x^2 + \beta_y^2} E_0 \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \tag{14}$$

$$H_y(x, y, z) = \frac{-j\omega\epsilon\beta_x}{\beta_x^2 + \beta_y^2} H_0 \cos(\beta_x x) \sin(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \tag{15}$$

$$H_x(x, y, z) = \frac{j\omega\epsilon\beta_y}{\beta_x^2 + \beta_y^2} H_0 \sin(\beta_x x) \cos(\beta_y y) e^{-j\beta_z z} \tag{16}$$

$$\eta_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta_z}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{17}$$

$$\omega_{c_{nm}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} \tag{18}$$

$$\omega_{c_{nm}} = 2\pi f_{c_{nm}} \tag{19}$$

$$\lambda_c = \frac{1/\sqrt{\mu\epsilon}}{f_{c_{nm}}} \tag{20}$$

1.3 Cavidades Ressonantes modo TE

Nas cavidades, agora o eixo z tem comprimento d, portanto

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a} \qquad \beta_y = \frac{n\pi}{b} \qquad \beta_z = \frac{\rho\pi}{d}$$

$$H_z(x,y,z) = -2jH_0\cos(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \tag{21}$$

$$E_z(x,y,z) = 0 \tag{22}$$

$$H_y(x,y,z) = \frac{-2\beta_y\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\cos(-j\beta_z z) \tag{23}$$

$$H_x(x,y,z) = \frac{-2\beta_x\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\cos(-j\beta_z z) \tag{24}$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{-2\omega\mu\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \tag{25}$$

$$E_x(x,y,z) = \frac{2\omega\mu\beta_y}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\sin(-j\beta_z z) \tag{26}$$

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\rho\pi}{d}\right)^2} \tag{27}$$

1.4 Cavidades Ressonantes Modo TM

$$E_z(x,y,z) = 2E_0\sin(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\cos(\beta_z z) \tag{28}$$

$$H_z(x,y,z) = 0 \tag{29}$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{2\beta_y\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}E_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \tag{30}$$

$$E_x(x,y,z) = \frac{2\beta_x\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}E_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\sin(\beta_z z) \tag{31}$$

$$H_y(x,y,z) = \frac{-2j\omega\epsilon\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\cos(\beta_z z) \tag{32}$$

$$H_x(x,y,z) = \frac{2j\omega\epsilon\beta_y}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\cos(\beta_z z) \tag{33}$$

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\rho\pi}{d}\right)^2} \tag{34}$$

2 Exercícios

Problema 4.01. ()
Guias de ondas padrões, preenchidos com ar, são geralmente projetados para bandas de radar. Entre eles, WG-16 é adequado para aplicações na banda X (8GHz - 12GHz). Suas dimensões são a = 2,29cm e b = 1,02cm.

Se desejamos que tal guia opere em modo dominante TE_{10} e que a frequência de operação esteja ao menos 25% acima da frequência de corte do modo TE_{10} mas não mais do que 95% da frequência de corte do próximo modo, qual é a faixa de frequência permitida?

Através da Equação (8) e (9), sabemos que

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Então, para o modo TE_{10} com a = 2,29cm e b = 1,02cm e o dielétrico ser ar, a frequência de corte é

$$f_{c_{10}} = \frac{c}{2}\frac{1}{a} = 6,65\text{GHz}$$

Para ver qual será o modo seguinte, calculamos o corte para TE_{20} e TE_{11} que são, respectivamente

$$f_{c_{20}} = 13,1\text{GHz} \qquad f_{c_{11}} = 16,1\text{GHz}$$

Portanto, o modo fundamental é o TE_{10} e o próximo modo é o TM_{20} ou TE_{20}. Portanto, a faixa permitida é

$$1,25 f_{c_{10}} \leq f \leq 0,95 f_{c_{20}} \rightarrow 8,19\text{GHz} \leq f \leq 12,45\text{GHz}$$

Problema 4.02. ()
Um túnel é modelado como um guia de ondas retangular preenchido com ar, possuindo as dimensões a = 8m e b = 16m. Determine se os seguintes sinais conseguem passar por esse túnel: a) Sinal AM de 1.5MHz; b) Sinal FM de 120MHz.

A frequência do modo fundamental TE_{10} é

$$f_{c_{10}} = \frac{c}{2}\frac{1}{a} = 18.75\text{GHz}$$

Portanto o sinal AM não consegue passar, devido à sua baixa frequência de corte, enquanto o sinal FM consegue.

Problema 4.03. ()
Assumindo um guia de ondas de frequência de corte 6.5GHz preenchido com ar e possui 150m de comprimento. Esse guia é fechado com uma placa de metal perfeitamente condutor e então um pulso em 7.2GHz é aplicado em sua entrada. Quanto tempo irá demorar para o pulso voltar para a entrada?

A partir das equações (8) e (9), temos que

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} \qquad \beta_x^2 + \beta_y^2 = (f_c 2\pi\sqrt{\mu\epsilon})^2$$

Juntando isso com o fato de β_z ser definido como

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - (\beta_x)^2 - (\beta_y)^2}$$

e sabendo que $\omega = 2\pi f$, temos que

$$\beta_z = \sqrt{(2\pi f)^2\mu\epsilon - (f_c 2\pi\sqrt{\mu\epsilon})^2} = 2\pi\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{f^2 - f_c^2}$$

A partir da definição de velocidade de fase, podemos calcular que

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{2\pi f}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{f^2 - f_c^2}} = \frac{1/\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = 6.975 \times 10^8 \text{m/s}$$

Portanto, o tempo que irá demorar para percorrer o trajeto de 150m de ida e volta será

$$t = \frac{2l}{v_p} = \frac{2 * 150}{6.975 \times 10^8} = 430\text{ns}$$

Problema 4.04. ()
Um guia de ondas de 2cm por 3cm é preenchido com um material dielétrico de constante dielétrica 4. Se esse guia opera em 20GHz no modo TM_{11}, encontre: a) frequência de corte; b) constante de fase; c) velocidade de fase.

Nesse caso, por ser o maior lado, a=3cm e b=2cm e $\epsilon_r = 4$.

A frequência de corte no modo TM_{11} é

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{c}{2\sqrt{4}}\sqrt{\left(\frac{1}{0,03}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,02}\right)^2} = 4,507\text{GHz}$$

A constante de fase pode ser calculada de duas maneiras:

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \rightarrow \beta_z = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - (f_c/f)^2}$$

$$\beta_z = \frac{2\pi(20\text{GHz})\sqrt{4}}{3 \times 10^8}\sqrt{1 - (4,507/20)^2} = 816,2 \text{ rad/m}$$

E, por último, a velocidade de fase é calculada

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{2\pi 20 \times 10^9}{816,2} = 1,54 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Problema 4.05. ()
Um guia de ondas preenchido de ar possui a=6cm, b= 3cm. Dado que

$$E_z = 5\sin(\frac{2\pi x}{a})\sin(\frac{3\pi y}{b})\cos(10^{12}t - \beta_z z)V/m$$

calcule a impedância intrínsica do meio desse modo e a potência média do guia.

Como $E_z \neq 0$, estamos trabalhando com o modo $TM_{23}(m = 2, n = 3)$. A frequência de corte é

$$(f_c)_{23} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{0,06}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{0,03}\right)^2} = 15,81\text{GHz}$$

A frequência de operação é calculada através de $\omega = 10^{10}$, portanto $f = 159,2$GHz.

A partir da Equação (17),

$$\eta_{TM} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = 120\pi\sqrt{1 - \left(\frac{15,81}{159,2}\right)^2} = 375,1\Omega$$

A definição da potência média é

$$\mathbb{P}_{avg} = \frac{|E_x|^2 + |E_y|^2}{2\eta_{TM}}\vec{a_z} \qquad P_{avg} = \int \mathbb{P}_{avg} dS = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} \mathbb{P}_{avg} dxdy$$

Com as equações (13) e (14), sabemos o módulo de E_x e E_y. Assim,

$$\mathbb{P}_{avg} = \frac{\beta^2 E_0^2}{2h^4\eta_{TM}}\left(\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\cos^2(2\pi x/a)\sin^2(3\pi y/b) + \left(\frac{3\pi}{b}\right)^2\sin^2(2\pi x/a)\cos^2(3\pi y/b)\right)$$

$$P_{avg} = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} \mathbb{P}_{avg} dxdy = \frac{\beta^2 E_0^2}{2h^4\eta_{TM}}\frac{1}{4}\left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{9\pi^2}{b^2}\right) = \frac{\beta^2 E_0^2}{8h^2\eta_{TM}}$$

pois $h^2 = (4\pi^2/a^2 + 9\pi^2/b^2) = 1,098 \times 10^5$

Assim, como

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - (f_c/f)^2} = 3,317 \times 10^3$$

podemos calcular a potência média valendo

$$P_{avg} = \frac{(3,317 \times 10^3)^2\, 5^2}{8\,(1,098 \times 10^5)^2\, 375,1} = 0,8347W$$

Problema 4.06. ()
Para um guia retangular preenchido com ar, um mode de operação TE em 6GHz possui

$$E_y = 5\sin(\frac{2\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{b})\sin(\omega t - 12z)V/m$$

Determine: a) o modo de operação; b) a frequência de corte; c) a impedância intrínsica; d) o campo H_x.

Como m=2 e n=1, o modo de operação é TE_{21}. A frequência de corte é calculada através de β, através de

$$\beta = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{1-(f_c/f)^2}$$

Como é possível observar através da equação do exercício, $\beta = 12$. Separando o termo f_c da equação acima, encontra-se que

$$f_c = \sqrt{f^2 - \frac{\beta^2 c^2}{4\pi^2}} = 5,973\text{GHz}$$

A impedância intrínsica é calculada através da Equação (7) é

$$\eta_{TE} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = 120\pi\frac{1}{\sqrt{1-(5,973/6)^2}} = 3978\Omega$$

O campo H_x pode ser calculado através da Equação (4) e (5)

$$H_x(x,y,z) = \frac{j\beta_x\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)e^{-j\beta_z z}$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{-j\omega\mu\beta_x}{\beta_x^2+\beta_y^2}H_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)e^{-j\beta_z z}$$

Calculando então a impedância intrínsica do meio

$$\eta_{TE} = \frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{2\pi 6\times 10^9 4\pi 10^{-7}}{12} = 400\pi^2$$

Assim, a amplitude de H_x pode ser calculada como

$$H_x = \frac{E_{oy}}{\eta_{TE}} = \frac{5}{400\pi^2} = 1,267\times 10^{-3}$$

E, por fim, o campo magnético na direção x é escrito como

$$H_x(x,y,z) = 1,267\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})\sin(\omega t - \beta z)\text{mA/m}$$

Problema 4.07. ()
Para o modo TM_{11}, derive a fórmula para a potência média transmitida pelo guia.

Como feito no exercício 4.05, a potência média transmitida pelo guia pode ser calculada por

$$\mathbb{P}_{avg} = \frac{|E_x|^2+|E_y|^2}{2\eta_{TM}}\vec{a_z} \qquad P_{avg} = \int \mathbb{P}_{avg}dS = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\mathbb{P}_{avg}dxdy$$

e, pelas Equações (13) e (14), sabemos que

$$E_y(x,y,z) = \frac{-j\beta_y\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}E_0\sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)e^{-j\beta_z z}$$

$$E_x(x,y,z) = \frac{-j\beta_x\beta_z}{\beta_x^2+\beta_y^2}E_0\cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)e^{-j\beta_z z}$$

Assim

$$P_{avg} = \frac{\beta^2\pi^2}{2h^4\eta_{TM}}E_0^2\left(\frac{1}{a^2}\int_{x=0}^{a}\cos^2(\frac{\pi x}{a})dx\int_{y=0}^{b}\sin^2(\frac{\pi y}{b})dy + \frac{1}{b^2}\int_{x=0}^{a}\sin^2(\frac{\pi x}{a})dx\int_{y=0}^{b}\cos^2(\frac{\pi y}{b})dy\right)$$

$$P_{avg} = \frac{\beta^2\pi^2}{2h^4\eta_{TM}}E_0^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}$$

Como, para o caso TM_{11}

$$h^2 = \frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\pi^2$$

então a potência média tranmitida é

$$P_{avg} = \frac{\beta^2E_0^2}{8\pi^2\eta_{TM}}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}$$

Problema 4.08. ()

Em uma cavidade retangular, qual é o modo dominante quando:

Pela Equação (27) ou (34), sabemos que a frequência de corte em uma cavidade será

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\rho\pi}{d}\right)^2}$$

onde para os modos TM, m = 1,2,..., n = 1, 2, ..., ρ = 0, 1,2, ...

Para os modos TE, m = 0, 1,2,..., n = 0, 1, 2, ..., ρ = 1,2, ...

a) $a < b < d$ então 1/a > 1/b > 1/d

O modo TM de frequência de corte mais baixa é TM_{110} que é

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(1/a)^2+(1/b)^2}$$

Para TE, pode ser TE_{011} ou TE_{101}, mas como 1/a > 1/b, o menor modo TE é TE_{011} com frequência

$$f_{011} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(1/b)^2+(1/d)^2} < \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(1/a)^2+(1/b)^2} = f_{110}$$

Logo, o modo dominante é o TE_{011}

b) $a > b > d$ então 1/a > 1/b < 1/d

Assim como no caso anterior, a menor frequência do modo TM é TM_{110} que é

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}$$

Mas agora, o menor modo para TE é TE_{101}, com frequência

$$f_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(1/a)^2 + (1/d)^2} > \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2} = f_{110}$$

Então o modo dominante é o TM_{110}.
c) $a = d > b$ então 1/a = 1/d < 1/b
Novamente, a menor frequência do modo TM é TM_{110} que é

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}$$

E o modo mais baixo para TE é TE_{101} com frequência

$$f_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(1/a)^2 + (1/d)^2} < \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2} = f_{110}$$

Logo, o modo dominante é TE_{101}.

Problema 4.09. ()
Uma cavidade retangular de dimensões a = 3cm, b = 6cm e d = 9cm é preenchida com polietileno ($\epsilon_r = 2.5$). Encontre a frequência de ressonância para os cinco primeiros modos de ordem mais baixa.

Como b = 2a e d = 3a, escrevemos a frequência de corte como

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\rho\pi}{3a}\right)^2} = \frac{c}{2\sqrt{a2.5}}\sqrt{\left(\frac{m}{1}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3}\right)^2}$$

$$f_c = 3.162\sqrt{m^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3}\right)^2}\text{GHz}$$

Assim, as frequências foram calculadas e podem ser vistas na Tabela abaixo

Mode	f_c (GHz)
011	1.9
110	3.535
101	3.333
102	3.8
120, 103	4.472
022	3.8

Portanto, os cinco primeiros modos, em ordem crescente, são: 011, 101, 110, 102 e 022, 120 e 103.

Problema 4.10. ()
Calcule os tamanhos necessário para fazer uma cavidade ressonante preenchida com ar que tenha frequência de ressonância do modo dominante em 3GHz.

Considerando uma cavidade cúbica (a = b = d), a frequência de ressonância é

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\rho\pi}{d}\right)^2} = \frac{c}{2a}\sqrt{m^2 + n^2 + \rho^2}$$

Então, os modos $TE_{101}, TE_{011}, TM_{110}$ terão as menores frequências de corte de 3GHz quando

$$a = \frac{c}{f_c\sqrt{2}} = 7,071\text{cm} = b = d$$

Problema 4.11. ()
Uma cavidade ressonante cúbica de 10cm possui

$$\vec{E} = 200 \sin 30\pi x \sin 30\pi y \cos 6 \times 10^6 t \text{V/m}\vec{a_z}$$

Calcule o vetor $\vec{H}$.

Como o vetor E está na direção z, estamos trabalhando com um caso de modo TM. Através das Equações de Maxwell, temos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu}\begin{bmatrix} \vec{a_x} & \vec{a_y} & \vec{a_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r0 & E_z \end{bmatrix} = \frac{j}{\omega\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\vec{a_x} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{a_y}\right)$$

Como

$$\frac{1}{\omega\mu} = \frac{10^{-2}}{24\pi}$$

Temos que

$$H = \frac{j10^{-2}}{24\pi} \times 200 \times 30\pi \left(\sin 30\pi x \cos 30\pi y \vec{a_x} - \cos 30\pi x \sin 30\pi y \vec{a_y}\right)$$

$$\vec{H} = \mathbb{R}e(He^{j\omega t})$$

Assim, é calculado o campo magnético

$$\vec{H} = 2.5\left(-\sin 30\pi x \cos 30\pi y \vec{a_x} + \cos 30\pi x \sin 30\pi y \vec{a_y}\right)\sin(6 \times 10^6 t)$$