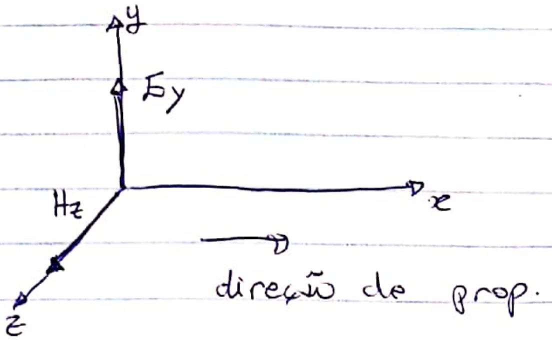
Velocidade de Grupo

Considere uma onda plana propagando-se na direção positiva de x, como ilustra a figura abaixo.



Considere ainda que o campo elétrico total seja

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - \beta x) \qquad (1)$$

Suponha ainda que a onda tenha duas frequências de amplitudes iguais.

$$\omega_0 + \Delta\omega$$
$$\omega_0 - \Delta\omega$$

Desta forma, os valores de β serão:

$\beta + \Delta\beta$ correspondendo a $\omega_0 + \Delta\omega$

$\beta - \Delta\beta$ " a $\omega_0 - \Delta\omega$

Assim, para a frequência 1:

$$E_y' = E_0 \cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)x\right] \qquad (2)$$

p/ frequência 2:

$$E_y'' = E_0 \cos\left[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)x\right] \qquad (3)$$

Somando:

$$E_y = E_y' + E_y'' \qquad (4)$$

ou

$$E_y = E_0 \left\{ \cos\left[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)x\right] + \cos\left[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)x\right] \right\} \qquad (5)$$

Rearranjando:

$$E_y = E_0 \left\{ \cos\left[\underbrace{(\omega_0 t - \beta_0 x)}_{a} + \underbrace{(\Delta\omega t - \Delta\beta x)}_{b}\right] + \cos\left[\underbrace{(\omega_0 t - \beta_0 x)}_{a} - \underbrace{(\Delta\omega t - \Delta\beta x)}_{b}\right] \right\}$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) \cancel{- \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)} + \cos(a)\cos(b) \cancel{+ \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)}$$
$$= 2\cos(a)\cos(b)$$

Assim:

$$E_y = 2E_0 \cos(\omega_0 t - \beta_0 x)\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta x) \qquad (6)$$

Os dois termos em cosseno indicam a presença de batimentos de frequências, ou seja, variações lentas superpostas a variações rápidas.

Em um ponto qualquer de fase constante

$$\omega_0 t - \beta_0 x = \text{const}$$

$$\beta_0 x = \omega_0 t - \text{const}$$

$$x = \frac{\omega_0 t}{\beta_0} - \frac{\text{const}}{\beta_0}$$

Assim, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\omega_0}{\beta_0} = v = f_0 \lambda_0$ → velocidade de fase (7)

"u" no form. L.T.

Fazendo o mesmo p/ o segundo argumento:

$$\Delta\omega t - \Delta\beta x = \text{const}$$

$$\Delta\beta x = \Delta\omega t - \text{const}$$

$$x = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} t - \frac{\text{const}}{\Delta\beta}$$

Logo, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = v_g = \Delta f \Delta\lambda$ → velocidade de grupo (8)

v_g é a velocidade de fase do envelope, também denominado de <u>velocidade de grupo</u>.

- $\omega_0 + \Delta\omega$ e $\omega_0 - \Delta\omega$ são duas bandas de frequências laterais devido à modulação da portadora ω_0 por uma frequência $\Delta\omega$, com a portadora suprimida.

- Em meios não-dispersivos $v_g = v$

- Meios dispersivos $\Rightarrow v(\lambda)$ $\qquad \beta_m = \left.\dfrac{d^m\beta}{d\omega^m}\right|_{\omega=\omega_0}$
  - normal
    $\dfrac{dv}{d\lambda} > 0 \qquad v_g < v \qquad \beta_2 > 0$
  - anômala
    $\dfrac{dv}{d\lambda} < 0 \qquad v_g > v \qquad \beta_2 < 0$

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\beta_2$$

Para uma largura de banda infinitamente pequena

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta} \qquad (9)$$

Scanned with CamScanner

Normal regime : ($\beta_2 > 0$) :
longer wavelength travel faster

Anomalous : ($\beta_2 < 0$) ;
longer wavelengths travel slower

Como $\omega = 2\pi f = 2\pi f \frac{\lambda}{\lambda} = \beta v$, Logo:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d(\beta v)}{d\beta} = \beta \frac{dv}{d\beta} + v \qquad (10)$$

ou

Velocidade de grupo $\boxed{v_g = v + \beta \frac{dv}{d\beta}}$ (11)

ou ainda:

$$\boxed{v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}} \qquad (12)$$

Exemplo: Meio dispersivo:

$f = 1\,MHz$ $(\lambda = 300\,m)$

onda plana

dispersão normal

sem perdas

$v = u = 300 \times 10^6\ m/s$ veloc. fase

sabendo q/ a velocidade de fase pode ser escrita como:

$$v = k\sqrt{\lambda}$$

onde k é uma constante. Encontre a velocidade de grupo.

de (12)

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

$$= v - \lambda \frac{d}{d\lambda}(k\sqrt{\lambda})$$

$$= v - k\lambda \frac{d\sqrt{\lambda}}{d\lambda}$$

$$= v - k\lambda \cdot \frac{1}{2} \lambda^{-1/2}$$

$$= v - \frac{k}{2} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

$$v_g = v - \frac{k}{2}\sqrt{\lambda}$$

v

$$v_g = v\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{v_g = \frac{v}{2}}$$

Logo: $v_g = \dfrac{300 \times 10^6 \ m/s}{2}$

$$\boxed{v_g = 150 \times 10^6 \ m/s}$$

* Negative group velocity

* superluminal v_g $\Rightarrow$ group index $n_g \to 0$
group delay $\tau_g \to 0$

$$v_g = \frac{c}{n_g}$$

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n_g}$$