Vetor de Poynting - Conservação de Energia

- Conservação de energia segue diretamente das Equações de Maxwell

$\nabla \times \bar{E}(\bar{r},t) = -\frac{d\bar{B}(\bar{r},t)}{dt}$ ① Lei de Indução de Faraday

$\nabla \times \bar{H}(\bar{r},t) = \frac{d\bar{D}(\bar{r},t)}{dt} + \bar{J}(\bar{r},t)$ ② " circuital de Ampère

$\nabla \cdot \bar{B}(\bar{r},t) = 0$ ③ " de Gauss p/ $\bar{H}$

$\nabla \cdot \bar{D}(\bar{r},t) = \rho(\bar{r},t)$ ④ " " " p/ $\bar{E}$

$\nabla \cdot \bar{J}(\bar{r},t) + \frac{d}{dt}\rho(\bar{r},t) = 0$ ⑤ Lei da conservação de energia

$\bar{E}(\bar{r},t)$ = campo elétrico intensidade (V/m)
$\bar{H}(\bar{r},t)$ = " magnético (A/m)
$\bar{B}(\bar{r},t)$ = densidade de fluxo magnético (Webber/m^2)
$\bar{D}(\bar{r},t)$ = deslocamento elétrico (Coulomb/m^2)
$\bar{J}(\bar{r},t)$ = densidade de corrente elétrica (A/m^2)
$\rho(\bar{r},t)$ = " " carga " (Coulomb/m^3)

A equação ⑤ pode ser usada p/ derivar ④:

tome o divergente de ②

$$\cancel{\nabla \cdot \nabla \times \bar{H}}^{\,0} = \frac{d}{dt}\nabla \cdot \bar{D} + \nabla \cdot \bar{J}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\nabla \cdot \bar{D} - \frac{d}{dt}\rho$$ integrando

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{D}(\bar{r},t) = \rho(\bar{r},t)}$$

Derivando 3 de 1 :

$$\nabla \cdot \cancel{\nabla \times \bar{E}(\bar{r},t)}^{\,0} = -\frac{d}{dt}\nabla \cdot \bar{B}(\bar{r},t)$$

$$\frac{d}{dt}\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

* $\nabla \cdot \bar{B}$ = constante independente do tempo p/ satisfazer a eq. acima.
Se for diferente de zero, implica na existência de monopolo magnético.

Retornando ao vetor de Poynting :

Tome o produto escalar de $\bar{H}$ por 1
" " " " $\bar{E}$ por 2
subtraia : (suprimindo $(\bar{r},t)$)

$$\bar{H} \cdot \nabla \times \bar{E} = -H \cdot \frac{d\bar{B}}{dt}$$

$$\bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H} = \bar{E} \cdot \frac{d\bar{D}}{dt} + \bar{E} \cdot \bar{J}$$

$$\underbrace{\bar{H} \cdot \nabla \times \bar{E} - \bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H}} = -\bar{H} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} - \bar{E} \cdot \frac{d\bar{D}}{dt} - \bar{E} \cdot \bar{J}$$

Usando a identidade vetorial:

$$\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = \underbrace{\bar{H} \cdot \nabla \times \bar{E} - \bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H}}$$

Logo:

$$\boxed{\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) + \bar{H} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} + \bar{E} \cdot \frac{d\bar{D}}{dt} = -\bar{E} \cdot \bar{J}} \quad (6)$$

- O vetor de Poynting

$$\boxed{\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}}$$

7

é o fluxo de potência em W/m^2

- $\bar{H} \cdot \dfrac{d\bar{B}}{dt} + \bar{E} \dfrac{d\bar{D}}{dt}$ é a taxa de variação temporal da energia elétrica e magnética armazenada

- $-\bar{E} \cdot \bar{J}$ é a potência fornecida pela fonte de corrente $\bar{J}$

Exemplo:

$$\bar{E} = \hat{x} E_0 \cos(kz - \omega t)$$
$$\bar{H} = \hat{y} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \cos(kz - \omega t)$$

O vetor de Poynting resulta em:

$$\bar{S} = \hat{z} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$$

A densidade de potência média no tempo é:

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt\, \bar{S} = \hat{z} \frac{E_0^2}{2\eta}$$

onde $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}}$ que é a impedância característica.

Para meios isotrópicos:

$$\bar{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mu \bar{H}) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu \bar{H} \cdot \bar{H}\right]$$

$$\bar{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \bar{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\epsilon \bar{E} \cdot \bar{E}\right]$$

Em uma região livre de fontes $\Rightarrow \bar{J} = 0$

o vetor de Poynting torna-se:

$$\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) + \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = 0$$

onde:

$W_e = \frac{1}{2}\epsilon|\bar{E}|^2$ densid. energ. elétr. armazenada

$W_m = \frac{1}{2}\mu|\bar{H}|^2$ " " magnética "